DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.1

УДК 517.927.4
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 07.07.2022
Дата принятия статьи: 19.09.2022

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Гусен Эльдерханович Абдурагимов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
ул. Магомеда Гаджиева, 43а, 367000 г. Махачкала, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с неоднородными условиями Дирихле, представленными в интегральной форме. С помощью специальных топологических средств, основанных на использовании теории полуупорядоченных пространств, получены достаточные условия существования и единственности положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус, интегральные граничные условия.

Введение

Вопросам исследования разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений и систем посвящено достаточно большое количество работ, в частности [1; 6–8; 10], в которых рассмотрены вопросы существования положительных решений, их поведения, асимптотики и т. д., причем естественным орудием исследования являются методы функционального анализа, основанные на использовании техники нелинейного анализа, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М.Г. Крейна, Л.В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем эти подходы были развиты М.А. Красносельским и его учениками — Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др.

Рассматриваемая в работе краевая задача относится к широкому классу граничных задач, возникающих в различных областях прикладной математики и физики, в частности, моделировании гармонического осциллятора, в теплопроводности, потоках подземных вод, термоупругости, физике плазмы и т. д. Для обыкновенных дифференциальных уравнений интегральные граничные условия рассматривались, например, в работах [4; 5; 9]. В данной статье нами получены достаточные условия существования и единственности положительного решения исследуемой задачи соответственно с помощью теоремы о растяжении конуса и принципа единственности для u_0 выпуклых на конусе операторов.

1. Предварительные сведения

Пусть E — банаховое пространство с частично упорядоченным конусом $K \subseteq E$, где под полуупорядочиванием $u \le v$ и $u \overline{\le} v$ в конусе K соответственно будем понимать $v - u \in K$ и $v - u \notin K$.

Определение 1 *[2, с. 197]***.** Оператор A, действующий в пространстве E с конусом K, назовем *вогнутым*, если существует такой ненулевой элемент $u_0 \in K$, что для любого ненулевого $x \in K$ справедливы неравенства

$$\alpha u_0 \le Ax \le \beta u_0,$$

где α и β положительны, и если для каждого такого $x \in K$, что $\alpha_1(x)u_0 \le x \le \beta_1(x)u_0$ ($\alpha_1(x)$, $\beta_1(x) > 0$), справедливы соотношения

$$A(tx) \ge tAx \qquad (0 \le t \le 1).$$

Определение 2 *[2, с. 199]***.** Вогнутый оператор A назовем u_0*-вогнутым*, если для каждого положительного числа $t_0 \in (0,1)$ можно указать такое $\eta = \eta(x; t_0) > 0$, что

$$A(t_0x) \ge (1+\eta)t_0Ax.$$

Определение 3 *[2, с. 107]***.** Нелинейный оператор A называется *монотонным* на множестве $T \subseteq E$, если из $x \le y \quad (x, y \in T)$ следует, что $Ax \le Ay$.

Определение 4 *[2, с. 199]***.** Конус K называется *телесным*, если он содержит внутренние точки.

Теорема 1 *[3, с. 420]***.** *Пусть положительный оператор $A \quad (A\theta = \theta)$ монотонен и вполне непрерывен на конусе K и для некоторого элемента $v^* \in K$, $v^* \ne \theta$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|A(tv^*)\|}{t} = \infty.$$

Пусть для каждого $x \in K$

$$Ax \geq \|Ax\| \cdot v^*$$

и для некоторого $r > 0$

$$Ax \overline{\geq} x \qquad (x \in K, \|x\| \leq r, \quad x \neq \theta).$$

Тогда оператор A *имеет одну неподвижную точку* $x^* \in K$, $x^* \neq \theta$, $x^* \geq \|x\| v^*$.

Лемма 1 *[2, с. 220]. Пусть уравнение* $x = Ax$ *с монотонным* u_0 *выпуклым оператором* A *имеет два ненулевых положительных решения* x^* *и* x^{**}. *Тогда*

$$x^* \overline{\leq} t x^{**}, \qquad 0 < t < 1.$$

Утверждение 1 *[Принцип единственности] [2, с. 220].* Если в условиях леммы 1 конус K телесен и один из элементов $x^* - x^{**}$, $x^{**} - x^*$ может быть либо нулем, либо внутренним элементом конуса, то

$$x^* = x^{**}.$$

2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + p(t)x(t) + f(t, x(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = \lambda \int_0^1 x(s)\, ds, \tag{2}$$

где $p(t)$ — неотрицательная непрерывная на [0,1] функция; $\lambda \in (0, 2)$ — действительное число, функция $f(t, x)$ непрерывна, монотонно возрастает по второму аргументу и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 5. *Под положительным решением задачи* (1)–(2) *будем понимать функцию* $x \in C^2$, *положительную в интервале* $(0, 1)$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *и краевым условиям* (2).

