

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЗАИМНО-ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ВТСП

Александр Федорович Васильев

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры радиофизики,
Волгоградский государственный университет
was777@yandex.ru, rf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Андрей Леонидович Якимец

Кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой радиофизики,
Волгоградский государственный университет
yakimets_volsu@mail.ru, rf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрена задача взаимодействия скрещенных магнитных полей в сверхпроводниках. Получено выражение, связывающее значения продольной и поперечной компонент магнитного поля. Экспериментально показана возможность использования данного эффекта для измерения магнитного поля.

Ключевые слова: сверхпроводник, магнитометр, СКВИД, криотрон, скрещенные магнитные поля, нелинейный магнетик.

Введение

Исследования взаимодействия взаимно-перпендикулярных магнитных полей в нелинейных магнетиках имеют почтенный возраст [3], и в качестве подобной среды, как правило, рассматривают ферромагнитные материалы и среды [5]. Практическим результатом данных исследований стала разработка феррозондовых магнитометров, обладающих высокой чувствительностью [1]. Вместе с тем анализ работы феррозонда [5] показывает, что гистерезисные потери являются фундаментальным ограничением порога чувствительности феррозондовых магнитометров.

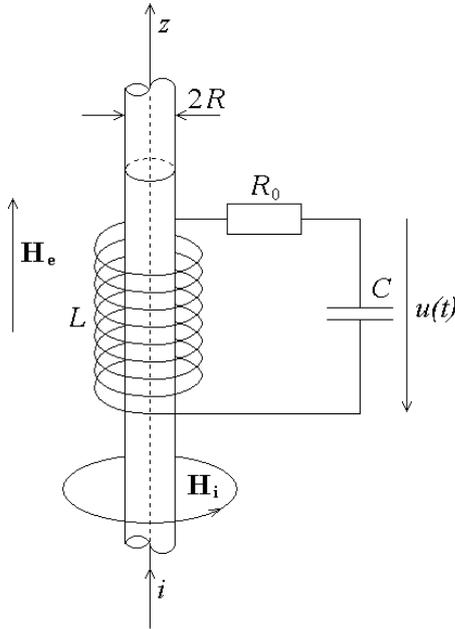


Рис. 1. Сверхпроводящий провод во внешнем поле

рентности, а λ – глубина проникновения, помещенная в параллельное однородное магнитное поле. По проволоке протекает ток i .

Взаимодействие взаимно-перпендикулярных магнитных полей в диапазоне радиочастот, на котором энергия кванта существенно меньше ширины энергетической щели, с достаточной точностью описывается уравнениями Гинзбурга – Ландау [2]:

$$\xi^2 \nabla^2 \psi + 2\pi \mathbf{A} / \Phi_0 \nabla \psi - \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \quad (1)$$

$$i \nabla + 2\pi \mathbf{A} / \Phi_0 \mathbf{n} \psi = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* - \Phi_0 / 2\pi \lambda^2 - |\psi|^2 \mathbf{A} / \lambda^2, \quad (3)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали к поверхности сверхпроводника; $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) / \psi_0$ – нормированная функция параметра порядка; $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – векторный потенциал магнитного поля; $\Phi_0 \approx 2,07 \times 10^{-15} \text{ Вб}$ – квант магнитного потока.

Выберем цилиндрическую систему координат таким образом, чтобы ось z совпала с осью проволоки. Тогда напряженность внешнего магнитного поля равна $\mathbf{H}_e = H_e r \mathbf{e}_\perp = \text{const}$, а магнитное поле, создаваемое током, имеет вид $\mathbf{H}_i = H_i r \mathbf{e}_\perp = \text{const}$. Выберем калибровку векторного потенциала \mathbf{A} таким образом, чтобы функция Ψ была вещественной. Тогда уравнения (1)–(3) приводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям (4)–(6) с действительными коэффициентами и граничным условиям (7) к ним:

$$-\Delta \Psi + \left(\xi^2 \frac{4\pi^2 A^2}{\Phi_0^2} - 1 \right) \Psi + \Psi^3 = 0, \quad (4)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + |\Psi|^2 \mathbf{A} / \lambda^2 = 0, \quad (5)$$

Вместе с тем сверхпроводящие материалы также обладают нелинейными магнитными свойствами, и поскольку потери в сверхпроводниках в радиочастотном диапазоне пренебрежимо малы, это позволяет использовать нелинейную магнитную восприимчивость для измерения слабых магнитных полей [6; 9]. Можно ожидать, что нелинейное взаимодействие взаимно перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводниках, рассматриваемых как нелинейный проводящий магнетик [7], позволит разработать магнитометры, не уступающие по чувствительности квантовым, например, СКВИДам [8; 10]. Увеличение чувствительности возможно благодаря тому, что объем, в котором происходит нелинейное взаимодействие, гораздо больше объема джозефсоновского контакта в СКВИДе.

