



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.3>



УДК 517.5+514.174

Дата поступления статьи: 07.06.2021

ББК 22.15+22.16

Дата принятия статьи: 01.11.2021

О СОХРАНЕНИИ ОТНОШЕНИЯ СМЕЖНОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Александр Юрьевич Игумнов

Кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры информатики
и технологии программирования,

Волжский политехнический институт (филиал)

Волгоградского государственного технического университета

IAJu1965@mail.ru

ул. Энгельса, 42а, 404121 г. Волжский, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе предлагается количественная характеристика отношения смежности двух треугольников, представляющая собой расстояние ρ в пространстве 4-точечных семейств от семейства X , определяемого данной парой смежных треугольников, до множества \mathcal{U}^* семейств, определяемых всевозможными парами несмежных треугольников (с общей стороной). Такая характеристика представляет собой локальный достаточный признак отсутствия захлеста сетки при квазиизометрическом отображении и может быть применена для составления триангуляции заданной области как образа некоторой эталонной триангулированной области. Для вычисления величины $\rho(X, \mathcal{U}^*)$ требуется конструктивно указать в \mathcal{U}^* некоторое подмножество, расстояние от X до которого равно $\rho(X, \mathcal{U}^*)$. Это требует, в свою очередь, разбиения множества \mathcal{U}^* на 15 классов и исследования каждого из них на предмет исключения «лишних» семейств и описания оставшихся. Ввиду большого объема полного исследования в статье дано исследование только трех классов из указанных 15-ти. Два из них являются «узловыми» в общей схеме исследования, на примере третьего показан комбинаторный характер задачи.

Ключевые слова: захлест сетки, качество сетки, смежные треугольники, расстояние между семействами точек, триангуляция.

Введение

В настоящей статье рассматривается задача количественного выражения степени устойчивости отношения смежности двух треугольников при квазиизометрическом отображении. Подобная мера является одной из характеристик качества сетки (отсутствие захлеста). С краткой сводкой критериев качества сетки можно ознакомиться по работе [10]. С конкретным применением критерия качества сетки при генерации тетраэдральной сетки можно ознакомиться по работе [3]. Смежный вопрос — сохранение ориентации симплекса при отображениях определенного вида — рассматривается в классической работе [1], а также, например, в работах [2; 6; 7], [9, раздел 5.2].

Под мерой устойчивости отношения смежности понимается следующее. Пусть $T_1 = ABC_1$ и $T_2 = ABC_2$ — треугольники на плоскости, смежные относительно стороны AB ; f — квазиизометрическое отображение, заданное на их вершинах:

$$l|x' - x''| \leq |f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in \{A, B, C_1, C_2\}.$$

Очевидно, при $l = L$ (случай изометрического отображения) треугольники $f(T_1) = f(A)f(B)f(C_1)$ и $f(T_2) = f(A)f(B)f(C_2)$ также будут смежны. При $l < L$ наличие/отсутствие смежности у треугольников $f(T_1)$ и $f(T_2)$ определяется как степенью различия величин l и L , так и «видом в целом» каждого из треугольников T_1 и T_2 . Например, если один из треугольников близок к вырожденному, то уже при незначительном отличии l и L треугольники $f(T_1)$ и $f(T_2)$ могут оказаться несмежными. Задача заключается в определении (получении) условий на l и L , при которых для данной пары смежных треугольников T_1 и T_2 гарантируется смежность треугольников $f(T_1)$ и $f(T_2)$.

Предлагаемая схема решения следующая. Вершины треугольников T_1 и T_2 определенным образом нумеруются. Полученный набор s нумерованных точек будем называть семейством точек. В пространстве S семейств точек можно задать расстояние ρ , инвариантное относительно изометрических преобразований [4]. Под действием отображения f семейство точек s смещается в S на некоторое расстояние, которое можно оценить через величины l и L [4, теорема 1]: $\rho(s, f(s)) \leq \log L/l$. Далее, в S выделяется «запретное» множество \mathcal{Z} — множество семейств, соответствующих парам несмежных треугольников (с общей стороной). Сохранение отношения смежности будет обеспечено, если $f(s) \notin \mathcal{Z}$. Достаточный признак может быть записан как правая часть следующего двойного неравенства: $\rho(s, f(s)) \leq \log L/l < \rho(s, \mathcal{Z})$.

Для вычисления $\rho(s, \mathcal{Z})$ множество \mathcal{Z} разбивается на некие классы семейств $\Xi_p^q(s)$, $2 \leq p + q \leq 6$ (см. далее), каждый из которых должен быть исследован на предмет исключения из него семейств Y , для которых удастся найти $\tilde{Y} \in \mathcal{Z}$, такое что $\rho(X, \tilde{Y}) < \rho(X, Y)$, и на предмет описания оставшихся семейств (в частности, множество таких может быть пустым или конечным). В данной работе исследованы только классы Ξ_1^1 , Ξ_1^2 , Ξ_1^3 . Исследование имеет в основном комбинаторный характер.

1. Предварительные сведения

Следуя [4], дадим необходимые определения и изложим схему исследования.

Отображение $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $I = \{1, \dots, k\}$, будем называть семейством точек или k -точечным семейством в \mathbb{R}^n . Точки $F(1), \dots, F(k)$ будем называть значениями семейства F , а также точками семейства F . Семейства F, G ортогонально эквивалентны, если их значения совмещаются некоторым ортогональным преобразованием. На

множестве классов ортогонально эквивалентных семейств можно ввести метрику, определяемую следующим образом. Пусть F, G — представители классов эквивалентности. Полагаем

$$\mathcal{A}(F, G) = \left\{ \frac{|G(i)G(j)|}{|F(i)F(j)|}, (i, j) : 1 \leq i < j \leq k, |F(i)F(j)| + |G(i)G(j)| > 0 \right\}.$$

Здесь $|\dots|$ — евклидова длина отрезка, значение дроби с нулевым знаменателем равно $+\infty$. Положим

$$\rho(F, G) = \begin{cases} 0, & \text{если для всех } i, j \quad |F(i)F(j)| = |G(i)G(j)| = 0; \\ \log \frac{\max \mathcal{A}(F, G)}{\min \mathcal{A}(F, G)}, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (1)$$

полагая, что основание логарифма больше единицы, $\frac{a}{0} = +\infty, \log(+\infty) = +\infty$. Геометрический смысл величины (1) — евклидова длина отрезка $\min \mathcal{A}(F, G) \max \mathcal{A}(F, G)$, отложенного на логарифмической шкале. Для упрощения обозначений и терминологии мы отождествляем обозначение класса эквивалентности и его представителя, и величину (1) будем называть расстоянием между семействами F, G . Везде далее полагаем, что основание логарифма в правой части выражения (1), указанного явно, и основание логарифма, подразумеваемого обозначением $\rho(F, G)$, одно и то же.

Табличное задание отображения F будем записывать как $F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & k \\ F(1) & F(2) & \dots & F(k) \end{matrix} \right\}$ и подобным же образом с неявной нумерацией столбцов, то есть указанием буквенных индексов вместо конкретных числовых значений. Отрезок в \mathbb{R}^n , определяемый точками $F(i), F(j)$, будем обозначать $F(i)F(j)$ и называть отрезком $F(i)F(j)$ семейства F . Концы отрезка будем называть также вершинами отрезка.