Лемма 2. *Пусть* $\sigma(t)$ *— непрерывная на отрезке* $[0, 1]$ *функция. Тогда функция, определенная формулой*

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s)\sigma(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3}$$

является единственным решением краевой задачи

$$x''(t) + \sigma(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{4}$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = \lambda \int_0^1 x(s)\, ds, \tag{5}$$

где $G(t, s)$ *— функция Грина оператора* $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ *с краевыми условиями* (5):

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{t(1-s)(2-\lambda+\lambda s) - (2-\lambda)(t-s)}{2-\lambda}, & \text{если } 0 \leq s \leq t \leq 1; \\ \dfrac{t(1-s)(2-\lambda+\lambda s)}{2-\lambda}, & \text{если } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — положительное решение задачи (4)–(5). Тогда, интегрируя, получим

$$x(t) = x(0) + tx'(0) - \int_0^t (t-s)\sigma(s)\,ds,$$

$$x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s)\sigma(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$x(t) = \lambda\int_0^1 tx(s)\,ds + \int_0^1 t(1-s)\sigma(s)\,ds - \int_0^t (t-s)\sigma(s)\,ds,$$

$$x(t) = \lambda\int_0^1 tx(s)\,ds + \int_0^1 H(t,s)\sigma(s)\,ds, \tag{6}$$

где

$$H(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & \text{если } 0 \le s \le t \le 1; \\ t(1-s), & \text{если } 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

Проинтегрировав (6) на $[0,1]$, получим

$$\int_0^1 x(s)\,ds = \frac{\lambda}{a2}\int_0^1 x(s)\,ds + \int_0^1\int_0^1 H(s,\tau)\sigma(\tau)\,d\tau ds.$$

Откуда,

$$\int_0^1 x(s)\,ds = \frac{2\int_0^1\int_0^1 H(s,\tau)\sigma(\tau)\,d\tau ds}{2-\lambda}.$$

Подставив в (6), получим окончательно искомое соотношение (2).

Рассмотрим эквивалентное, в силу леммы 2, задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s) + f(s,x(s))\right)\,ds, \quad 0 \le t \le 1. \tag{7}$$

Несложно проверить, что

$$\frac{\lambda}{2-\lambda}\psi(s)t \le G(t,s) \le \frac{a2}{2-\lambda}\psi(s), \qquad t,s \in [0,1], \tag{8}$$

где $\psi(s) = s - s^2$.

В операторной форме уравнение (7) можно переписать в виде

$$x = Ax,$$

где оператор A, определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s) + f(s,x(s))\right)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен, вполне непрерывен [3, с. 161] и оставляет инвариантным конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций пространства C, удовлетворяющих условиям (2).

В дальнейшем полупорядоченность $u \le v$ и $u \overline{\le} v$ в конусе $\tilde{K}$ определим соответственно следующим образом: $u(x) \le v(x)$ и $u(x) > v(x)$ для всех $x \in [0,1]$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия:*

1) $a(t)u^\alpha \le f(t,u) \le b(t)u^\alpha$, *где* $\alpha > 1$, $a(t) \ge 0$, $b(t) > 0$ — *непрерывные на* $[0,1]$ *функции;*
2) $\int_0^1 p(s)\,ds < \frac{\lambda(2-\lambda)}{4}$.

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что найдется такое число $r > 0$, что при $x \in \tilde{K}$ и $\|x\|_C \le$ $\le r$, $x \ne 0$

$$Ax \overline{\ge} x. \tag{9}$$

Ввиду выпуклости решения задачи (1)–(2) легко показать, что

$$x(t) \ge \frac{\lambda}{a2} t\|x\|_C, \qquad 0 \le t \le 1. \tag{10}$$

В силу условия (1) теоремы и (10), воспользовавшись (8), имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s) + f(s,x(s))\right) ds \le \\ \le \int_0^1 G(t,s)\Big(p(s) + b(s)x^{\alpha-1}(s)\Big)\,x(s)\,ds \le \\ \le \frac{a2}{2-\lambda}\left(\int_0^1 p(s)\,ds + \|x\|_C^{\alpha-1}\int_0^1 b(s)\,ds\right)\psi(t)\|x\|_C \le \\ \le \frac{a2}{2-\lambda}\left(\int_0^1 p(s)\,ds + r^{\alpha-1}\int_0^1 b(s)\,ds\right)t\|x\|_C \le \\ \le \frac{4}{\lambda(2-\lambda)}\left(\int_0^1 p(s)\,ds + r^{\alpha-1}\int_0^1 b(s)\,ds\right)x(t).\end{aligned}$$

Выбрав $r < \left(\dfrac{\frac{\lambda(2-\lambda)}{4} - \int_0^1 p(s)\,ds}{\int_0^1 b(s)\,ds}\right)^{\frac{a1}{\alpha-1}}$, легко убедиться в справедливости (9).

