www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.3.1

УДК 517.956.2
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 25.05.2021
Дата принятия статьи: 01.07.2021

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С КОНЕЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ЭНЕРГИИ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Александр Георгиевич Лосев

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
alexander.losev@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-1072-8375
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Владимир Владимирович Филатов

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
filatov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-9559-6115
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе получены условия существования нетривиальных ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера с конечным интегралом энергии на модельных многообразиях. Также получено условие существования нетривиальных ограниченных решений с конечным интегралом энергии во внешности компакта на произвольных римановых многообразиях.

Ключевые слова: интеграл энергии, стационарное уравнение Шредингера, функция Лиувилля, массивные множества, римановы многообразия.

Введение

Данная работа посвящена получению условий, при которых на модельных римановых многообразиях существуют нетривиальные ограниченные решения стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u - c(x)u = 0 \tag{1}$$

с конечным интегралом энергии

$$\int\limits_M |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx.$$

Здесь M — некомпактное модельное риманово многообразие; $c(x)$ — гладкая неотрицательная на M функция.

Истоки данной тематики восходят к классификационной теории римановых поверхностей. Из теоремы об униформизации следует, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

- сфере (поверхность эллиптического типа);
- плоскости Лобачевского (поверхность гиперболического типа);
- комплексной плоскости (поверхность параболического типа).

Определение эллиптичности типа достаточно просто и заключается в установлении компактности. Значительно большую сложность вызывает задача определения параболичности и гиперболичности типа. Известно, что на всякой поверхности параболического типа любая положительная супергармоническая функция является постоянной. В свою очередь, на поверхности гиперболического типа существуют нетривиальные положительные супергармонические функции. Данное свойство поверхностей параболического типа послужило основой для распространения понятия параболичности на римановы многообразия размерности больше двух. А именно, говорят, что многообразие имеет параболический тип, если на нем всякая положительная супергармоническая функция является тождественной постоянной.

Одним из первых результатов в определении параболичности типа римановых многообразий является теорема С.Я. Ченга и С.Т. Яу [7], которая утверждает, что если на многообразии объем геодезического шара растет не быстрее R^2 при $R \to \infty$, то многообразие имеет параболический тип. При этом отметим, что существуют римановы многообразия параболического типа с произвольным ростом объема геодезического шара.

Высокую эффективность в классификационной теории некомпактных римановых многообразий показала емкостная техника (см., например, [5; 8; 10]). В частности, в работе [3] А.А. Григорьян доказал, что параболичность типа эквивалентна тому, что вариационная емкость всякого (некоторого) компакта равна нулю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить в [8].

Очевидно, что классификационная теория римановых многообразий имеет прямое отношение к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в R^n является тождественной постоянной.

В настоящее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть A — некоторый функциональный класс и L — эллиптический оператор на многообразии M. Говорят, что на M выполнено (A, L) — лиувиллево свойство, если всякое решение уравнения $Lu = 0$ из класса A тривиально.

Ряд работ был посвящен исследованию решений эллиптических уравнений на многообразиях с концами (см.: [6; 10; 11; 13]). Приведем определение многообразия с концами. Пусть M — полное некомпактное риманово многообразие. Говорят, что открытое множество $E \subset M$ является концом, если оно связано, неограничено и его граница ∂E — компакт. Говорят, что M является многообразием с конечным числом концов, если оно представимо в виде объединения компактного множества и конечного числа непересекающихся концов.

В подавляющем большинстве работ разделяют концы параболического и гиперболического типа. Гиперболичность типа конца E эквивалентна существованию нетривиальной гармонической функции v на E такой, что $0 \le v < 1$ и $v|_{\partial E} = 0$. Такую функцию v принято называть емкостным потенциалом E.

Приведем некоторые примеры теорем типа Лиувилля на многообразиях с концами. В [11] доказано, что размерность пространства ограниченных гармонических функций на таких многообразиях не меньше числа концов гиперболического типа, а размерность конуса положительных гармонических функций не меньше числа концов. Позднее в [13] данный результат был несколько уточнен.

Очевидно, что ограничение на структуру многообразий с концами является достаточно жестким. Развивая емкостный подход, А.А. Григорьян в работах [1; 2] ввел понятие массивного множества. Остановимся на этом понятии более подробно.