Следуя [4], дадим описание схемы нахождения в множестве \mathcal{Y} семейств, ближайших к заданному семейству, несколько ее конкретизировав. Пусть X — четырехточечное семейство с попарно различными значениями, \mathcal{Y} — некоторое множество четырехточечных семейств. Семейство X порождает разбиение множества \mathcal{Y} на классы $\Xi_p^q(X)$, определяемые следующим образом. Полагаем $Y \in \Xi_p^q(X)$ если числовой набор $\mathcal{A}(X, Y)$ содержит ровно p минимальных и ровно q максимальных значений. Для наглядности выкладок отрезки $Y(i)Y(j)$ семейства Y , для которых величина $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ минимальна, будем представлять окрашенными в синий цвет и называть синими; отрезки $Y(i)Y(j)$ семейства Y , для которых величина $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ максимальна, будем представлять окрашенными в красный цвет и называть красными; остальные отрезки семейства будем представлять окрашенными в черный цвет и называть черными.

Заметим, что любую наперед выбранную величину $\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}$ из числового набора $\mathcal{A}(X, Y)$ можно полагать равной 1 (или несколько величин, если их значения совпадают), применив к Y преобразование подобия с коэффициентом, обратным этой величине.

Величины числового набора $\mathcal{A}(X, Y)$ будем изображать точками на логарифмической шкале, полагая их окрашенными в те же цвета, что и соответствующие отрезки $Y(i)Y(j)$. При этом черные точки изображать не будем. Самую левую точку, определяемую набором $\mathcal{A}(X, Y)$, будем обозначать m , самую правую — M , значения p и q будем называть кратностями соответствующих концов отрезка mM . Семейства Y будем условно изображать как прямоугольники с диагоналями.

Вершины прямоугольника представляют собой значения семейства; стороны и диагонали — отрезки семейства, при этом элементы прямоугольника, соответствующие черным отрезкам, могут быть опущены. Каждый класс $\Xi_p^q(X)$ исследуется на предмет возможности указать для семейства $Y \in \Xi_p^q(X)$ семейство Y' такое что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$. Семейство Y' ищется посредством смещения каким-либо образом одной из точек семейства Y с целью укоротить его красные отрезки и/или удлинить синие. Такое смещение (если оно возможно) приводит к изменению положения цветных точек на логарифмической шкале, в результате чего либо отрезок mM укоротится, либо изменится (уменьшится) кратность его концов. В последнем случае получившееся семейство — Y^* — исследуется на предмет наличия семейства Y' , расположенного ближе к X , чем семейство Y^* . За смещенными концевыми точками отрезка mM будем сохранять их прежнюю раскраску. Смещение точки семейства полагаем настолько малым, что черные отрезки семейства остаются черными, при этом черные точки на шкале не изображаются.

Изменение длины отрезка mM (или кратностей его концов) будем отслеживать посредством двух логарифмических шкал, расположенных одна под другой: на верхней, обозначенной символом Y , будем указывать величины m, M с учетом кратности, соответствующие исходному семейству Y ; на нижней (обозначенной символом Y' или Y^*) — результат модификации отрезка mM в результате смещения некоторой точки семейства. Шкалы выровнены по начальному положению величин m, M .

Направление смещения точки исследуемого семейства Y будем указывать посредством следующей конструкции. Пусть $A, B, C \in \Pi$ — точки на плоскости Π . Обозначим внешность и внутренность круга с центром A радиуса $|AC|$ следующим образом:

$$r_A^+(C) = \{C' \in \Pi : |AC'| > |AC|\}, \quad r_A^-(C) = \{C' \in \Pi : |AC'| < |AC|\}.$$

Аналогично:

$$r_B^+(C) = \{C' \in \Pi : |BC'| > |BC|\}, \quad r_B^-(C) = \{C' \in \Pi : |BC'| < |BC|\}.$$

Введем обозначения для попарных пересечений внутренностей/внешностей кругов с центрами в точках A и B :

$$r_{AB}^{++}(C) = r_A^+(C) \cap r_B^+(C), \quad r_{AB}^{+-}(C) = r_A^+(C) \cap r_B^-(C); \quad (2)$$

$$r_{AB}^{-+}(C) = r_A^-(C) \cap r_B^+(C), \quad r_{AB}^{--}(C) = r_A^-(C) \cap r_B^-(C). \quad (3)$$

Примем как геометрически очевидные следующие утверждения.

1. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то каждое из множеств $r_{AB}^{++}(C), r_{AB}^{+-}(C), r_{AB}^{-+}(C), r_{AB}^{--}(C)$ непусто (рис. 1а, 1б).
2. Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой m . Обозначим I — объединение отрезков AB, BC и AC .

- Если C — внутренняя точка отрезка I , то множество $r_{AB}^{--}(C)$ пусто, множество $r_{AB}^{-+}(C)$ непусто, множество $r_{AB}^{+-}(C)$ непусто, множество $r_{AB}^{++}(C)$ непусто (рис. 2а). А также: множество $r_{AB}^{--}(C) \cap m$ пусто, множество $r_{AB}^{-+}(C) \cap m$ непусто, множество $r_{AB}^{+-}(C) \cap m$ непусто, множество $r_{AB}^{++}(C) \cap m$ непусто (рис. 2а).
- Если C — концевая точка отрезка I , то:

- 2.1. Если A — концевая точка отрезка I , то справедливо:
 $r_{AB}^{\bar{-}}(C) = r_B^{\bar{-}}(C)$ непусто, $r_{AB}^{\bar{+}}(C)$ непусто, $r_{AB}^{+-}(C)$ пусто, $r_{AB}^{++}(C) = r_A^{++}(C)$ непусто;
 $r_{AB}^{\bar{-}}(C) \cap m$ непусто, $r_{AB}^{\bar{+}}(C) \cap m$ пусто, $r_{AB}^{+-}(C) \cap m$ пусто, $r_{AB}^{++}(C) \cap m$ непусто (рис. 2б)).
- 2.2. Если B — концевая точка отрезка I , то справедливо:
 $r_{AB}^{\bar{-}}(C) = r_A^{\bar{-}}(C)$ непусто, $r_{AB}^{\bar{+}}(C)$ непусто, $r_{AB}^{+-}(C)$ пусто, $r_{AB}^{++}(C) = r_B^{++}(C)$ пусто;
 $r_{AB}^{\bar{-}}(C) \cap m$ непусто, $r_{AB}^{\bar{+}}(C) \cap m$ непусто, $r_{AB}^{+-}(C) \cap m$ пусто, $r_{AB}^{++}(C) \cap m$ пусто (аналогично).

