www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА

DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2015.4.1

УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОБЛАСТЕЙ [1]

Алексей Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Анжелика Юрьевна Беленикина

Студентка Института математики и информационных технологий,
Волгоградский государственный университет
matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе приводится построение триангуляции пространственных областей специального вида и дается нижняя оценка минимального двугранного угла ее тетраэдров.

Ключевые слова: триангуляция, тетраэдр, двугранный угол, элементарная область, разбиение области, условие Липшица.

Введение

Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^m$ в пространстве $\mathbf{R}^3$. *Триангуляцией данного набора точек* называется совокупность невырожденных тетраэдров $\{T_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющих условиям:

1) любая точка P_i является вершиной хотя бы одного тетраэдра T_j;

2) каждый тетраэдр T_j содержит только четыре точки из данного набора, являющиеся вершинами этого тетраэдра.

Пусть Ω ограниченная область в $\mathbf{R}^3$. *Триангуляцией области* Ω называется триангуляция произвольного конечного набора точек, лежащего в замыкании области Ω.

В настоящее время для плоских областей имеется довольно большое число различных алгоритмов триангуляции, описание которых можно найти, например, в работах [1; 5; 8–10]. Многие из приведенных там алгоритмов подходят, после соответствующих изменений, и для трехмерных областей. Описание некоторых прямых и итерационных алгоритмов в пространственном случае имеется в работах [2; 3]. Как правило, в перечисленных работах не исследуется математически строго качество построенной триангуляции и не выводится никаких количественных оценок ее числовых характеристик.

В настоящей работе мы описываем достаточно простой в реализации алгоритм триангуляции пространственной области специального вида, который относится к так называемым прямым методам. Для оценки качества построенной триангуляции мы используем минимальный двугранный угол, вычисленный среди всех тетраэдров триангуляции. Именно мы приводим нижнюю оценку этого угла через геометрические характеристики области и параметры ее разбиения на ячейки. Стоит отметить, что условие пустой сферы, то есть условие Делоне, не обеспечивает качественной триангуляции (в отличие от триангуляции на плоскости). Например, в работе [6] строится пример триангуляции пространственной области, удовлетворяющей условию Делоне, но не аппроксимирующей с достаточной точностью градиент гладкой функции. Это ограничивает область применения таких триангуляций в различных вычислительных задачах, например, при численном решении уравнений с частными производными. В то же время более сильные условия на триангуляцию, которые обеспечивают необходимую точность вычисления площади, дают равномерную сходимость приближенных решений уравнения минимальной поверхности [4]. Для пространственных триангуляций (см., например, [7]) отделимость от нуля двугранных углов в тетраэдрах позволяет показать, что погрешность вычисления градиента гладкой функции стремится к нулю при стремлении к нулю максимального диаметра тетраэдров.

1. Основные результаты

Рассмотрим элементарную область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, которая имеет вид

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : a < x < b,\ c < y < d,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\right\},$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Далее полагаем

$$M_0 = \inf_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) > 0,$$

$$M_1 = \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) < \infty.$$

Будем считать, что для функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ найдется постоянная $L < \infty$ такая, что выполняются неравенства

$$|\varphi(x', y') - \varphi(x'', y'')| \le L\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2},$$

$$|\psi(x', y') - \psi(x'', y'')| \le L\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

для любых $x', x'' \in [a, b], y', y'' \in [c, d]$. Далее опишем построение триангуляции области Ω. Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $c = y_0 < y_1 < x_2 < < ... < y_m = d$ — разбиение отрезка $[c, d]$. Положим

$$f_\tau(x, y) = \tau\psi(x, y) + (1 - \tau)\varphi(x, y),\ \tau \in [0, 1].$$

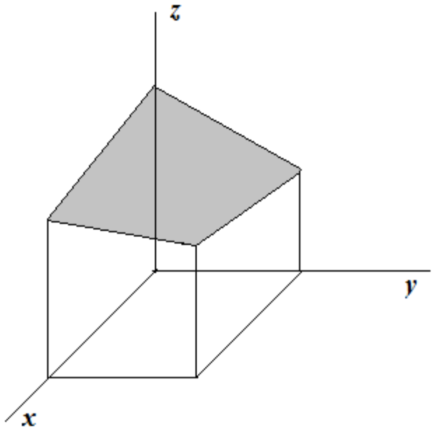

Рис. 1. Пример элементарной области Ω

Разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = 1$ и в области Ω рассмотрим сетку, определяемую системой точек

$$A_{ijl}(x_i, y_j, z_{ijl}) = (x_i, y_j, f_{\tau_l}(x_i, y_j)),\ i = 0, ..., n,\ j = 0, ..., m,\ l = 0, ..., k.$$