1. Постановка задачи

Пусть зондом сверхпроводникового магнитометра (рис. 1) является тонкая проволока из сверхпроводника второго рода диаметром $2R$, причем $\xi \ll R \ll \lambda$, где ξ – длина коге-

$$\mathbf{A}\nabla\Psi = 0, \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_r \Big|_{r=R} = 0, \quad A_\varphi \Big|_{r=0} = 0, \\ \frac{\partial A_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{i}{2\pi R}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = H_e, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

2. Методика решения

В силу выбора системы координат можно считать, что функции, входящие в уравнения (4)–(7), зависят только от координаты r . Тогда из уравнения (6) следует $A_r \equiv 0$, что согласуется с первым граничным условием (7). Таким образом, вектор потенциала магнитного поля \mathbf{A} имеет только z и φ компоненты: $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Введем безразмерные координату $\rho = r/\lambda$ и компоненты векторного потенциала магнитного поля $a_z \rho = A_z \rho / a_0$, $a_\varphi \rho = A_\varphi \rho / a_0$, где $a_0 = R\Phi_0 / 2\pi\xi\lambda$, и обозначим $\alpha = \xi^2/\lambda^2 \ll 1$, $\beta = R^2/\lambda^2 \ll 1$ – малые параметры. Тогда уравнения (4), (5) и (7) принимают вид:

$$\alpha \frac{d^2\Psi}{d\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\Psi}{d\rho} + \Psi - \beta (a_z^2 + a_\varphi^2) \Psi - \Psi^3 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d \rho a_\varphi}{d\rho} \right] - \Psi^2 a_\varphi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{da_z}{d\rho} \right) - \Psi^2 a_z = 0, \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\varphi \Big|_{\rho=0} = 0, \\ \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{i\lambda}{2\pi a_0 R}, \quad \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d a_\varphi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi\xi\lambda^2 H_e}{R\Phi_0}, \\ \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Дополнительно отметим, что функция параметра порядка $0 \leq \rho \leq R/\lambda$ изменяется медленно и напряженность внешнего магнитного поля существенно меньше критического:

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{d\Psi}{d\rho} \right| \leq 1, \quad a_\varphi^2 + a_z^2 \leq 1, \quad (12)$$

тогда уравнения (8)–(10) можно решить методом последовательных приближений, положив $\Psi = \Psi_0 + \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2 + \dots$. Подставляя данное разложение в уравнение (8) и приравнивая ко-

эффиценты при соответствующих степенях α и β , получим $\Psi_0 = 1$, $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = -a_z^2 + a_\phi^2 / 2$. Тогда уравнения (9)–(12) принимают вид:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d \rho a_\phi}{d\rho} \right] = a_\phi - \beta a_\phi^3 - \beta a_\phi a_z^2, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{da_z}{d\rho} \right) = a_z - \beta a_z^3 - \beta a_z a_\phi^2, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \left(a_\phi \frac{da_\phi}{d\rho} + a_z \frac{da_z}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = 0, \\ a_\phi \Big|_{\rho=0} = 0, \\ \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \frac{da_z}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{i\lambda}{2\pi a_0 R}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{da_\phi}{d\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi \xi \lambda^2 H_e}{R\Phi_0} \end{cases} \quad (15)$$

$$\left| a_\phi \frac{da_\phi}{d\rho} + a_z \frac{da_z}{d\rho} \right| \leq \frac{\rho}{\beta}, \quad a_\phi^2 + a_z^2 \leq 1. \quad (16)$$