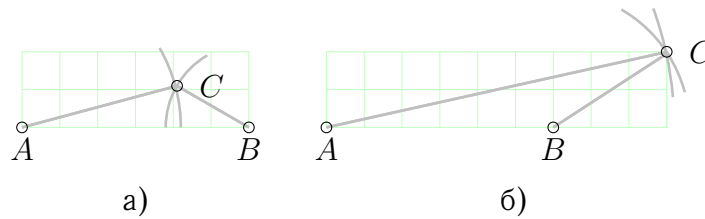


Рис. 1. Направления смещения точки C в семействе Y в случае, если A, B, C не лежат на одной прямой

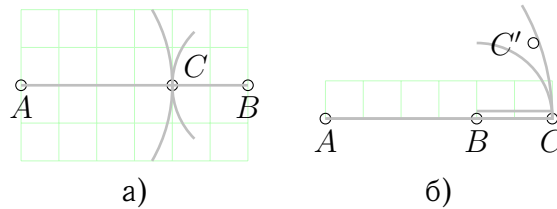


Рис. 2. Направления смещения точки C в семействе Y в случае, если A, B, C лежат на одной прямой

Пример. Запись вида $C' \in r_{AB}^{+-}(C)$ означает, что смещаемой точкой является точка C , ее обозначение после смещения — C' , в результате смещения отрезок AC удлинился, а отрезок BC укоротился.

На случай одноцветной печати введем дублирование цветовых обозначений точек и отрезков их размером и толщиной: изображение синей точки на шкале — \bullet ; изображение красной точки на шкале — \blacksquare ; изображение синего отрезка — — ; изображение красного отрезка — — . Помимо сказанного, значения семейства будем изображать бесцветными точками — \circ . На некоторых рисунках, где отрезки семейства параллельны и разнесены, в качестве изображения точки семейства применяется «растянутая» точка — \circ .

Далее в обозначениях классов $\Xi_p^q(X)$, а также других, вводимых в рассмотрение в

ходе исследования, указание на семейство X будем опускать.

Опишем теперь, каким образом учитывается в преобразуемых семействах сохранение несмежности определенной пары треугольников. Обозначим \mathcal{Y}^* — класс таких семейств Y , в которых треугольники $Y(1)Y(2)Y(3)$ и $Y(1)Y(2)Y(4)$ не являются смежными. Класс \mathcal{Y}^* является объединением следующих классов семейств:

- \mathcal{Y}_0^* — семейства, точки $Y(3), Y(4)$ которых расположены по одну сторону прямой $Y(1)Y(2)$;
- \mathcal{Y}_1^* — семейства, в которых ровно одна из точек $Y(3), Y(4)$ расположена на прямой $Y(1)Y(2)$;
- \mathcal{Y}_2^* — семейства, в которых обе точки $Y(3), Y(4)$ расположены на прямой $Y(1)Y(2)$; то есть все четыре точки семейства лежат на одной прямой.

Имеем: класс \mathcal{Y}_q^* состоит из таких семейств класса \mathcal{Y}^* , в которых количество точек — помимо $Y(1), Y(2)$ — лежащих на прямой $Y(1)Y(2)$, равно q . Для обозначения того факта, что q может принимать ровно одно значение из перечисляемых будем использовать запись вида $q = 0 : 1 : 2$ (то есть двоеточие имеет значение «исключающее или»).

Обозначив \tilde{Y} результат преобразования семейства Y , само преобразование будем обозначать как $Y \rightarrow \tilde{Y}$.

Введем также обозначения: m^* — прямая $Y(1)Y(2)$; Π^+ и Π^- — полуплоскости, определяемые прямой m^* . При этом: если хотя бы одна из точек $Y(3), Y(4)$ не принадлежит прямой m^* , то Π^+ — это полуплоскость, содержащая эту точку; если обе точки $Y(3), Y(4)$ принадлежат прямой m^* , то обозначения полуплоскостей произвольны.

Полагая смещение точки семейства сколь угодно малым, преобразование $Y \rightarrow \tilde{Y}$ можно характеризовать указанием места исходного положения смещаемой точки и ее конечного положения (через стрелку), понимая под местами m^* , Π^+ и Π^- . Указание такой пары мест будем называть типом преобразования. В предположении, что $Y \in \mathcal{Y}^*$, возможны следующие типы: $m^* \rightarrow m^*$, $m^* \rightarrow \Pi^+$, $m^* \rightarrow \Pi^-$, $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$. Принадлежность/непринадлежность семейства \tilde{Y} некоторому из классов \mathcal{Y}_q^* определяется типом преобразования и условием принадлежности семейства Y какому-то классу \mathcal{Y}_q^* .

Все возможные варианты представим в виде трех таблиц, которые обозначим так же как класс в условии $Y \in \mathcal{Y}_q^*$. В графах таблицы записаны: либо обозначение класса, которому принадлежит семейство \tilde{Y} ; либо обозначение класса, которому семейство \tilde{Y} не принадлежит (с явным на то указанием посредством знака \notin); либо указана (посредством знака \times) невозможность применения преобразования данного типа к данной точке. Индексы со значениями 1,2 указаны явно (то есть как сами эти числа), значения 3 и 4 принимаются индексами s, t . Для большей наглядности таблицы дополнены рисунками (справа от соответствующих таблиц). Например, для семейства $Y \in \mathcal{Y}_1^*$ (см. рис. 4) смещение точки $Y(1)$ в плоскость Π^+ влечет $\tilde{Y} \in \mathcal{Y}_0^*$, смещение той же точки в плоскость Π^- влечет $\tilde{Y} \notin \mathcal{Y}^*$ (точки $Y(s), Y(t)$ окажутся по разные стороны от новой прямой, проходящей через точки семейства с индексами 1 и 2).

Таблица 1

Таблица \mathcal{Y}_0^*

\mathcal{Y}_0^*	$m^* \rightarrow m^*$	$m^* \rightarrow \Pi^+$	$m^* \rightarrow \Pi^-$	$\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$
$Y(1)$	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\times
$Y(2)$	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\times
$Y(s)$	\times	\times	\times	\mathcal{Y}_0^*
$Y(t)$	\times	\times	\times	\mathcal{Y}_0^*

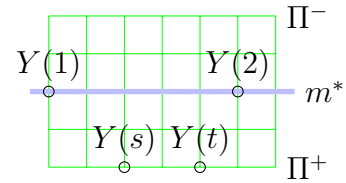


Рис. 3. К таблице 1

Таблица 2

Таблица \mathcal{Y}_1^*

\mathcal{Y}_1^*	$m^* \rightarrow m^*$	$m^* \rightarrow \Pi^+$	$m^* \rightarrow \Pi^-$	$\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$
$Y(1)$	\mathcal{Y}_1^*	\mathcal{Y}_0^*	$\notin \mathcal{Y}^*$	\times
$Y(2)$	\mathcal{Y}_1^*	\mathcal{Y}_0^*	$\notin \mathcal{Y}_0^*$	\times
$Y(s)$	\mathcal{Y}_1^*	\mathcal{Y}_0^*	$\notin \mathcal{Y}^*$	\times
$Y(t)$	\times	\times	\times	\mathcal{Y}_1^*

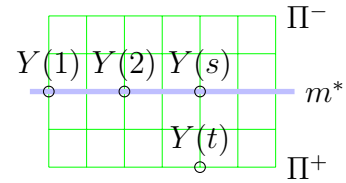


Рис. 4. К таблице 2

Таблица 3

Таблица \mathcal{Y}_2^*

\mathcal{Y}_2^*	$m^* \rightarrow m^*$	$m^* \rightarrow \Pi^+$	$m^* \rightarrow \Pi^-$	$\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$
$Y(1)$	\mathcal{Y}_2^*	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\times
$Y(2)$	\mathcal{Y}_2^*	\mathcal{Y}_0^*	\mathcal{Y}_0^*	\times
$Y(s)$	\mathcal{Y}_2^*	\mathcal{Y}_1^*	\mathcal{Y}_1^*	\times
$Y(t)$	\mathcal{Y}_2^*	\mathcal{Y}_1^*	\mathcal{Y}_1^*	\times

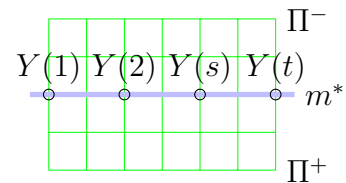


Рис. 5. К таблице 3

И наконец, помимо изложенного выше, нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть U — некоторое 3-точечное семейство, V — 3-точечное семейство, все точки которого лежат на одной прямой. Если отрезки $V(i)V(j)$ и $V(i)V(k)$ красные, а отрезок $V(j)V(k)$ синий, то точки $V(j)$ и $V(k)$ расположены по одну сторону от точки $V(i)$.

