



DOI: <http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.3.2>

УДК 511.35+519.116

ББК 22.13

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРО СЧАСТЛИВЫЕ БИЛЕТЫ

Игорь Георгиевич Величко

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и физики,
Таврический государственный агротехнологический университет
wig64@mail.ru

просп. Б. Хмельницкого, 18, 72310 г. Мелитополь, Запорожская обл., Украина

Аннотация. Получено точное выражение для числа решений диофантового уравнения, возникающего в задаче о счастливых билетах в случае, когда приравнивается разное количество слагаемых. Это выражение получено методом тригонометрических сумм и представляет собой интеграл от осцилирующей функции. С помощью метода стационарной фазы получена асимптотика. Приведены численные результаты, иллюстрирующие теоретические рассуждения.

Ключевые слова: метод тригонометрических сумм, метод стационарной фазы, счастливые билеты, асимптотика, тригонометрические тождества.

Введение

Классическая задача про счастливые билеты формулируется следующим образом. Есть пачка билетов, каждый из которых имеет номер, состоящий из 6 цифр. Первый билет имеет номер 000000, а последний 999999. Билет считается счастливым, если сумма первых трех цифр его номера равна сумме трех последних цифр номера. Так, например, счастливым считается билет с номером 331520. Нужно определить количество счастливых билетов в пачке. Задача сводится к определению количества решений диофантового уравнения $i + j + k = l + m + q$, где каждая из переменных есть цифра. Решение этой задачи приведено, в частности, в книге [1], где формула

$$S = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 10t}{\sin^6 t} dt \quad (1)$$

получена с применением техники комплексного анализа. Эта формула легко обобщается на случай, когда номер билета состоит из $2n$ цифр M -ричной системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную задачу, когда номер билета состоит из $2n + k$ элементов, каждый из которых пробегает множество значений из множества $\bar{M} = \{0, 1, 2, \dots, M-1\}$. Билет считается счастливым, если сумма первых n элементов равна сумме последних $n + k$ элементов. Задача сводится к подсчету числа $N(n, M, k)$ — количества решений уравнения

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{j=1}^k z_j,$$

где $x_i \in \bar{M}$, $y_j \in \bar{M}$, $z_j \in \bar{M}$.

2. Вспомогательные тригонометрические тождества

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{i=0}^{M-1} \cos(ix + \omega) = \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos\left(\frac{M-1}{2}x + \omega\right). \quad (2)$$

Доказательство. Воспользуемся известными соотношениями [3]

$$\sum_{j=0}^M \cos jx = \cos \frac{Mx}{2} \frac{\sin \frac{M+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

$$\sum_{j=0}^M \sin jx = \sin \frac{Mx}{2} \frac{\sin \frac{M+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{M-1} \cos(ix + \omega) &= \cos \omega \sum_{i=0}^{M-1} \cos ix - \sin \omega \sum_{i=0}^{M-1} \sin ix = \\ &= \cos \omega \cos \frac{M-1}{2}x \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \sin \omega \sin \frac{M-1}{2}x \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos\left(\frac{M-1}{2}x + \omega\right). \end{aligned}$$

Лемма 2. *Имеет место тождество:*

$$\sum_{i,j=0}^{M-1} \cos(x(i-j) + \rho) = \frac{\sin^2 \frac{Mx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cos \rho. \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим $\rho - jx = \omega$, $-\rho - \frac{M-1}{2}x = \tilde{\omega}$ и применим два раза лемму 1.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=0}^{M-1} \cos((i-j)x + \rho) &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \cos(ix + \omega) = \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos\left(\frac{M-1}{2}x + \rho - ix\right) = \frac{\sin \frac{Mx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sum_{j=0}^{M-1} \cos(ix + \tilde{\omega}) = \\ &= \frac{\sin^2 \frac{Mx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cos\left(\frac{M-1}{2}x + \tilde{\omega}\right) = \frac{\sin^2 \frac{Mx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cos \rho. \end{aligned}$$