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие, Ω — открытое собственное подмножество M. Множество Ω называется массивным [2], если на M существует нетривиальная субгармоническая функция $0 \le u \le 1$, удовлетворяющая условию $u = 0$, $x \in M \setminus \Omega$. Если при этом функция u имеет конечный интеграл Дирихле (энергии), то есть $\int\limits_M |\nabla u|^2 dx < \infty$, то Ω называют D-массивным.

С помощью понятия массивных множеств А.А. Григорьян в работе [2] получил оценку размерности пространств ограниченных гармонических функций. А именно, было доказано, что на многообразии M размерность пространства ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом Дирихле) не менее $m \ge 2$ тогда и только тогда, когда в M найдется m попарно непересекающихся массивных (D-массивных) подмножеств.

Ряд работ был посвящен изучению асимптотического поведения решений стационарного уравнения Шредингера (1). В частности, по аналогии с массивными (D-массивными) множествами было введено понятие c-массивного (cD-массивного) множества. В [4; 12] было показано, что на многообразии M размерность пространства ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера (с конечным интегралом Дирихле) не менее $m \ge 1$ тогда и только тогда, когда в M найдется m попарно непересекающихся c-массивных (cD-массивных) подмножеств.

При исследовании свойств решений стационарного уравнения Шредингера в работах [4; 9] применялась функция Лиувилля многообразия. Приведем определение функции Лиувилля, данное в работе [4]. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M, h_k — последовательность решений краевых задач

$$\begin{cases} \Delta h_k - c(x) h_k = 0, x \in B_k, \\ h_k|_{\partial B_k} = 1. \end{cases}$$

Данная последовательность является монотонно убывающей и ограниченной снизу. Функцией Лиувилля многообразия M называют предел $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = h$. Пусть B — предкомпактное открытое множество. Без ограничения общности будем считать, что для любого k выполнено $B \subset B_k$. Предельную функцию u последовательности решений краевых задач

$$\begin{cases} \Delta u_k - c(x)u_k = 0, \\ \quad u_k|_{\partial B} = 1, \\ \quad u_k|_{\partial B_k} = 1 \end{cases}$$

в $B_k \setminus B$ будем называть функцией Лиувилля внешности компакта, или функцией Лиувилля конца.

Очевидно, что в случае уравнения Лапласа функция Лиувилля является тождественной постоянной и, соответственно, имеет конечный интеграл энергии. Однако для уравнения Шредингера (1) вопрос сходимости интеграла энергии функции Лиувилля на произвольных римановых многообразиях оставался открытым. В данной работе приведены примеры, которые показывают, что существуют многообразия, на которых функция Лиувилля имеет конечный интеграл энергии, и также приведены примеры многообразий, на которых она имеет бесконечный интеграл энергии.

Стоит отметить, что свойства массивных и c-массивных множеств (см. [2; 12]) аналогичны. Сформулируем их: пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$ — открытые собственные подмножества M. Справедливы следующие свойства:

- массивные (c-массивные) множества не предкомпактны;
- если Ω_1 — массивно (c-массивно), то и Ω_2 — массивно (c-массивно);
- если $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$ — компакт и Ω_2 массивно (c-массивно), тогда Ω_1 так же массивно (c-массивно).

А.А. Григорьяном в работе [8] доказано, что внешность компакта является массивным множеством тогда и только тогда, когда она является D-массивным множеством. В данной работе получены условия, при которых из c-массивности конца следует его D-массивность.

В работе А.Г. Лосева и Е.А. Мазепы [6] исследованы решения стационарного уравнения Шредингера (1) на модельных римановых многообразиях. Приведем некоторый частный случай данных результатов.

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично прямому произведению $(r_0, +\infty) \times S$, где S — компактное риманово многообразие с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая на $(r_0; +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S. Описанные многообразия называют модельными или сферически симметричными, примерами таких многообразий являются евклидово пространство $(g(r) = r)$, пространство Лобачевского $(g(r) = \operatorname{sh} r)$ и др. Пусть $c(r,\theta) \equiv c(r)$ и $r_0 = \mathrm{const} > 0, n = \dim M$. Введем обозначения:

$$J = \int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^{t} c(z) g^{n-1}(z) dz \right) dt,$$

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^{t} (g^{n-3}(z) dz) \right) dt + J,$$

$$K = \int_{r_0}^{\infty} g^{1-n}(t)dt.$$

Несложно показать, что в области D выполнено в точности одно из условий:

α) $I < \infty$;

β) $I = \infty,\ J < \infty$;

γ) $K = \infty$;

δ) $J = \infty,\ K < \infty$.