Доказательство. Положим отрезки $V(i)V(j)$ и $V(i)V(k)$ равными по длине отрезкам $U(i)U(j)$ и $U(i)U(k)$ соответственно. Пусть точка $V(i)$ расположена между точками $V(j)$ и $V(k)$. Если треугольник $U(i)U(j)U(k)$ невырожден, то семейство V получается из U развертыванием угла $U(i)$ до значения π . При этом, очевидно, длина противолежащей стороны $U(j)U(k)$ может только увеличиться, что противоречит указанной в условии раскраске отрезков семейства V . Если треугольник $U(i)U(j)U(k)$ вырожден, то V получается из U тождественным (изометрическим) преобразованием, что также противоречит раскраске отрезков семейства V . Лемма доказана.

2. Исследование классов Ξ_p^q

Здесь и далее полагаем, что значения семейства X попарно различны. Из определения величины (1) следует, что если при этом в семействе Y есть совпадающие значения, то $\rho(X, Y) = \infty$. Такие семейства мы исключаем из рассмотрения, не обязательно это оговаривая.

2.1. Класс Ξ_1^1

Теорема 1. Пусть $Y \in \mathcal{Y}^*$. Если $Y \in \Xi_1^1$, то существует $Y' \in \mathcal{Y}^*$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Синий отрезок имеет свободную вершину. Обозначим: A — свободная вершина синего отрезка; B — его вторая вершина.

- 1) Пусть $A \notin m^*$. Тогда $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1$. Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^+(A)$ получим семейство $Y' = \{_{A'}^i \ _{Y(j)}^j \ _{Y(k)}^k \ _{Y(l)}^l \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 6). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.
- 2) Пусть $A \in m^*$. Тогда $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1 : 2$. Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^+(A) \cap m^*$, получим семейство $Y' = \{_{A'}^i \ _{Y(j)}^j \ _{Y(k)}^k \ _{Y(l)}^l \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 6).

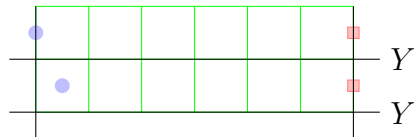


Рис. 6. $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$

Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $m^* \rightarrow m^*$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

Теорема 1 доказана.

2.2. Класс Ξ_1^2

Теорема 2. Пусть $Y \in \mathcal{Y}^*$. Если $Y \in \Xi_1^2$, то существует $Y' \in \mathcal{Y}^*$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Классифицируем расположение отрезков семейства Y следующим образом.

- 1) Синий и красные отрезки семейства составляют замкнутую трехзвенную ломаную (рис. 7а).
- 2) Синий и красные отрезки семейства составляют незамкнутую трехзвенную ломаную и при этом синий отрезок имеет свободную вершину (тогда и красный отрезок имеет свободную вершину) (рис. 7б).
- 3) Синий и красные отрезки семейства составляют незамкнутую трехзвенную ломаную и при этом синий отрезок не имеет свободной вершины (тогда каждый из красных отрезков имеет свободную вершину) (рис. 7в).
- 4) Цветные отрезки не составляют ломаную (рис. 7г).

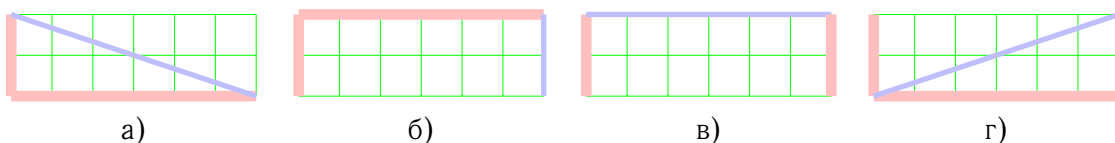


Рис. 7. Классификация раскраски отрезков семейств $Y \in \Xi_1^2$

Рассмотрим указанные случаи.

1. 1.1. Пусть красные отрезки лежат на некоторой прямой p .

Тогда синий отрезок лежит на той же прямой. Обозначим I — объединение синего и красных отрезков. По лемме 1 общая вершина двух красных отрезков не может быть внутренней точкой отрезка I . Обозначим граничные точки отрезка I : A — общая вершина двух красных отрезков; B — общая вершина синего и красного отрезков. Обозначим: $C = Y(i)$ — общая вершина синего и красного отрезков, являющаяся внутренней точкой отрезка I (рис. 8а). Выбирая $C' \in r_{AB}^{-+}(C) \cap p$ получим семейство $Y' = \left\{ \begin{smallmatrix} i & j & k & l \\ C' & Y(j) & Y(k) & Y(l) \end{smallmatrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 8 б)).

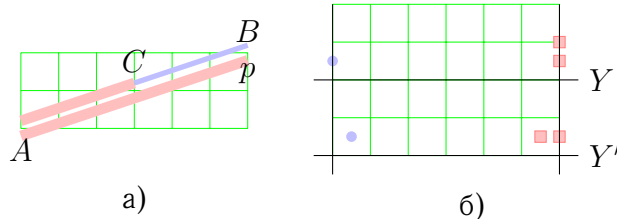


Рис. 8. Выбор семейства Y' , такого что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$

Если $p \neq m^*$, то $Y \in \mathcal{Y}_0^*$ и преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_0^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_0^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.
 Если $p = m^*$, то $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, где $q = 1 : 2$, и преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $m^* \rightarrow m^*$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

1.2. Пусть красные отрезки не лежат на одной прямой. Тогда: хотя бы одна из вершин ломаной расположена вне m^* ; $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, где $q = 0 : 1$.

1.2.1. Пусть вне m^* расположена общая вершина синего и красного отрезков. (Имеем: эти отрезки не лежат на одной прямой.)
 Обозначим: C — общая вершина синего и красного отрезков; A — вершина красного отрезка, инцидентного точке C ; B — вершина синего отрезка, инцидентного точке C (рис. 9).