Ясно, что все точки $(x_i, y_j, z_{ijl}) \in \overline{\Omega}$. Зафиксируем индексы i, j, l, где $i = 0, ..., n-1$, $j = 0, ..., m-1$, $l = 0, ..., k-1$ и рассмотрим ячейку, задаваемую точками A_{ijl}, A_{i+1jl}, A_{ij+1l}, $A_{i+1j+1l}$, A_{ijl+1}, $A_{i+1jl+1}$, $A_{ij+1l+1}$, $A_{i+1j+1l+1}$. Данная ячейка Ω_{ijl} определяется следующим образом

$$\Omega_{ijl} = \{(x, y, z) : x_i < x < x_{i+1},\ y_j < y < y_{j+1},\ f_{\tau_l}(x, y) < z < f_{\tau_{l+1}}(x, y)\}.$$

В каждой такой подобласти Ω_{ijl} построим триангуляцию, состоящую из шести тетраэдров. Способ выбора этих тетраэдров для параллелепипеда указан в работе [3]. Мы используем ту же схему.

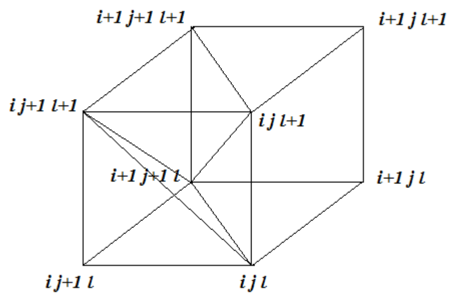

Рис. 2. Схема построения тетраэдров в одной части ячейки Ω_{ijl}

Приведем эти тетраэдры, выписав четыре вершины каждого из них. Итак, полагаем

$$T^1_{ijl} = (A_{ijl}, A_{ij+1l}, A_{ij+1l+1}, A_{i+1j+1l}),\ T^2_{ijl} = (A_{ijl+1}, A_{ij+1l+1}, A_{i+1j+1l+1}, A_{i+1j+1l}),$$

$$T^3_{ijl} = (A_{ijl}, A_{ijl+1}, A_{i+1j+1l}, A_{ij+1l+1}),\ T^4_{ijl} = (A_{ijl}, A_{i+1j+1l}, A_{i+1jl}, A_{i+1jl+1}),$$
$$T^5_{ijl} = (A_{ijl+1}, A_{i+1jl+1}, A_{i+1j+1l+1}, A_{i+1j+1l}),\ T^6_{ijl} = (A_{ijl}, A_{i+1j+1l}, A_{ijl+1}, A_{i+1jl+1}).$$

Пробегая все допустимые значения индексов i, j, l, получим триангуляцию всего множества точек $\{A_{ijl}\}$, $i = 0, ..., n$, $j = 0, ..., m$, $l = 0, ..., k$.

Для формулировки основного результата введем следующие обозначения. Полагаем

$$h^1_x = \min_{0\le i\le n-1}(x_{i+1} - x_i),\ h^2_x = \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1} - x_i),$$
$$h^1_y = \min_{0\le j\le m-1}(y_{j+1} - y_j),\ h^2_y = \max_{0\le j\le m-1}(y_{j+1} - y_j),$$
$$t^1 = \min_{0\le l\le k-1}(\tau_{l+1} - \tau_l),\ t^2 = \max_{0\le l\le k-1}(\tau_{l+1} - \tau_l).$$

Оценка углов будет проводиться одинаково в каждой ячейки Ω_{ijl}. Более того, ее достаточно получить только для тетраэдров $T^1_{ijl}, T^2_{ijl}, T^3_{ijl}$, так как для остальных трех рассуждения будут такими же.