Приближенное решение уравнений (13) и (14) может быть найдено методом регулярного разложения по малому параметру β :

$$\begin{aligned} a_z \rho &= a_{z0} \rho + \beta \cdot a_{z1} \rho + \beta^2 \cdot a_{z2} \rho + \dots, \\ a_\phi \rho &= a_{\phi0} \rho + \beta \cdot a_{\phi1} \rho + \beta^2 \cdot a_{\phi2} \rho + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, с учетом граничных условий (15), в нулевом приближении получим:

$$a_{z0} = \frac{i}{2\pi\sqrt{\beta}a_0} \cdot \frac{I_0 \rho}{I_1 \sqrt{\beta}}, \quad a_{\phi0} = \frac{H_e \lambda}{a_0} \cdot \frac{I_1 \rho}{I_0 \sqrt{\beta}},$$

где $I_0 x$ и $I_1 x$ – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

С использованием фундаментального решения уравнения [10] следующее приближение решения уравнения (13) имеет вид:

$$a_{\phi1} = K_1 \rho \int I_1 \rho \frac{-a_{\phi0}^3 - a_{\phi0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} - I_1 \rho \int K_1 \rho \frac{-a_{\phi0}^3 - a_{\phi0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W},$$

где $W = -1/\rho$ – детерминант Вронского; $K_1 x$ – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка. Тогда приближенное решение второго уравнения системы (8) может быть записано следующим образом:

$$a_\phi \approx D I_1 \rho + \beta \cdot K_1 \rho \int I_1 \rho \frac{-a_{\phi0}^3 - a_{\phi0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} - I_1 \rho \int K_1 \rho \frac{-a_{\phi0}^3 - a_{\phi0} a_{z0}^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{W} d\rho.$$

Приближенно вычисляя интегралы, пользуясь малостью $\rho \ll 1$ и ограничиваясь линейными по ρ слагаемыми, оценим величину магнитного потока через поперечное сечение сверхпроводящей проволоки:

$$A_\varphi = a_0 a_\varphi \left(\frac{r}{\lambda} \right) \approx H_e \frac{r}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi \lambda^2 i}{\Phi_0 R^2} \right)^2 \right),$$

откуда

$$\Phi = \int_i \mathbf{A} d\mathbf{l} = \pi R^2 H_e \left[1 + \frac{1}{18} \left(\frac{j}{j_c} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где $j_c = \Phi_0 / 3\sqrt{3}\pi\lambda^2\xi$ – критическая плотность тока [11]; $j = i/S$ – плотность тока, протекающего по проволоке; $S = \pi R^2$ – площадь поперечного сечения зонда.

3. Экспериментальные исследования

Для исследования взаимодействия взаимно-перпендикулярных магнитных полей в высокотемпературном сверхпроводнике создана экспериментальная установка (рис. 2). Основой установки является цилиндрический датчик из ВТСП-керамики $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, имеющий длину 21 мм и диаметр 9,5 мм. На сверхпроводящий цилиндр намотана измерительная катушка $L1$, содержащая 200 витков, с проводом диаметром 0,3 мм. Напряжение u_2 с катушки $L1$ измеряется селективным нановольтметром «Unipan 233». Через датчик протекает ток i , задаваемый резистором $R1$. В качестве источника переменного напряжения используется генератор «Актаком АНР-1012». Сверхпроводящий датчик помещен в коаксиальную полезадающую катушку $L2$ длиной 73 мм и диаметром 35 мм, содержащую 144 витка проволоки диаметром 0,5 мм. Величина магнитного поля, создаваемого соленоидом $L2$, определяется напряжением u_1 лабораторного блока питания «Mastech HY3005-D» и токозадающим резистором $R2$. Датчик с полезадающей катушкой находится в сосуде Дюара с жидким азотом.

На рисунке 3 представлены зависимости амплитуды второй гармоники напряжения на выводах измерительной катушки $L1$ от на-