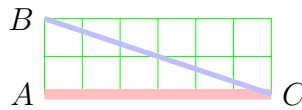


Рис. 9. Вне m^* расположена общая вершина синего и красного отрезков (второй красный отрезок и прямая m^* не показаны)

Полагая $Y(i) = C$ и выбирая $C' \in r_{AB}^{-+}(C)$ получим семейство $Y' = \left\{ \begin{smallmatrix} i & j & k & l \\ C' & Y(j) & Y(k) & Y(l) \end{smallmatrix} \right\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 8 б)). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

1.2.2. Пусть вне m^* расположена общая вершина двух красных отрезков. Обозначим: C — общая вершина двух красных отрезков; A, B — вершины красных отрезков, инцидентных точке C (рис. 10 а)). Полагая $Y(i) = C$ и выбирая $C' \in r_{AB}^{-+}(C)$ получим семейство $Y' = \left\{ \begin{smallmatrix} i & j & k & l \\ C' & Y(j) & Y(k) & Y(l) \end{smallmatrix} \right\}$,

для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 10б)). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

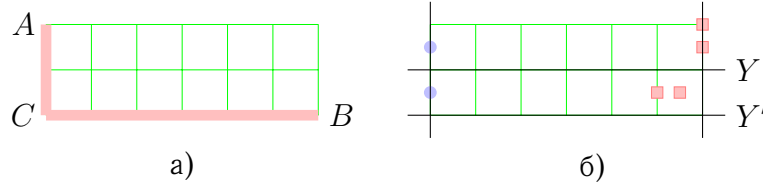


Рис. 10. Вне m^* расположена общая вершина двух красных отрезков (синий отрезок и прямая m^* не показаны)

2. Повторяя выкладки доказательства теоремы 1, получаем требуемое.
3. 3.1. Пусть свободная вершина хотя бы одного из красных отрезков расположена вне m^* . Тогда $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1$.
Обозначим: A — свободная вершина такого отрезка; B — его вторая вершина.

Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^-(A)$, получим семейство $Y^* = \{ {}_{A'}^i Y(j) {}_{Y(k)}^k Y(l) \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$. Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. (*)

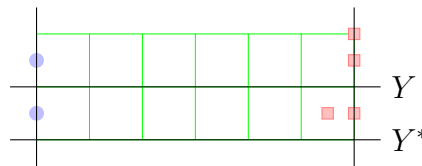


Рис. 11. Переход к семейству $Y^* \in \Xi_1^1$: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$

Имеем: $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 11). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

- 3.2. Пусть свободные вершины обоих красных отрезков расположены на прямой m^* .
 - 3.2.1. Пусть при этом хотя бы один из красных отрезков не перпендикулярен прямой m^* (в частности, лежит на этой прямой). Тогда $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1 : 2$. Введем обозначения: A — свободная вершина такого отрезка; B — его вторая вершина.

Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^-(A) \cap m^*$ получим семейство $Y^* = \{ {}_{A'}^i Y(j) {}_{Y(k)}^k Y(l) \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$. Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $m^* \rightarrow m^*$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. (*)

Имеем: $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 11). Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

3.2.2. Пусть при этом оба красных отрезка перпендикулярны прямой m^* . Тогда: $Y \in \mathcal{Y}_0^*$; синий и любой из красных отрезков не лежат на одной прямой. Обозначим: A, B — концы синего отрезка; C — второй конец красного отрезка, инцидентного точке B (рис. 12). Полагая $Y(i) = B$ и выбирая $B' \in r_{AC}^{+-}(B)$, получим семейство $Y' = \{_{B'}^i \text{ } _{Y(j)}^j \text{ } _{Y(k)}^k \text{ } _{Y(l)}^l \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 8 б)). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_0^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_0^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

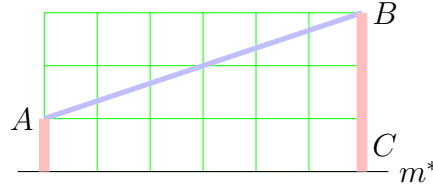


Рис. 12. Семейство $Y \in \Xi_1^2$, у которого оба красных отрезка перпендикулярны прямой m^*

4. Синий отрезок имеет свободную вершину (рис. 7г). Повторяя выкладки доказательства теоремы 1, получаем требуемое.

Теорема 2 доказана.

2.3. Класс Ξ_1^3

Здесь нам потребуется ввести в рассмотрение классы $\mathcal{K}^1(X)$, $\mathcal{K}^2(X)$, $\mathcal{K}^3(X)$ семейств Y , предположительно ближайших к X . Дадим определения этих классов и описания построения составляющих их семейств Y .

Определение класса \mathcal{K}_{ijkl}^1 :

$$\mathcal{K}_{ijkl}^1 = \{Y : Y(i), Y(j), Y(k), Y(l) \in p; |Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|, \\ |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|, |Y(k)Y(l)| = |X(k)X(l)|\}.$$

Описание построения: в семействе X выбирается незамкнутая 3-звенная ломаная $X(i)X(j)X(k)X(l)$; точки $X(j), X(k)$ отождествляются с точками $Y(j), Y(k)$ соответственно; через точки $Y(j), Y(k)$ проводится прямая p ; на прямой p по обе стороны от точки $Y(j)$ откладывается отрезок длиной $|X(j)X(i)|$, его второй конец — положения точки $Y(i)$, два варианта; аналогично, по обе стороны от точки $Y(k)$ откладывается отрезок длины $|X(k)X(l)|$, его второй конец — положения точки $Y(l)$, два варианта.

Класс \mathcal{K}_{ijkl}^1 состоит из четырех семейств. Полагаем $\mathcal{K}^1 = \cup_{ijkl} \mathcal{K}_{ijkl}^1$, где объединение берется по всем перестановкам значений индексов 1, 2, 3, 4.

Определение класса \mathcal{K}_{ijkl}^2 :

$$\mathcal{K}_{ijkl}^2 = \{Y : Y(i) \in p; Y(i)Y(j) \perp p, |Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|;$$

$$Y(k) \in p, |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|; Y(l) \in p, |Y(k)Y(l)| = |X(k)X(l)|\}.$$

Описание построения: точки $X(i), X(j)$ отождествляются с точками $Y(i), Y(j)$ соответственно; через точку $Y(i)$ проводится прямая $p \perp Y(i)Y(j)$; на прямой p циркулем с раствором $|X(j)X(k)|$ из центра $Y(j)$ делаются засечки — два положения точки $Y(k)$;

по обе стороны от точки $Y(k)$ откладывается отрезок длиной $|X(k)X(l)|$, его второй конец — точка $Y(l)$, два положения.

Класс \mathcal{K}_{ijkl}^2 состоит из четырех семейств. Полагаем $\mathcal{K}^2 = \cup_{ijkl} \mathcal{K}_{ijkl}^2$, где объединение берется по всем перестановкам значений индексов 1, 2, 3, 4.

Определение класса \mathcal{K}_{ijkl}^3 :

$$\mathcal{K}_{ijkl}^3 = \{Y : Y(i) \in p; Y(i)Y(j) \perp p, |Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|;$$

$$Y(k) \in p, |Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|; \quad Y(l) \in p, |Y(j)Y(l)| = |X(j)X(l)|\}.$$

Описание построения: точки $X(i), X(j)$ отождествляются с точками $Y(i), Y(j)$ соответственно; через точку $Y(i)$ проводится прямая $p \perp Y(i)Y(j)$; из точки $Y(j)$ циркулем с раствором $|X(j)X(k)|$ делаются на прямой p засечки — два положения точки $Y(k)$; из точки $Y(j)$ циркулем с раствором $|X(j)X(l)|$ делаются на прямой p засечки — два положения точки $Y(l)$.

Класс \mathcal{K}_{ijkl}^3 состоит из четырех семейств. Полагаем $\mathcal{K}^3 = \cup_{ijkl} \mathcal{K}_{ijkl}^3$, где объединение берется по всем перестановкам значений индексов 1, 2, 3, 4.