Известно следующее утверждение.

Теорема. *[6] Возможны следующие случаи.*

- *Если на D выполнено условие α), то для любых непрерывных на S функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ существует решение уравнения (1) на D такое, что*

$$u(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Phi(\theta).$$

- *Если конец D имеет тип β), тогда для любой непрерывной на S функции $\Psi(\theta)$ и любой константы C на D существует ограниченное решение $u(r,\theta)$ уравнения (1) такое, что*

$$u(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = C.$$

- *Если область D имеет тип γ и удовлетворяет условию*

$$R = \int_{r_0}^{\infty} c(t) g^{n-1}(t)dt = \infty,$$

или имеет тип δ, то для любой непрерывной на S функции $\Psi(\theta)$ существует ограниченное решение $u(r,\theta)$ уравнения (1) такое, что

$$u(r_0, \theta) = \Psi(\theta), \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0.$$

В данной работе показано, что на модельных концах существуют примеры функций Лиувилля как с конечным интегралом энергии, так и с расходящимся.

1. Функция Лиувилля на модельных концах

Пусть $D = (0; +\infty) \times S$, где S — компактное риманово многообразие. Метрика на D имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $g(r)$ — положительная, гладкая на $(0, +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S. Рассмотрим решения стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u - c(r)u = 0$$

на D. Пусть $r_0 = \mathrm{const} > 0, n = \dim D$.

Лемма 1. *Если на произвольном римановом многообразии M выполнено*

$$\int\limits_M c(x)dx < \infty,$$

то функция Лиувилля имеет конечный интеграл энергии.

Доказательство. Пусть $\{B_k\}$ — гладкое исчерпание M и h_k — последовательность решений краевых задач

$$\begin{cases} \Delta h_k - c(x)h_k = 0, x \in B_k, \\ h_k|_{\partial B_k} = 1. \end{cases}$$

В силу принципа Дирихле (см. [12]) имеем

$$\int\limits_{B_k} |\nabla h_k|^2 + c(x)h_k^2 dx \leq \int\limits_{B_k} c(x)dx.$$

И следовательно,

$$\int\limits_{B_k} |\nabla h_k|^2 + c(x)h_k^2 dx \leq \int\limits_{B_k} c(x)dx \leq \int\limits_M c(x)dx < \infty.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ получаем нужное. Лемма доказана.

Пусть M — произвольное риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — открытое множество и K — компакт в Ω. Пару (K, Ω) будем называть конденсатором и определять емкость конденсатора как

$$\operatorname{cap}(K, \Omega) = \inf_{\phi \in L(K,\Omega)} \int_\Omega \left(|\nabla \phi|^2 + c(x)\phi^2\right) dx,$$

где $L(K, \Omega)$ — множество локально липшицевых функций ϕ на M с компактным носителем в $\overline{\Omega}$, таких, что $0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi|_K = 1$. Пусть $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ — исчерпание M. Емкость компакта K будем определять следующим образом:

$$\operatorname{cap}(K) := \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}(\overline{K}, \Omega_k). \tag{2}$$

С помощью принципа Дирихле [12] получаем, что точная нижняя грань в определении емкости достигается на следующей функции u, которая является решением задачи Дирихле в $\Omega \setminus K$:

$$\begin{cases} \Delta u - c(x)u = 0, \\ u|_{\partial K} = 1, \\ u|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

И как следствие,

$$\operatorname{cap}(K, \Omega) = \int\limits_{\Omega\setminus K} \left(|\nabla u|^2 + c(x)u^2\right) dx.$$

Такую функцию u будем называть внутренним потенциалом конденсатора (K, Ω).