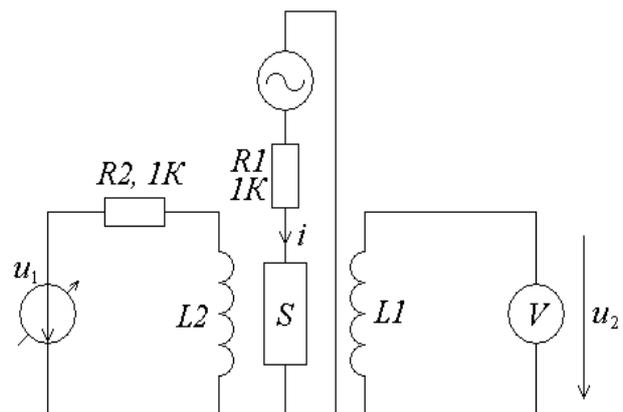


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

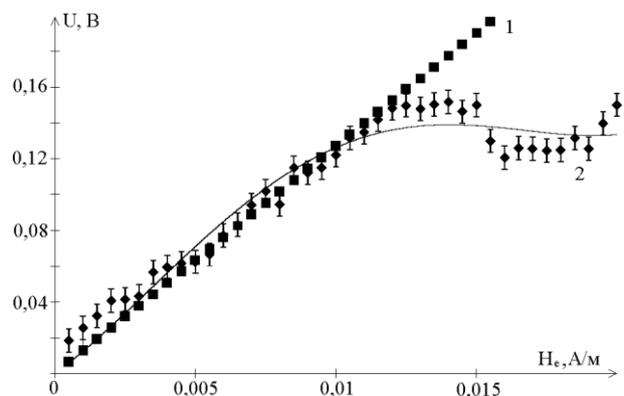


Рис. 3. Зависимость напряжения на измерительной катушке от напряженности внешнего магнитного поля:

1 – теоретическая; 2 – экспериментальная

пряженности внешнего постоянного магнитного поля. Цифрой 1 обозначена аналитическая зависимость, определяемая выражением (17). Кривая, обозначенная цифрой 2, получена экспериментально, при этом частота и амплитуда тока i , протекающего через сверхпроводящий образец, соответственно равны 1 кГц и 5 мА. Из экспериментальной зависимости получено значение критического тока $j_c = 1,62 \text{ A/cm}^2$, что хорошо согласуется с известным значением $j_c = 1 \div 10 \text{ A/cm}^2$ [11]. Столь значительный разброс значений критического тока определяется технологией изготовления керамических сверхпроводников.

Заключение

1. Показана возможность использования взаимодействия взаимно-перпендикулярных магнитных полей в сверхпроводящей проволоке для измерения напряженности магнитного поля.
2. Получена экспериментальная зависимость амплитуды второй гармоники измеряемого напряжения от напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, Ю. В. Феррозонды / Ю. В. Афанасьев. – Л. : Энергия, 1969. – 168 с.
2. Гинзбург, В. Л. К теории сверхпроводимости / В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1950. – Т. 20, вып. 12. – С. 1064–1082.
3. Горелик, Г. С. О некоторых нелинейных явлениях, происходящих при суперпозиции взаимно перпендикулярных магнитных полей / Г. С. Горелик // Известия Академии наук СССР. Серия Физическая. – 1944. – Т. VIII, № 4. – С. 172–188.
4. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Зацепин, Н. Н. Метод высших гармоник в неразрушающем контроле металлов / Н. Н. Зацепин. – Минск : Наука и техника, 1980. – 167 с.
6. Игнатъев, В. К. Оптимизированный СКВИД с радиочастотным смещением в диапазоне 25–30 МГц / В. К. Игнатъев, И. Я. Краснополин // Приборы и техника эксперимента. – 1982. – № 1. – С. 198–201.
7. Игнатъев, В. К. Сверхпроводящий магнитометр с обратной связью по магнитному полю / В. К. Игнатъев, С. В. Черных // Приборы и техника эксперимента. – 1996. – № 2. – С. 124–126.
8. Игнатъев, В. К. ВТСП-магнитометр с двойной модуляцией / В. К. Игнатъев, А. Л. Якимец // Измерительная техника. – 2000. – № 10. – С. 49–52.
9. Игнатъев, В. К. Нелинейное взаимодействие трех волн в проводящем магнетике / В. К. Игнатъев, А. Л. Якимец // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2002. – № 1. – С. 55–59.
10. Интегральные схемы и микроэлектронные устройства на сверхпроводниках / В. Н. Алфеев, П. А. Бахтин, А. А. Васенков [и др.] ; под ред. В. Н. Алфеева. – М. : Радио и связь, 1985. – 232 с.
11. Марков, Л. К. Неустойчивость вольт-амперной характеристики сверхпроводящей керамики и захваченным магнитным потоком / Л. К. Марков, В. В. Шпейзман // Физика твердого тела. – 1993. – Т. 35, вып. 11. – С. 3008–3013.