3. Обобщение формулы для числа счастливых билетов

Далее воспользуемся методом тригонометрических сумм [2]. Для этого введем в рассмотрение дискретную дельта-функцию $\delta : Z \rightarrow \{0, 1\}$, определенную следующим образом:

$$\begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in Z/\{0\}. \end{cases}$$

Тогда искомое число можно записать в виде

$$N(n, M, k) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{z_k} \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{j=1}^k z_j\right). \quad (4)$$

Здесь и далее в суммах, в которых не указаны границы суммирования, подразумевается суммирование от 0 до $M-1$. Функцию $\delta(x)$ можно задать аналитически выражением, например, следующим образом:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(tx) dt. \quad (5)$$

Подставим равенство (5) в выражение (4). В результате получим

$$N(n, M, k) = \frac{1}{\pi} \sum_{x_1} \cdots \sum_{z_k} \int_0^\pi \cos t\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - \sum_{j=1}^k z_j\right) dt.$$

Поменяв местами суммирование и интегрирование, получим выражение

$$N(M, n, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{N}(n, M, k, t) dt, \quad (6)$$

где

$$\tilde{N}(n, M, k, t) = \sum_{x_1, y_1} \cdots \sum_{x_n, y_n} \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_k} \cos\left(t \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - t \sum_{j=1}^k z_j\right). \quad (7)$$

Упростим формулу (7). Для этого поменяем местами порядок суммирования:

$$\sum_{z_k} \cdots \sum_{z_1} \sum_{x_n, y_n} \cdots \sum_{x_1, y_1} \cos \left(t \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - t \sum_{j=1}^k z_j \right)$$

и выполним внутреннее суммирование, используя лемму 2:

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, y_1} \cos \left(t(x_1 - y_1) + t \sum_{i=2}^n (x_i - y_i) - t \sum_{j=1}^k z_j \right) &= \\ &= \frac{\sin^2 \frac{Mt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cos \left(t \sum_{i=2}^n (x_i - y_i) - t \sum_{j=1}^k z_j \right). \end{aligned}$$

С учетом этого будем иметь

$$\tilde{N}(n, M, k, t) = \frac{\sin^2 \frac{Mt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{z_k} \cdots \sum_{z_1} \sum_{x_n, y_n} \cdots \sum_{x_2, y_2} \cos \left(t \sum_{i=2}^n (x_i - y_i) - t \sum_{j=1}^k z_j \right).$$

Последовательно выполнив в последнем равенстве суммирование по парам индексов $x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$, получим выражение

$$\tilde{N}(n, M, k, t) = \frac{\sin^{2n} \frac{Mt}{2}}{\sin^{2n} \frac{t}{2}} \sum_{z_k} \cdots \sum_{z_1} \cos \left(t \sum_{j=1}^k z_j \right). \quad (8)$$

Мы учли, что $\cos x$ есть четная функция. Внутреннее суммирование в формуле (8) произведем, используя лемму 1.

$$\begin{aligned} \sum_{z_1} \cos \left(t \sum_{j=1}^k z_j \right) &= \sum_{z_1} \cos \left(tz_1 + \sum_{j=2}^k z_j \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{Mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \left(\frac{M-1}{2}t + \sum_{j=2}^k z_j \right). \end{aligned}$$

Выполним суммирование по индексу z_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{z_2} \sum_{z_1} \cos \left(t \sum_{j=1}^k z_j \right) &= \frac{\sin \frac{Mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{z_2} \cos \left(\frac{M-1}{2}t + \sum_{j=2}^k z_j \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{Mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{z_2} \cos \left(z_2 t + \frac{M-1}{2}t + \sum_{j=3}^k z_j \right) = \\ &= \frac{\sin^2 \frac{Mt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cos \left(2 \frac{M-1}{2}t + \sum_{j=3}^k z_j \right). \end{aligned}$$