Используя формулу Грина

$$\int_B |\nabla u|^2 dx = -\int_B u\Delta u dx + \int_{\partial B} u\frac{\partial u}{\partial n} d\mu,$$

получаем

$$\operatorname{cap}(K,\Omega) = \int_{\Omega\setminus K} \left(c(x)u^2 - u\Delta u\right) dx + \int_{\partial K\cup\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} d\mu.$$

Учитывая, что $\Delta u - c(x)u = 0$, $u|_{\partial K} = 1$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, имеем

$$\operatorname{cap}(K,\Omega) = \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} d\mu.$$

Лемма 2. *Если на M внешность компакта B является c-массивным множеством, то на $\Omega = M\setminus B$ существует нетривиальное ограниченное решение уравнения* (1) *с конечным интегралом энергии*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)u^2 dx < \infty.$$

Доказательство. Пусть Ω — массивное множество. $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — гладкое исчерпание M. Пусть s_k — решение следующих задач Дирихле в $B_k \cap \Omega$

$$\begin{cases} \Delta s_k - c(x)s_k = 0, \quad x \in B_k\cap\Omega, \\ s_k|_{\partial\Omega} = 1, \\ s_k|_{\partial B_k} = 0. \end{cases}$$

Начиная с некоторого номера k, функции s_k будут внутренними потенциалами конденсаторов (B, B_k). Следовательно,

$$\operatorname{cap}(B,B_k) = \int_{B_k\setminus B} \left(|\nabla s_k|^2 + c(x)s_k^2\right) dx = \int_{\partial B} \frac{\partial s_k}{\partial n} d\mu.$$

Последовательность s_k является возрастающей и сходящейся к предельной функции s_Ω. Учитывая равномерную ограниченность данной последовательности, получаем ее компактность в классе $C^{2,\alpha}(B)$. Следовательно, все производные s_k сходятся равномерно к производным s_Ω. Значит,

$$\operatorname{cap}(B) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial s_\Omega}{\partial n} d\mu.$$

Применяя лемму Фату, имеем следующее:

$$\int_M |\nabla s_\Omega|^2 + c(x)s_\Omega^2 dx \le \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} |\nabla s_k|^2 + c(x)s_k^2 dx = \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}(B,B_k) = \operatorname{cap}(B).$$

Следовательно, s_Ω имеет конечный интеграл Дирихле и является нетривиальным ограниченным решением уравнения (1) на $M\setminus B$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если на D выполнено одно из условий:
μ) $R < \infty$;
η) $R = \infty$, $K = \infty$;
ξ) $J = \infty$, $K < \infty$,
то функция Лиувилля конца D имеет конечный интеграл энергии.

2) Если в области D выполнено одно из условий:
ω) $R = \infty$, $I < \infty$;
ρ) $R = \infty$, $I = \infty$, $J < \infty$,
то функция Лиувилля конца D имеет расходящийся интеграл энергии.

Доказательство. 1) μ) Пусть $R < \infty$. Так как в рассматриваемом случае $c(x) \equiv c(r)$, $D = (0, \infty) \times S$ и якобиан равен $g^{n-1}(r)$, то в силу леммы 1 получаем сходимость интеграла энергии функции Лиувилля конца D.

Рассмотрим одновременно случаи η) и ξ). В этих случаях для функции Лиувилля $h(r,\theta)$ конца D выполнено $\lim\limits_{r\to\infty} h(r,\theta) = 0$.

Пусть $\{r_n\}$, $r_n > r_0$ — возрастающая числовая последовательность, такая, что $r_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. И s_n решение следующей задачи Дирихле в $(r_0, r_n) \times S$,

$$\begin{cases} \Delta s_n - c(r) s_n = 0, \\ s_n(r_0, \theta) = 1, \\ s_n(r_n, \theta) = 0. \end{cases}$$

Данная последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(r,\theta) = s(r,\theta)$. Напомним, что $h(r,\theta)$ является предельной функцией для последовательности функций $\{h_n\}$, таких, что

$$\begin{cases} \Delta h_n - c(r) h_n = 0, \\ h_n(r_0, \theta) = 1, \\ s_n(r_n, \theta) = 1. \end{cases}$$

В силу принципа сравнения получаем, что $h_n(r,\theta) \geq s_n(r,\theta)$ и, следовательно, $h(r,\theta) \geq$ $\geq s(r,\theta) \geq 0$.

Так как $\lim\limits_{r\to\infty} h(r,\theta) = 0$, то $\lim\limits_{r\to\infty} s(r,\theta) = 0$. Рассмотрим функцию $u = h - s$, для нее выполнено $\Delta u - c(x) u = 0$, $u(r_0,\theta) = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0$. С помощью принципа максимума получаем, что $u \equiv 0$ и, как следствие, $s \equiv h$. С помощью леммы 2 получаем сходимость интеграла энергии от функции s и сходимость интеграла энергии функции h.