Для начала отметим следующее. Пусть заданы два вектора

$$\vec{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, 1), \vec{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, 1).$$

Тогда синус угла θ между ними удовлетворяет неравенству

$$\sin^2\theta \ge \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}{(1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2)(1 + \alpha_2^2 + \beta_2^2)}. \quad (1)$$

Итак, рассмотрим первый тетраэдр T^1_{ijl}. Его грани лежат на плоскостях, нормали которых равны векторам

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0),\quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0),\quad \vec{v}_3 = \left(\frac{z_{i+1j+1l} - z_{ij+1l}}{x_{i+1} - x_i}, \frac{z_{ij+1l} - z_{ijl}}{y_{j+1} - y_j}, -1\right),$$
$$\vec{v}_4 = \left(\frac{z_{i+1j+1l} - z_{ij+1l+1}}{x_{i+1} - x_i}, \frac{z_{ij+1l+1} - z_{ijl}}{y_{j+1} - y_j}, -1\right).$$

Обозначим углы между соответствующими векторами $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{23}$, θ_{24}, θ_{34}. Тогда, используя оценку (1), получаем для угла θ_{34} неравенство

$$\sin^2\theta_{34} \ge$$
$$\ge \frac{\left(\frac{z_{ij+1l+1} - z_{ij+1l}}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 + \left(\frac{z_{ij+1l+1} - z_{ijl+1}}{y_{j+1} - y_j}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{z_{i+1j+1l} - z_{ij+1l}}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 + \left(\frac{z_{ij+1l} - z_{ijl}}{y_{j+1} - y_j}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{z_{i+1j+1l} - z_{ij+1l+1}}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 + \left(\frac{z_{ij+1l+1} - z_{ijl}}{y_{j+1} - y_j}\right)^2\right)} \ge$$
$$\ge \frac{\left(\frac{t^1}{h^2_x}\right)^2 M_0^2 + L^2}{(1 + 2L^2)\left(1 + \left(L + \frac{t^2}{h^1_x}M_1\right)^2 + \left(L + \frac{t^2}{h^1_y}M_1\right)^2\right)}. \quad (2)$$

Аналогично приходим к нижним оценкам остальных углов

$$\sin^2\theta_{13} \ge \frac{1}{1 + L^2},\quad \sin^2\theta_{14} \ge \frac{1}{1 + \left(\frac{t^2}{h^1_x}M_1 + L\right)^2},\quad \sin^2\theta_{12} = 1,$$

$$\sin^2 \theta_{23} \geq \frac{1}{1+L^2}, \quad \sin^2 \theta_{24} \geq \frac{1}{1+\left(\frac{t^2}{h_y^1}M_1+L\right)^2}.$$

Из углов других тетраэдров отличительными будут углы для граней, находящихся на плоскости, ортогональной вектору $\vec{v}_5 = \left(\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i}, -1, 0\right)$, то есть на диагональной плоскости. Оценка угла θ_{45} между векторами $\vec{v}_4$ и $\vec{v}_5$ будет такой

$$\sin^2 \theta_{45} \geq \frac{1}{1+\left(\frac{t^2}{h_x^1}M_1+L\right)^2+\left(\frac{t^2}{h_y^1}M_1+L\right)^2}.$$

Остальные углы в оставшихся тетраэдрах оцениваются через те же величины. В итоге приходим к утверждению, которое показывает, что при определенных условиях на разбиения отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ при измельчении триангуляции двугранные углы построенных тетраэдров будут отделены от нуля некоторым положительным числом.

Теорема 1. *Для любого двугранного угла* θ *всякого тетраэдра построенной триангуляции выполнено неравенство*

$$\sin^2 \theta \geq \frac{\min\left\{\left(\frac{t^1}{h_x^2}\right)^2 M_0^2+L^2,\ \left(\frac{t^1}{h_y^2}\right)^2 M_0^2+L^2,\ 1+2L^2\right\}}{(1+2L^2)\left(1+\left(\frac{t^2}{h_x^1}M_1+L\right)^2+\left(\frac{t^2}{h_y^1}M_1+L\right)^2\right)}.$$

В частности, если $n=m=k$ *и* $x_i = a+i(b-a)/n$, $y_j = c+j(d-c)/m$, $\tau_l = l/k$, *то*

$$\sin^2 \theta \geq \frac{\min\left\{\left(\frac{M_0}{b-a}\right)^2+L^2, \left(\frac{M_0}{d-c}\right)^2+L^2, 1+2L^2\right\}}{(1+2L^2)(1+(\frac{M_1}{b-a}+L)^2+(\frac{M_1}{d-c}+L)^2)}.$$

Наконец, для куба имеем $\sin^2 \theta \geq 1/3$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-41-02517-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алейников, С. М. Алгоритм генерации сетки в методе граничных элементов для плоских областей / С. М. Алейников, А. А. Седаев // Математическое моделирование. — 1995. — № 7 (7). — С. 81–93.

2. Галанин, М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 009. — 2006. — С. 1–32.

3. Галанин, М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 010. — 2006. — С. 1–32.