После выполнения суммирования по всем оставшимся индексам z_3, \dots, z_k получим выражение

$$\tilde{N}(n, M, k, t) = \frac{\sin^{2n+k} \frac{Mt}{2}}{\sin^{2n+k} \frac{t}{2}} \cos\left(\frac{k}{2}(M-1)t\right). \quad (9)$$

Подставим выражение (9) в равенство (6) и сделаем замену $t = 2x$. Искомое выражение для числа решений имеет вид:

$$N(n, M, k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin Mx}{\sin x}\right)^{2n+k} \cos(k(M-1)x) dx. \quad (10)$$

Формула (1) есть частный случай формулы (10) при $k = 0, n = 3, M = 10$.

4. Асимптотика

Получим оценку величины $N(n, M, k)$, используя метод стационарной фазы [4]. Искомый интеграл (10) можно представить в виде двух слагаемых, первое из которых есть интеграл от той же функции на интервале $(0, \frac{\pi}{M})$, а второе — на интервале $(\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{2})$. На рисунке для примера изображен график функции $g(x) = \frac{\sin 20x}{\sin x}$.

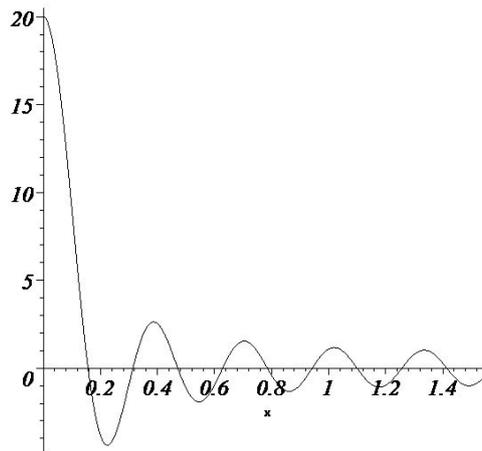


График функции $g(x) = \frac{\sin 20x}{\sin x}$

Поскольку подынтегральная функция имеет вид $g^{2n+k}(x) \cos \mu x$, то можно сделать вывод, что при больших значениях $2n + k$ основной вклад в интеграл (10) дает первое слагаемое. Функцию $f(x) = \frac{\sin Mx}{\sin x}$ разложим в ряд Маклорена:

$$f(x) = M - \frac{1}{6}M(M^2 - 1)x^2 + o(x^3).$$

Тогда при малых x имеем приближенное равенство

$$\begin{aligned} \ln f(x) &\approx \ln\left(M\left(1 - \frac{M^2 - 1}{6}x^2\right)\right) = \\ &= \ln M + \ln\left(1 - \frac{M^2 - 1}{6}x^2\right) \approx \ln M - \frac{M^2 - 1}{6}x^2. \end{aligned}$$

Используя формулу $\int_0^\infty e^{-b^2x} \cos \lambda x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|b|} e^{-\frac{\lambda^2}{4b^2}}$ из публикации [3], получим искомую оценку, обозначив $2n + k = t$, $k(M - 1) = \mu$, $\frac{M^2-1}{6} = b^2$, $b > 0$:

$$\begin{aligned} N(n, M, k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^t(x) \cos \mu x dx \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{M}} f^t(x) \cos \mu x dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{M}} e^{t \ln f(x)} \cos \mu x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{M}} e^{t \ln M - t b^2 x^2} \cos \mu x dx \approx \\ &\approx \frac{2}{\pi} M^t \int_0^\infty e^{-t b^2 x^2} \cos \mu x dx \approx \frac{2}{\pi} M^t \frac{\sqrt{\pi}}{2b\sqrt{t}} e^{-\frac{\mu^2}{4b^2 t}}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным величинам, получим асимптотику

$$N(n, M, k) \approx \frac{M^t}{\sqrt{M^2 - 1}} \sqrt{\frac{6}{\pi(2n + k)}} e^{-\frac{3k^2(M+1)}{2(M-1)(2n+k)}}. \quad (11)$$