2) Рассмотрим одновременно случаи ω) и ρ). При таких условиях в работе А.Г Лосева и Е.А. Мазепы [6] доказано, что на D существует $h(r,\theta)$, такое, что $h(r_0,\theta) = 1$ и $\lim\limits_{r\to\infty} h(r,\theta) = 1$. Пусть $\{w_k\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S)$ из собственных функций оператора Δ_θ, а λ_k — соответствующие собственные числа. Представим $h(r,\theta)$ рядом Фурье по собственным функциям оператора Δ_θ. Для любого r имеем

$$h(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$

где
$$v_k(r) = \int\limits_S h(r,\theta)w_k(\theta)d\theta, \qquad \Delta_\theta w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0.$$
Также в работе [6] доказано, что v_k удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$v_k''(r) + (n-1)\frac{g'(r)}{g(r)}v_k'(r) - \left[\frac{\lambda_k}{g^2(r)} + c(r)\right]v_k(r) = 0,$$
а $v_0(r)$ удовлетворяет следующему уравнению
$$v_0'(r) = g^{1-n}(r)\left(\int\limits_{r_0}^{r} c(t)g^{n-1}(t)v_0(t)dt + v_0'(r_0)g^{n-1}(r_0)\right). \tag{3}$$

Пусть $\{r_n\}$ — числовая последовательность, такая, что $r_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Функция $h(r,\theta)$ является предельной для функциональной последовательности $\{h_n(r,\theta)\}$, такой, что $\Delta h_n - c(r)h_n = 0$, $h_n(r_0,\theta) = 1$, $h_n(r_k,\theta) = 1$. Заметим, что h_n представимо в виде
$$h_n(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^n(r)w_k(\theta),$$
где
$$v_k^n(r) = \int\limits_S h_n(r,\theta)w_k(\theta)d\theta.$$
Учитывая, что константа является собственной функцией, то $v_k^n(r) \equiv 0$ при всех $k \geq 1$. Как следствие, получаем
$$h(r,\theta) = v_0(r)w_0.$$

Рассмотрим интеграл энергии функции h
$$E(D,h) = \int\limits_D |\nabla h|^2 + c(r)h^2dx.$$
Так как $D = (0,\infty)\times S$ и якобиан равен $g^{n-1}(r)$, то
$$E(D,h) = \int\limits_{r_0}^{\infty} dr \int\limits_S \left((v_0'(r))^2w_0^2 + c(r)v_0^2(r)w_0^2\right)g^{n-1}(r)d\theta =$$
$$= \int\limits_{r_0}^{\infty}\left((v_0'(r))^2 + c(r)v_0^2(r)\right)g^{n-1}(r)dr \geq \int\limits_0^{\infty} c(r)v_0^2(r)g^{n-1}(r)dr.$$
Учитывая, что существует $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = 1$, то $\exists r^* > 0$, такая, что $\forall r \geq r^*$ выполнено $v(r) \geq \frac{1}{2}$. Следовательно,
$$\int\limits_{r_0}^{\infty} c(r)v_0^2(r)g^{n-1}(r)dr \geq \int\limits_{r_0}^{r^*} c(r)v_0^2(r)g^{n-1}(r)dr + \frac{1}{4}\int\limits_{r^*}^{\infty} c(r)g^{n-1}(r)dr.$$

Последний интеграл расходится по предложение теоремы, получаем расходимость интеграла энергии от h.

Теорема доказана.

Теорема 2. *На произвольном римановом многообразии M из сходимости интеграла энергии от функции Лиувилля внешности компакта (функция Лиувилля конца) следует сходимость интеграла энергии функции Лиувилля.*

Доказательство. Пусть B — компакт, и $\{B_k\}$ — гладкое исчерпание M, без ограничения общности. Можем считать, что $B \subset B_k$ для любого k. Пусть u_k — решения следующих задач Дирихле в $B_k \setminus B$

$$\begin{cases} \Delta u_k - c(x)u_k = 0, \\ u_k|_{\partial B} = 1, \\ u_k|_{\partial B_k} = 1. \end{cases}$$