Теорема 3. Пусть $Y \in \mathcal{Y}^*$. Если $Y \in \Xi_1^3$ и $Y \notin \mathcal{K}^1, Y \notin \mathcal{K}^2, Y \notin \mathcal{K}^3$, то существует семейство $Y' \in \mathcal{Y}^*$ такое что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$.

Доказательство. Классифицируем взаимное расположение отрезков семейства Y следующим образом.

- 1) Красные отрезки составляют замкнутую 3-звенную ломаную (рис. 13а).
- 2) Красные отрезки составляют незамкнутую 3-звенную ломаную и никакой красный отрезок не имеет свободной вершины (рис. 13б).
- 3) Красные отрезки составляют незамкнутую 3-звенную ломаную и некоторый красный отрезок имеет свободную вершину (рис. 13в).
- 4) Красные отрезки не составляют ломаную (рис. 13г).

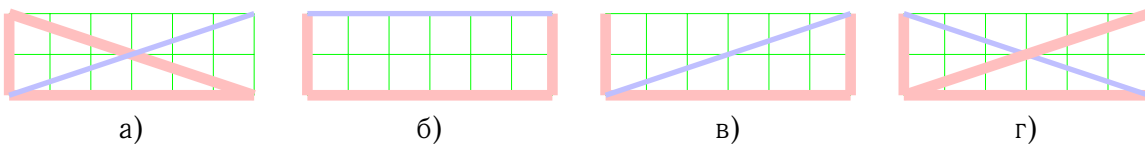


Рис. 13. Классификация раскраски отрезков семейств $Y \in \Xi_1^3$

Рассмотрим указанные случаи.

1. В этом случае синий отрезок имеет свободную вершину. Повторяя выкладки доказательства теоремы 1, получим семейство $Y' \in \mathcal{Y}^*$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 14).

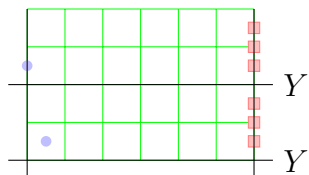


Рис. 14. Получение семейства $Y' \in \mathcal{Y}^*$ такого, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ посредством удлинения синего отрезка

2. В этом случае синий и красные отрезки составляют замкнутую 4-звенную ломаную.

2.1. Пусть некоторая точка семейства расположена вне прямой m^* . Тогда $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1$.

2.1.1. Пусть вне m^* расположена общая вершина синего и красного отрезков и при этом отрезки с этой общей вершиной не лежат на одной прямой.

Обозначим: C — указанная общая вершина синего и красного отрезков; A — вершина синего отрезка, инцидентного точке C ; B — вершина красного отрезка, инцидентного точке C (рис. 15а); хотя бы одна из точек A, B принадлежит прямой m^*). Полагая $Y(i) = C$ и выбирая $C' \in r_{AB}^{+-}(C)$, получим семейство $Y' =$ (*) $= \{_{C'}^i \ _{Y(j)}^j \ _{Y(k)}^k \ _{Y(l)}^l \}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 15б)). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в табл. \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим $Y' \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

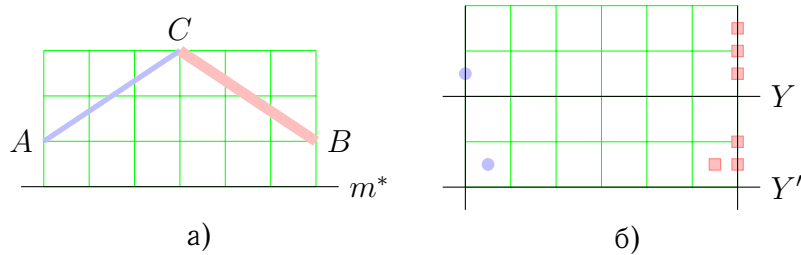


Рис. 15. Получение семейства $Y' \in \mathcal{Y}^*$ такого, что $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ посредством удлинения синего отрезка и укорочения красного

2.1.2. Пусть вне m^* расположена общая вершина синего и красного отрезков и при этом отрезки с этой общей вершиной лежат на одной прямой.

2.1.2.1. Пусть при этом указанные синий и красный отрезки расположены по разные стороны от их общей вершины (рис. 16а).

Повторяя выкладки (*) п.2.1.1, получаем требуемое.

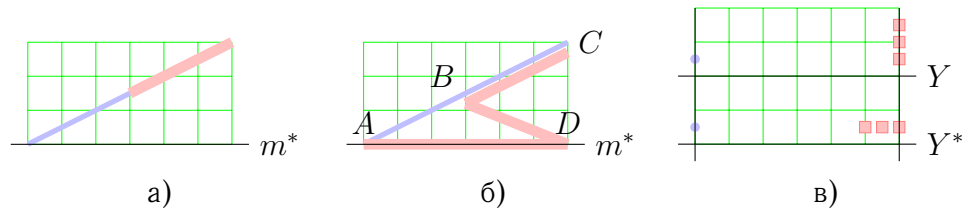


Рис. 16. Преобразование семейства Y , у которого общая вершина синего и красного отрезков (лежащих на одной прямой) расположена вне прямой m^*

2.1.2.2. Пусть при этом указанные синий и красный отрезки расположены по одну сторону от их общей вершины.

Обозначим: C — указанная общая вершина синего и красного отрезков; A — вершина синего отрезка, инцидентного точке C ; B — вершина красного отрезка, инцидентного точке C ; D — оставшаяся точка семейства. Имеем: из точек A, B на прямой m^* расположена ровно одна (смотря какой из отрезков AC, BC длиннее).

- Пусть на m^* расположена точка A (рис. 16б). Тогда отрезки CB , BD не лежат на одной прямой (иначе все точки семейства будут расположены на m^*). Имеем: $Y \in \mathcal{Y}_0^*$.

Полагая $Y(i) = B$ и выбирая $B' \in r_{CD}^-(B)$, получим семейство $Y^* = \{_{B'}^i \quad _{Y(j)}^j \quad _{Y(k)}^k \quad _{Y(l)}^l\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^1$ (рис. 16в). Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в табл. \mathcal{Y}_0^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_0^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. Применяя теорему 1, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое. (*)

- Пусть на m^* расположена точка B (рис. 17а). Тогда отрезки AC , AD не лежат на одной прямой (иначе все точки семейства будут расположены на m^*). Имеем: $Y \in \mathcal{Y}_0^*$.

Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_{CD}^+(A)$, получим семейство $Y' = \{_{A'}^i \quad _{Y(j)}^j \quad _{Y(k)}^k \quad _{Y(l)}^l\}$, для которого выполнено: $\rho(X, Y') < \rho(X, Y)$ (рис. 17б). Преобразование $Y \rightarrow Y'$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_0^* . Откуда выводим: $Y' \in \mathcal{Y}_0^*$ и значит $Y' \in \mathcal{Y}^*$.