Покажем теперь существование такого ненулевого элемента $\upsilon^* \in \tilde{K}$, что для каждого $x \in \tilde{K}$

$$Ax \ge \upsilon^*\|Ax\|_C. \tag{11}$$

Действительно, в силу свойств функции Грина (8), имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s) + f(s,x(s))\right) ds \ge \\ \ge \frac{\lambda}{2-\lambda}\int_0^1 \psi(s)\left(p(s)x(s) + f(s,x(s))\right) ds \cdot t.\end{aligned}$$

В то же время

$$\|Ax\|_C = \max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s)+f(s,x(s))\right)\,ds \le$$
$$\le \frac{a2}{2-\lambda}\int_0^1 \psi(s)\left(p(s)x(s)+f(s,x(s))\right)\,ds.$$

Объединив последние два неравенства, легко видеть выполнение условия (11), где $\upsilon^*(t)=\frac{\lambda}{a2}t$.

Последним шагом доказательства нашей теоремы является проверка условия

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\|A(\gamma\upsilon^*)\|_C}{\gamma}=\infty.$$

В самом деле, в силу условия (1) теоремы и (8), имеем

$$(A\gamma\upsilon^*)(t)=\int_0^1 G(t,s)\left(p(s)\gamma\upsilon^*(s)+f(s,\gamma\upsilon^*(s))\right)\,ds \ge$$
$$\ge \frac{\lambda}{2-\lambda}\int_0^1 \psi(s)\left(p(s)\gamma\upsilon^*(s)+a(s)\gamma^{\alpha}\vartheta^{*\alpha}(s)\right)\,ds\cdot t=$$
$$=\frac{\lambda\gamma}{2-\lambda}\int_0^1 \psi(s)\Big(p(s)\upsilon^*(s)+a(s)\gamma^{\alpha-1}\vartheta^{*\alpha}(s)\Big)\,ds\cdot t.$$

Разделив обе части последнего неравенства на γ, после нормировки в пределе получим требуемое соотношение.

Тогда согласно теореме 1 оператор A имеет в конусе $\tilde{K}$ пространства C, по крайней мере одну, неподвижную точку, что равносильно существованию, по крайней мере одного, положительного решения краевой задачи (1)–(2).

Лемма 3. *При выполнении условия*

$$\int_0^1 sp(s)\psi(s)\,ds<\frac{4-2\lambda}{\lambda^2}$$

положительное решение краевой задачи (1)–(2) *удовлетворяет оценке*

$$\|x\|_C\le M, \tag{12}$$

где $M=\left(\dfrac{2^{\alpha}(2-\lambda)}{\lambda^{\alpha+1}}\cdot\dfrac{1-\frac{\lambda^2}{4-2\lambda}\int_0^1 sp(s)\psi(s)\,ds}{\int_0^1 s^{\alpha}a(s)\psi(s)\,ds}\right)^{\dfrac{a1}{\alpha-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x(s)+f(s,x(s))\right)\,ds,\quad 0\le t\le 1,$$

которое, как было выше отмечено, равносильно граничной задаче (1)–(2).

В силу условия (1) теоремы 2, (8) и (10) имеем

$$x(t) \geq \frac{\lambda}{2-\lambda} \cdot t \int_0^1 \psi(s) \left(p(s)x(s) + a(s)x^{\alpha}(s)\right) \, ds \geq$$
$$\leq \frac{\lambda}{2-\lambda} \cdot t \int_0^1 \psi(s) \left(p(s)\frac{\lambda}{a2} s\|x\|_C + a(s)\left(\frac{\lambda}{a2}\right)^{\alpha} s^{\alpha}\|x\|_C^{\alpha}\right) \, ds \geq$$
$$\geq \frac{\lambda}{2-\lambda} \cdot t\left(\frac{\lambda}{a2}\|x\|_C \int_0^1 sp(s)\psi(s)\, ds + \left(\frac{\lambda}{a2}\right)^{\alpha} \|x\|_C^{\alpha} \int_0^1 s^{\alpha} a(s)\psi(s)\, ds\right).$$

Переходя в последнем неравенстве к максимуму на отрезке $[0,1]$, получим

$$\|x\|_C \geq \frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{\lambda}{a2}\|x\|_C \int_0^1 sp(s)\psi(s)\, ds + \left(\frac{\lambda}{a2}\right)^{\alpha} \|x\|_C^{\alpha} \int_0^1 s^{\alpha} a(s)\psi(s)\, ds\right) \geq$$
$$\geq \frac{\lambda^2}{2(2-\lambda)}\|x\|_C \int_0^1 sp(s)\psi(s)\, ds + \frac{\lambda}{2-\lambda}\left(\frac{\lambda}{a2}\right)^{\alpha} \|x\|_C^{\alpha} \int_0^1 s^{\alpha} a(s)\psi(s)\, ds,$$

откуда и следует искомая оценка (12).