И h_k — решения следующих задач Дирихле в B_k

$$\begin{cases} \Delta h_k - c(x)h_k = 0, \\ h_k|_{\partial B_k} = 1. \end{cases}$$

Для функций h_k и u_k выполнены следующие оценки

$$u_k|_{\partial B} = 1 \geq h_k|_{\partial B}, \qquad u_k|_{\partial B_k} = h_k|_{\partial B_k}.$$

Следовательно, с помощью принципа сравнения мы получаем, что $u_k \geq h_k$ в $B_k \setminus B$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится формула Грина. Для любых функций $u, v \in C^2(\overline{B})$ справедливо равенство

$$\int\limits_B \nabla u \nabla v + u \Delta v dx = \int\limits_{\partial B} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\mu.$$

Рассмотрим интеграл энергии функций u_k.

$$D(B_k \setminus B, u_k) = \int\limits_{B_k \setminus B} |\nabla u_k|^2 + c(x)u_k^2 dx = \int\limits_{B_k \setminus B} c(x)u_k^2 - u_k \Delta u_k dx + \int\limits_{\partial(B_k \setminus B)} u_k \frac{\partial u_k}{\partial \nu} d\mu.$$

Так как функция u_k является решением уравнения (1) в $B_k \setminus B$, то

$$D(B_k \setminus B, u_k) = \int\limits_{\partial(B_k \setminus B)} u_k \frac{\partial u_k}{\partial \nu} d\mu \geq \int\limits_{\partial(B_k \setminus B)} h_k \frac{\partial u_k}{\partial \nu} d\mu = \int\limits_{B_k \setminus B} \nabla h_k \nabla u_k + h_k \Delta u_k dx =$$

$$= \int\limits_{B_k \setminus B} \nabla h_k \nabla u_k + h_k c(x) u_k dx.$$

Учитывая, что $\Delta h_k = c(x)h_k$, получаем

$$\int\limits_{B_k \setminus B} \nabla h_k \nabla u_k + h_k c(x) u_k dx = \int\limits_{B_k \setminus B} \nabla h_k \nabla u_k + u_k \Delta h_k dx =$$

$$= \int\limits_{\partial(B_k \setminus B)} u_k \frac{\partial h_k}{\partial \nu} d\mu \geq \int\limits_{\partial(B_k \setminus B)} h_k \frac{\partial h_k}{\partial \nu} d\mu =$$

$$= \int\limits_{B_k \setminus B} |\nabla h_k|^2 + h_k \Delta h_k dx = \int\limits_{B_k \setminus B} |\nabla h_k|^2 + c(x) h_k^2 dx = D(B_k \setminus B, h_k).$$

На основании полученной оценки мы заключаем, что если $D(M, u) < \infty$, то $D(M, h) < \infty$.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90110.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. О лиувиллевых теоремах для гармонических функций с конечным интегралом Дирихле / А. А. Григорьян // Матем. сб. — 1987. — Т. 132, № 4. — С. 496–516.

2. Григорьян, А. А. О размерности пространств гармонических функций / А. А. Григорьян // Матем. заметки. — 1990. — Т. 48, № 5. — С. 55–61.

3. Григорьян, А. А. О существовании положительных фундаментальных решений уравнения Лапласа на римановых многообразиях / А. А. Григорьян // Матем. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 3 (11). — С. 354–363.

4. Григорьян, А. А. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / А. А. Григорьян, А. Г. Лосев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 34–42. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3.

5. Кесельман, В. М. Понятие и критерии емкостного типа некомпактного риманова многообразия на основе обобщенной емкости / В. М. Кесельман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 21–32. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.2.

6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Матем. — 1999. — Т. 43, № 6. — С. 39–47.

7. Cheng, S. Y. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications / S. Y. Cheng, S. T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 3. — P. 333–354. — DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303.

8. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 36. — P. 135–249.

9. Grigor'yan, A. A Liouville property for Schrödinger operators / A. Grigor'yan, W. Hansen // Mathematische Annalen. — 1998. — Vol. 312. — P. 659–716. — DOI: https://doi.org/10.1007/s002080050241.

10. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische Zeitshrift. — 2012. — Vol. 272. — P. 459–472.

11. Li, P. Harmonic functions and the structure of complete manifolds / P. Li, L. Tam // J. Differential Geom. — 1992. — Vol. 35, № 2. — P. 359–383.