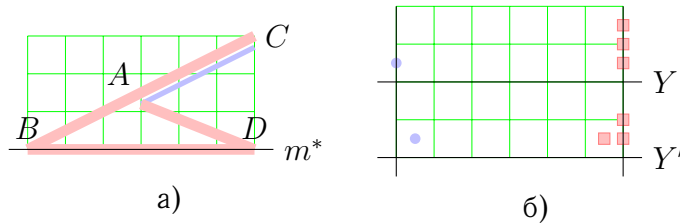


Рис. 17. Преобразование семейства, у которого общая вершина двух красных отрезков расположена на прямой m^*

- 2.2. Пусть каждая из общих вершин синего и красного отрезков расположена на m^* и хотя бы одна из общих вершин двух красных отрезков расположена вне m^* .

Тогда хотя бы для одной из общих вершин двух красных отрезков, расположенной вне m^* , выполнено условие: красные отрезки с этой общей вершиной не расположены на одной прямой. Обозначим: $B \notin m^*$ — указанная общая вершина двух красных отрезков; C, D — вершины красных отрезков, смежные точки B . Повторяя выкладки (*) п. 2.1.2.2, получаем требуемое.

- 2.3. Пусть, наконец, каждая из общих вершин синего и красного отрезков и каждая из общих вершин двух красных отрезков расположены на m^* . То есть все точки семейства расположены на прямой m^* . На 3-звенной ломаной, образованной красными отрезками, зададим направление и обозначим точки в порядке от начальной точки к конечной $Y(i), Y(j), Y(k), Y(l)$. Полагая равным 1 общее значение величин

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}, \quad \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}, \quad \frac{|Y(k)Y(l)|}{|X(k)X(l)|},$$

имеем

$$\begin{aligned} |Y(i)Y(j)| &= |X(i)X(j)|, & |Y(j)Y(k)| &= |X(j)X(k)|, \\ |Y(k)Y(l)| &= |X(k)X(l)|. \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (4) и того факта, что $Y(i), Y(j), Y(k), Y(l)$ лежат на одной прямой, выводим: $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^1$. Откуда следует: $Y \in \mathcal{K}^1$, что исключено условием теоремы.

3. Красные отрезки составляют незамкнутую 3-звенную ломаную и при этом синий отрезок не имеет свободной вершины. Тогда красный отрезок имеет свободную вершину.

Введем обозначения (рис. 18а): A — свободная вершина красного отрезка; B — общая вершина синего и двух красных отрезков; C — общая вершина двух красных отрезков; D — общая вершина синего и красного отрезков.

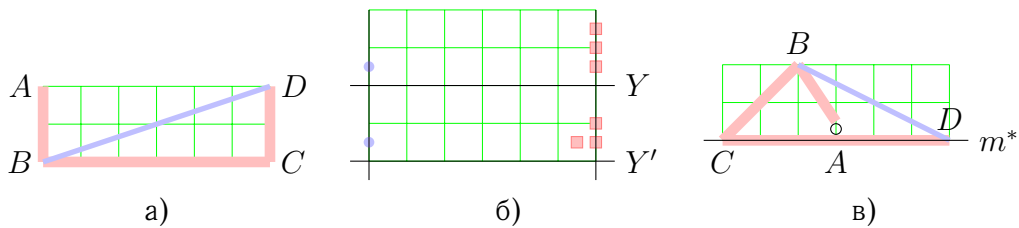


Рис. 18. Преобразование семейства, у которого красный отрезок со свободной вершиной не перпендикулярен прямой m^*

- 3.1. Пусть $A \notin m^*$. Имеем: $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1$. Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^-(A)$, получим семейство $Y^* = \{_{A' Y(j) Y(k) Y(l)}^{i j k l}\}$, для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 18б). Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $\Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

- 3.2. Пусть $A \in m^*$ и $BA \not\perp m^*$ (рис. 18в). Имеем: $Y \in \mathcal{Y}_q^*$, $q = 0 : 1 : 2$. Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^-(A) \cap m^*$, получим семейство $Y^* = \{_{A' Y(j) Y(k) Y(l)}^{i j k l}\}$, для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 18б). Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $m^* \rightarrow m^*$ в таблице \mathcal{Y}_q^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_q^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

- 3.3. Пусть $A \in m^*$ и $BA \perp m^*$. Имеем заведомо $B \notin m^*$.

- 3.3.1. Пусть при этом прямой m^* принадлежит ровно одна из точек C, D Тогда $Y \in \mathcal{Y}_0^*$.

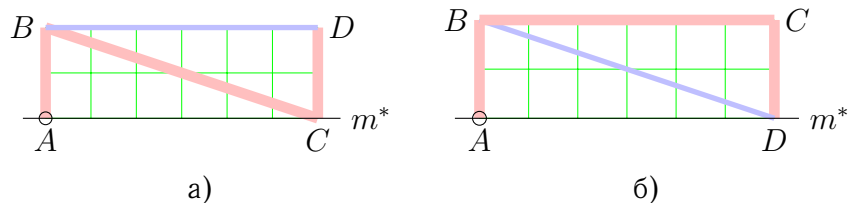


Рис. 19. Раскраска отрезков семейства в случае, если ни один из красный отрезков не лежит на прямой m^*

Полагая $Y(i) = A$ и выбирая $A' \in r_B^-(A)$, получим семейство $Y^* = \{ \begin{smallmatrix} i & j & k & l \\ A' & Y(j) & Y(k) & Y(l) \end{smallmatrix} \}$, для которого выполнено $\rho(X, Y^*) = \rho(X, Y)$, $Y^* \in \Xi_1^2$ (рис. 186). Преобразование $Y \rightarrow Y^*$ есть преобразование типа $m^* \rightarrow \Pi^+$ в таблице \mathcal{Y}_0^* . Откуда выводим: $Y^* \in \mathcal{Y}_0^*$ и значит $Y^* \in \mathcal{Y}^*$. Применяя теорему 2, где полагаем $Y = Y^*$, получаем требуемое.

3.3.2. Пусть при этом прямой m^* принадлежат обе точки C и D (рис. 20). Обозначим $Y(i) = A$, $Y(j) = B$, $Y(k) = C$, $Y(l) = D$. Полагая общее значение величин

$$\frac{|Y(i)Y(j)|}{|X(i)X(j)|}, \quad \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}, \quad \frac{|Y(k)Y(l)|}{|X(k)X(l)|}$$

равным 1, имеем: $|Y(i)Y(j)| = |X(i)X(j)|$, $|Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|$, $|Y(k)Y(l)| = |X(k)X(l)|$. Откуда с учетом условия $Y(i)Y(j) \perp m^*$ выводим: $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^2$. То есть $Y \in \mathcal{K}^2$, что исключено условием теоремы.

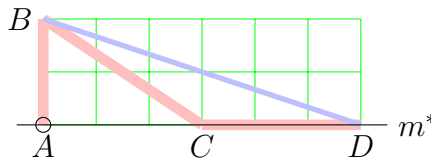


Рис. 20. Вид семейства, в котором красный отрезок со свободной вершиной перпендикулярен прямой m^* и некоторый другой красный отрезок (определяется единственным образом) лежит на этой прямой

4. Красные отрезки не составляют ломаную, при этом синий отрезок не имеет свободной вершины. Тогда красный отрезок имеет свободную вершину.

Введем обозначения (рис. 21): A — свободная вершина красного отрезка; B — общая вершина трех красных отрезков; C — общая вершина синего и красного отрезков; D — общая вершина синего и красного отрезков.