REFERENCES

1. Afanasyev Yu.V. *Ferrozondy* [Ferroprobos]. Leningrad, Energiya Publ., 1969. 168 p.
2. Ginzburg V.L., Landau L.D. K teorii sverkhprovodimosti [On the Theory of Superconductivity]. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki*, 1950, vol. 20, iss. 12, pp. 1064-1082.
3. Gorelik G.S. O nekotorykh nelineynykh yavleniyakh, proiskhodyashchikh pri superpozitsii vzaimno perpendikulyarnykh magnitnykh poley [On Some Nonlinear Phenomena Occurring in the Super-

position of Perpendicular Magnetic Fields]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya*, 1944, vol. 8, no. 4, pp. 172-188.

4. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p.

5. Zatsepin N.N. *Metod vysshikh garmonik v nerazrushayushchem kontrole metallov* [The Method of the Higher Harmonics in Non-Destructive Testing of Metals]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1980. 167 p.

6. Ignatyev V.K., Krasnopolin I.Ya. Optimizirovanny SKVID s radiochastotnym smeshcheniem v diapazone 25-30 MHz [The Optimized SQUID With an RF Bias in the Range of 25-30 MHz]. *Pribory i tekhnika eksperimenta*, 1982, no. 1, pp. 198-201.

7. Ignatyev V.K., Chernykh S.V. Sverkhprovodyashchiy magnitometr s obratnoy svyazu po magnitnomu polyu [Superconducting Magnetometer With Magnetic Feedback]. *Pribory i tekhnika eksperimenta*, 1996, no. 2, pp. 124-126.

8. Ignatyev V.K., Yakimets A.L. VTSP-magnitometr s dvoynoy modulyatsiey [HTS Magnetometer With Double Modulation]. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2000, no. 10, pp. 49-52.

9. Ignatyev V.K., Yakimets A.L. Nelineynoe vzaimodeystvie trekh voln v provodyashchem magnetike [The Nonlinear Interaction of Three Waves in a Non-Conducting Magnet]. *Fizika volnovykh protsessov i radio-tekhnicheskie sistemy*, 2002, no. 1, pp. 55-59.

10. Alfeev V.N., Bakhtin P.A., Vasenkov A.A., et al. *Integralnye skhemy i mikroelektronnye ustroystva na sverkhprovodnikakh* [Integrated Circuits and Microelectronic Devices for Superconductors]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1985. 232 p.

11. Markov L.K., Shpeyzman V.V. Neustoychivost volt-ampernoy kharakteristiki sverkhprovodyashchey keramiki i zakhvachennym magnitnym potokom [The Instability of the Current-Voltage Characteristics of Superconducting Ceramics and Trapped Magnetic Flux]. *Fizika tverdogo tela*, 1993, vol. 35, iss. 11, pp. 3008-3013.

INTERACTION OF MUTUALLY PERPENDICULAR MAGNETIC FIELDS IN HTSC

Aleksandr Fedorovich Vasilyev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Radiophysics,
Volgograd State University
was777@yandex.ru, rf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Andrey Leonidovich Yakimets

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of Department of Radiophysics,
Volgograd State University
yakimets_volsu@mail.ru, rf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this article a problem of interaction of the crossed magnetic fields in superconductors is considered. Superconducting materials have nonlinear magnetic properties. It allows using a non-linear magnetic susceptibility for measurement of feeble magnetic fields.

We place a wire of superconducting material in a constant parallel uniform magnetic field. Then we let through a wire the alternating current leak. Interaction of mutual and perpendicular variation magnetic fields, with adequate accuracy is described by Ginzburg-Landau's equations.

Approximate solution of the written equations is received. The component of a magnetic field parallel to a wire contains a variable component. Frequency of a variable compo-

ment of the magnetic field is equal to the doubled current frequency. Amplitude of the variable component of the magnetic field is proportional to strength of the constant magnetic field.

The experimental installation for research of interaction of mutually perpendicular magnetic fields is created. The cylinder from HTSC of ceramics of the $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ was used as a sensor. Dependence of amplitude of the second harmonica of a variation magnetic field on strength of a constant magnetic field is received.

Key words: superconductor, magnetometer, SQUID, cryotron, crossed magnetic fields, nonlinear magnetic material.