12. Losev, A. G. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds / A. G. Losev, V. V. Filatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40. — P. 1363–1370. — DOI:

https://doi.org/10.1134/S1995080219090142.

13. Sung, C. Spaces of Harmonic Functions / C. Sung, L. Tam, J. Wang // Journal of the London Mathematical Society. — 2000. — Vol. 61, № 3. — P. 789–806.

REFERENCES

1. Grigoryan A.A. O liuvillevykh teoremakh dlya garmonicheskikh funktsiy s konechnym integralom Dirikhle [On Liouville Theorems for Harmonic Functions with Finite Dirichlet Integral]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1987, vol. 132, no. 4, pp. 496-516.

2. Grigoryan A.A. O razmernosti prostranstv garmonicheskikh funktsiy [Dimension of Spaces of Harmonic Functions]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1990, vol. 48, no. 5, pp. 55-61.

3. Grigoryan A.A. O sushchestvovanii polozhitelnykh fundamentalnykh resheniy uravneniya Laplasa na rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Existence of Positive Fundamental Solutions of the Laplace Equation on Riemannian Manifolds]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1985, vol. 128 (170), no. 3 (11), pp. 354-363.

4. Grigoryan A.A., Losev A.G. O razmernosti prostranstv resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Dimension of Spaces of Solutions of the Schrödinger Equation on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 3, pp. 34-42. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3.

5. Keselman V.M. Ponyatie i kriterii emkostnogo tipa nekompaktnogo rimanova mnogoobraziya na osnove obobshchennoy emkosti [The Concept and Criteria of the Capacitive Type of the Non-Compact Riemannian Manifold Based on the Generalized Capacity]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2019, vol. 22, no. 2, pp. 21-32. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.2.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Certain Elliptic Type Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Mathematics], 1999, vol. 43, no. 6, pp. 39-47.

7. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 3, pp. 333-354. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303.

8. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 36, pp. 135-249.

9. Grigor'yan A., Hansen W. A Liouville Property for Schrödinger Operators. *Mathematische Annalen*, 1998, vol. 312, pp. 659-716. DOI: https://doi.org/10.1007/s002080050241.

10. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematische Zeitshrift*, 2012, vol. 272, pp. 459-472.

11. Li P., Tam L. Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds. *J. Differential Geom.*, 1992, vol. 35, no. 2, pp. 359-383.

12. Losev A.G., Filatov V.V. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, pp. 1363-1370. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080219090142.

13. Sung C., Tam L., Wang J. Spaces of Harmonic Functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 2000, vol. 61, no. 3, pp. 789-806.

BOUNDED SOLUTIONS OF THE STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH FINITE ENERGY INTEGRAL ON MODEL MANIFOLDS

Alexander G. Losev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
alexander.losev@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-1072-8375
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Vladimir V. Filatov

Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
filatov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-9559-6115
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Conditions for the existence of nontrivial bounded solutions of the stationary Schrodinger equation with a finite energy integral on model varieties are obtained. A condition for the existence of nontrivial bounded solutions with a finite integral of energy in the exterior of a compactum on arbitrary Riemannian manifolds is also obtained. Let $D = (0; +\infty) \times S$, where S is compact Riemannian manifold. Metrics on D is following

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) d\theta^2.$$

Where $g(r)$ is positive, smooth on $(0, +\infty)$ function, $d\theta^2$ is metrics on S. We will study solutions of the stationary Schrodinger equation

$$\Delta u - c(r)u = 0$$

on D. Let $r_0 = \text{const} > 0, n = \dim D$.

Theorem 1.

1) If one of the following conditions is fulfilled on D:
   μ) $R < \infty$;
   η) $R = \infty$, $K = \infty$;
   ξ) $J = \infty$, $K < \infty$
   then the Liouville function of the end D has a finite energy integral.
2) If one of the conditions
   ω) $R = \infty$, $I < \infty$;
   ρ) $R = \infty$, $I = \infty$, $J < \infty$
   then The Liouville Function of end D has a divergent energy integral.

Theorem 2. On an arbitrary Riemannian manifold M, the convergence of the energy integral of the Liouville function of the exterior of the compact (Liouville function of the end) implies the convergence of the energy integral of the Liouville function.

Key words: energy integral, stationary Schrödinger equation, Liouville function, massive sets, Riemannian manifolds.