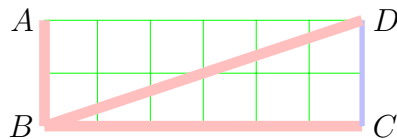


Рис. 21. Раскраска отрезков исследуемого семейства для случая, когда все три красных отрезка имеют общую вершину

- 4.1. Пусть $A \notin m^*$. Повторяя выкладки п. 3.1, получаем требуемое.
- 4.2. Пусть $A \in m^*$ и $BA \not\perp m^*$. Повторяя выкладки п. 3.2, получаем требуемое.
- 4.3. Пусть $A \in m^*$ и $BA \perp m^*$. Имеем заведомо $B \notin m^*$.
 - 4.3.1. Пусть при этом прямой m^* принадлежит ровно одна из точек C, D . Повторяя выкладки п. 3.3.1, но ссылаясь при этом на рисунок вида 136, получаем требуемое.
 - 4.3.2. Пусть при этом прямой m^* принадлежат обе точки C и D . Обозначим: $Y(i) = A$, $Y(j) = B$, $Y(k) = C$, $Y(l) = D$. Полагая равным 1 общее значение величин

$$\frac{|Y(j)Y(i)|}{|X(j)X(i)|}, \quad \frac{|Y(j)Y(k)|}{|X(j)X(k)|}, \quad \frac{|Y(j)Y(l)|}{|X(j)X(l)|},$$

имеем: $|Y(j)Y(i)| = |X(j)X(i)|$, $|Y(j)Y(k)| = |X(j)X(k)|$, $|Y(j)Y(l)| = |X(j)X(l)|$. Откуда с учетом условия $Y(j)Y(i) \perp m^*$, выводим: $Y \in \mathcal{K}_{ijkl}^3$. То есть $Y \in \mathcal{K}^3$, что исключено условием теоремы.

Теорема 3 доказана.

Заключение

В данной работе проведено частичное исследование задачи о получении количественной характеристики устойчивости пары смежных треугольников, для чего вводится понятие расстояния между 4-точечными нумерованными наборами (семействами), определяемыми парами треугольников с общей стороной. Задача сводится к исследованию классов семейств вида Ξ_p^q (общим количеством 15). Показано, что классы Ξ_1^1 и Ξ_1^2 можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Для получения значения указанной характеристики требуется рассматривать, в частности, некоторые подклассы класса Ξ_1^3 (каждый из которых состоит из конечного количества семейств). Для полного решения поставленной задачи требуется рассмотрение остальных классов вида Ξ_p^q (количеством 12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс. — М.: Мир, 1969. — 154 с.
2. Болучевская, А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении / А. В. Болучевская // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1 (2). — С. 20–23.
3. Гилева, Л. В. Обоснование асимптотической устойчивости алгоритма триангуляции трехмерной области / Л. В. Гилева, В. В. Шайдуров // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2000. — Т. 3, № 2. — С. 123–136.
4. Игумнов, А. Ю. Метризация пространства семейств точек в \mathbb{R}^n и смежные вопросы / А. Ю. Игумнов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — Т. 37, № 6. — С. 40–54. — DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.4>.
5. Игумнов, А. Ю. О сохранении ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении / А. Ю. Игумнов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 2. — С. 5–12. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.1>.
6. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.
7. Клячин, В. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов / В. А. Клячин, Н. А. Чебаненко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — Т. 22, № 3. — С. 56–60.
8. Лебедев, А. С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А. С. Лебедев // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 85–97.
9. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.
10. Суков, С. А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации / С. А. Суков. — Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-23>. — Загл. с экрана.

REFERENCES

1. Alfors L. *Lektsii o kvazikonformnykh otobrazheniyakh* [Lectures on Quasiconformal Mappings]. Moscow, Mir Publ., 1969. 154 p.
2. Boluchevsckaya A.V. Sokhranenie orientatsii simpleksa pri kvaziizometrichnom otobrazhenii [Preserving of Orientation of a Simplex by Quasi-Isometric Mapping]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.], 2013, vol. 13, no. 1 (2), pp. 20-23.
3. Gileva L.V., Shaydurov V.V. Obosnovanie asimptoticheskoy ustoychivosti algoritma triangulyatsii trekhmernoy oblasti [Justification of Asymptotic Stability of an Algorithm of a Triangulation of Three-Dimensional Area]. *Sib. zhurn. vychisl. matem.*, 2000, vol. 3, no. 2, pp. 123-136.
4. Igumnov A.Yu. Metrizatsiya prostranstva semeystv toчек v \mathbb{R}^n i smezhnye voprosy [Metritzation in Space Families of Points in \mathbb{R}^n and Adjoining Questions]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, vol. 37, no. 6, pp. 40-54. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.4>.
5. Igumnov A.Yu. O sokhranении orientatsii treugolnika pri kvaziizometricheskom otobrazhenii [On Preserving the Orientation of Triangle under Quasi-Isometric Mappings]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2018, vol. 21, no. 2, pp. 5-12. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.1>.
6. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, Izd-vo VolSU, 2009, iss. 4, pp. 169-182.
7. Klyachin V.A., Chebanenko N.A. O lineynykh proobrazakh nepreryvnykh otobrazheniy, sokhranyayushchikh orientatsiyu simpleksov [About Linear Prototypes of the Continuous Mappings Preserving Orientation of Simplexes]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, vol. 22, no. 3, pp. 56-60.
8. Lebedev A.S. Postroenie nestrukturirovannykh treugolnykh setok s pochti pravilnymi yacheykami [Construction of Unstructured Triangular Grids with Almost Correct Cells]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computational Technologies], 2010, vol. 15, no. 1, pp. 85-97.
9. Miklyukov V.M. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction to Non-Smooth Analysis]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2008. 424 p.
10. Sukov S.A. *Metody generatsii tetraedralnykh setok i ikh programmnye realizatsii* [Methods of Generation of Tetrahedral Grids and Their Program Implementations]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-23>.

**ON THE PRESERVING OF THE ORIENTATION OF TRIANGLE
BY QUASI-ISOMETRIC MAPPING**

Alexander Yu. Igumnov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lecturer,
Department of Computer Science and Programming Technology,
Volzhsky Polytechnic Institute (branch) of the Volgograd State Technical University
IAJu1965@mail.ru
Engelsa St., 42a, 404121 Volzhsky, Russian Federation

Abstract. The present paper proposes quantitative characteristics the two triangle contiguity ratio, which is the distance ρ in the space of 4-point families from the family X , defined by a given pair of adjacent triangles, up to a set \mathcal{U}^*

families defined by all kinds of pairs non-adjacent triangles (with common party). This characteristic is local sufficient sign of no grid overflow at quasi-isometric mapping and can be applied to making triangulation of a given region as an image of some a reference triangulated region. $\rho(X, \mathcal{Y}^*)$ is required to calculate structurally specify in \mathcal{Y}^* some subset, distance from X to which is $\rho(X, \mathcal{Y}^*)$. This requires, in turn, splitting the set \mathcal{Y}^* into 15 classes and studies of each of them for exclusion “extra” families and descriptions of the remaining ones. Due to the large volume of full study in the article only three classes of these 15 are examined. Two of them are “nodal” in the general study scheme, by example the third shows the combinatorial nature of the task.

Key words: sweep the grids, grid quality, adjacent triangles, distance between point families, triangulation.