4. Клячин, А. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / А. А. Клячин, М. А. Гацунаев // Уфимский математический журнал. — 2014. — № 6 (3). — С. 3–16.

5. Клячин, А. А. Равномерная триангуляция плоских областей / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 15 (2). — С. 43–49.

6. Клячин, В. А. О многомерном аналоге примера Шварца / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2012. — № 76:4. — С. 41–48.

7. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 31–39.

8. Немировский, Ю. В. Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов / Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев // Вычислительные технологии. — 2000. — № 5 (2). — С. 82–91.

9. Скворцов, А. В. Алгоритмы построения триангуляции с ограничениями / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. — 2002. — № 3. — С. 82–92.

10. Скворцов, А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. — 2002. — № 3. — С. 14–39.

REFERENCES

1. Aleynikov S.M., Sedaev A.A. Algoritm generatsii setki v metode granichnykh elementov dlya ploskikh oblastey [Algorithm of mesh formation in the boundary element method for plane domains]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1995, no. 7 (7), pp. 81-93.

2. Galanin M.P., Shcheglov I.A. Razrabotka i realizatsiya algoritmov trekhmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: iteratsionnye metody [Development and implementation of algorithms for three-dimensional triangulation of complex spatial domains: iterative methods]. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha RAN, 009*, 2006, pp. 1-32.

3. Galanin M.P., Shcheglov I.A. Razrabotka i realizatsiya algoritmov trekhmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: pryamye metody [Development and implementation of algorithms for three-dimensional triangulation of complex spatial domains: direct methods]. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha RAN, 010*, 2006, pp. 1-32.

4. Klyachin A.A., Gatsunaev M.A. O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimalnoy poverkhnosti [On uniform convergence of piecewise linear solutions of the minimal surface equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2014, no. 6 (3), pp. 3-16.

5. Klyachin A.A. Ravnomernaya triangulyatsiya ploskikh oblastey [Uniform triangulation of planar domains]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2011, no. 15 (2), pp. 43-49.

6. Klyachin V.A. O mnogomernom analoge primera Shvartsa [A multidimensional analogue of Schwartz example]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2012, no. 76:4, pp. 41-48.

7. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [Delaunay triangulation of multidimensional surfaces and its approximation properties]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 1, pp. 31-39.

8. Nemirovskiy Yu.V., Pyataev S.F. Avtomatizirovannaya triangulyatsiya mnogosvyaznykh oblastey so sgushcheniem i razrezheniem uzlov [Automated triangulation of multiply connected domains with concentration and rarefaction of nodes]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2000, no. 5 (2), pp. 82-91.

9. Skvortsov A.V. Algoritmy postroeniya triangulyatsii s ogranicheniyami [Algorithms for constructing a triangulation with restrictions]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie*, 2002, no. 3, pp. 82-92.

10. Skvortsov A.V. Obzor algoritmov postroeniya triangulyatsii Delone [Review of algorithms for constructing Delaunay triangulation]. *Vychislitelnye metody i programmirovanie*, 2002, no. 3, pp. 14-39.

TRIANGULATION OF SPATIAL ELEMENTARY DOMAINS

Aleksey Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Anzhelika Yuryevna Belenikina

Student, Institute of Mathematics and Information Technologies,
Volgograd State University
matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. We consider a domain $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ that has the form

$$\Omega = \{(x, y, z) : a < x < b,\ c < y < d,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\},$$

where $\varphi(x, y)$ and $\psi(x, y)$ are given functions in rectangle $[a, b] \times [c, d]$ which satisfy Lipschitz condition. Let $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ be a partition of the segment $[a, b]$ and $c = y_0 < y_1 < x_2 < ... < y_m = d$ be a partition of the segment $[c, d]$. We put

$$f_\tau(x, y) = \tau\psi(x, y) + (1 - \tau)\varphi(x, y),\ \tau \in [0, 1].$$

We divide the segment $[0, 1]$ by points $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = 1$ and consider the grid in the domain Ω defined points

$$A_{ijl}(x_i, y_j, z_{ijl}) = (x_i, y_j, f_{\tau_l}(x_i, y_j)),\ i = 0, ..., n,\ j = 0, ..., m,\ l = 0, ..., k.$$

In this paper we built a triangulation of the region Ω of nodes A_{ijl} such that a decrease in the fineness of the partition, and under certain conditions, the dihedral angles are separated from zero to some positive constant.

Key words: triangulation, tetrahedron, dihedral angle, elementary domain, partition of domain, Lipschitz condition.