Учитывая, что $\sqrt{M^2 - 1} \approx M$, получим более простую формулу

$$N(n, M, k) \approx M^{t-1} \sqrt{\frac{6}{\pi(2n + k)}} e^{-\frac{3k^2(M+1)}{2(M-1)(2n+k)}}. \quad (12)$$

При $k = 0$ получим асимптотику для классической симметричной задачи:

$$N(n, M, 0) \approx M^{t-1} \sqrt{\frac{3}{\pi n}}. \quad (13)$$

Приведем примеры вычислений по формуле (11). Рассматриваем случай билетов, номера которых состоят из 6 цифр. Билет считается счастливым, если сумма двух первых цифр равна сумме последних четырех цифр.

В принятых в статье обозначениях нужно определить $N(2, M, 2)$. Ниже в таблице приведены оценки значений этой функции, вычисленные по формуле (12), точные значения и относительная погрешность δ (в процентах):

M	10	11	13	20
асимптотика	25019,33	39653,22	89161,66	731451,42
точное значение	25927	41118	92547	760704
δ	3,5	3,56	3,66	3,84

Как видим, во всех рассмотренных случаях формула (11) дает достаточно точные оценки, и погрешность не превышает 4%.

Заключение

В статье рассматривается обобщение задачи о счастливых билетах, когда подсчитываются суммы первых n цифр и последних $n+k$ цифр в системе счисления по основанию M . Получено интегральное представление (10) для количества таких билетов. Методом стационарной фазы получена оценка искомой величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. — М. : МЦНМО, 2007. — 144 с.
2. Виноградов, И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / И. М. Виноградов. — М. : Наука, 1971. — 158 с.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, рядов и произведений / И. С. Градштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.
4. Федорук, М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорук. — М. : Наука, 1971. — 544 с.

REFERENCES

1. Lando S.K. *Lektsii o proizvoodyashchikh funktsiyakh* [Lectures on Generating Functions]. Moscow, MTsNMO Publ., 2007. 144 p.
2. Vinogradov I.M. *Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel* [The Method of Trigonometric Sums in Number Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 158 p.
3. Gradshteyn I.S. *Tablitsy integralov, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Series and Products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 1100 p.
4. Fedoruk M.V. *Asimptotika: Integraly i ryady* [Asymptotics: Integrals and Series]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 544 p.

ASYMMETRICAL PROBLEM ABOUT THE LUCKY TICKETS

Igor Georgievich Velichko

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
 Department of Higher Mathematics and Physics,
 Tavria State Agrotechnological University
 wig64@mail.ru
 Prosp. B. Khmel'nitskogo, 18, 72310 Melitopol, Zaporozhskaya obl., Ukraine

Abstract. We consider a set of tickets with numbers from 000001 to 999999. The lucky ticket is called, in which the sum of the first three digits equals the sum of the last three digits. The problem of lucky tickets is counting their number. The generalization of the classical problem of the lucky ticket to the case when the number of terms in comparable amounts and different radix arbitrarily. To count the number of solutions of linear diophantine equations, the terms of which are bounded by a constant, we introduced a discrete analogue of the delta function, written as the definite integral. We wrote out the formula for the number of tickets in the form of multiple sums comprising administering function. We prove several auxiliary identities for the end of trigonometric sums, it is a generalization of identities. After changing the order of summation and integration we obtain the desired formula for the number of solutions of this diophantine equation. With an equal number of terms in the sum written out expression obtained previously known classical result, which is known to the author sources obtained using more sophisticated techniques of integration in the complex domain. In this paper we use the same kind of method of trigonometric sums I.M. Vinogradov, and all the arguments are on the set of real numbers. To obtain an exact expression as an integral of the oscillating function method of

stationary phase estimates are obtained, containing radicals and exponents. The results of the comparisons of calculations on the exact and approximate formulas are given.

Key words: the method of trigonometric sums, method of stationary phase, happy tickets, asymptotic behavior, trigonometric identities.