Теорема 3. *Предположим, что* $f(t,u)$ *непрерывно-дифференцируема и монотонно возрастает по второму аргументу, выполнены условия теоремы 2 и*

$$\int_0^1 p(s)\, ds + \int_0^1 |f'_u(s,M)|\, ds < 2-\lambda.$$

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Несложно показать, что монотонный оператор A будет u_0-выпуклым на конусе $\tilde{K}$ пространства C, если в соответствующем определении положить $u_0 = \psi$.

Допустим теперь, что уравнение (7) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из вышеприведенного принципа единственности для выпуклых операторов следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0) = \max_{0\leq t\leq 1} y(t) = \|y\|_C$, $y(t_1) < 0$. Отсюда следует, что $\|y-\omega\|_C \geq \frac{a1}{a2}\|y\|_C$ при любой постоянной ω.

Из равенств

$$x_i(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)x_i(s) + f(s,x_i(s))\right)\, ds \quad (i=1,2), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

следует, что

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)\left(p(s)y(s) + f'_u\,(s,\tilde{x}(s))y(s)\right)\, ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где $\tilde{x}(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Взяв $\omega = 0$, в силу монотонности производной $f'_u(t,u)$ и свойств функции Грина (8), получим

$$\frac{1}{2}\|y\|_C \le \|y\|_C \le \frac{a1}{2(2-\lambda)}\left(\int_0^1 p(s)\,ds + \int_0^1 |f'_u(s,\tilde{x}(s))|\,ds\right)\|y\|_C \le$$

$$\le \frac{a1}{2(2-\lambda)}\left(\int_0^1 p(s)\,ds + \int_0^1 |f'_u(s,M)|\,ds\right)\|y\|_C,$$

то есть

$$\int_0^1 p(s)\,ds + \int_0^1 |f'_u(s,M)|\,ds \ge 2-\lambda.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (7), а следовательно, и краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

Приведем пример, иллюстрирующий выполнение условий вышеприведенных теорем.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$x''(t) + t^{\beta}x(t) + (e^t + 999)x^{\alpha}(t) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{13}$$

$$x(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 x(s)\,ds, \tag{14}$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 0$ — некоторые параметры, подлежащие определению.

Здесь, очевидно, $p(t) = t^{\beta}$, $\lambda = 1$. Положив $a(t) = 1000$, легко видеть, что при $\beta > 3$ выполнены условия теоремы 2 и леммы 3. Последняя обеспечивает оценку положительного решения задачи (13)–(14)

$$\|x\|_C \le M,$$

где $M^{\alpha-1} = \dfrac{2^{\alpha}(\alpha+2)(\alpha+3)}{1000}\left(1 - \dfrac{a1}{2(\beta+3)(\beta+4)}\right)$.

Единственность же положительного решения задачи (13)–(14) в силу теоремы 3 гарантирует условие

$$\frac{a1}{\beta+1} + \alpha M^{\alpha-1}(e-1) < 1.$$

В частности, взяв $\alpha = 2$ и $\beta = 4$, легко проверить выполнение данного условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев, Н. В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 3–23. — DOI: 10.20537/vm090101

2. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

3. Крейн, С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

4. Cabada, A. Existence results for a clamped beam equation with integral boundary conditions / A. Cabada, R. Jebari // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2020. — Vol. 70. — P. 1–17.

5. Hu, Q-Q. Existence of multiple solutions for second-order problem with Stieltjes integral boundary condition / Q-Q. Hu, B. Yan // J. Funct. Spaces. — 2021. — Vol. 2021. — P. 1–7.

6. Jiang, Y. Periodic solutions for second order damped boundary value problem with nonnegative Green's functions / Y. Jiang // Bound. Value Probl. — 2019. — Vol. 189. — P. 1–12.

7. Wang, F. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight / F. Wang, R. Ding // Bound. Value Probl. — 2021. — Vol. 96. — P. 1–17.

8. Yang, Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative / Z. Yang // Adv. Differ. Eq. — 2021. — Vol. 313. — P. 1–16.

9. Zhang, Y. Positive solutions for second-order differential equations with singularities and separated integral boundary condition / Y. Zhang, K. Abdella, W. Feng // Electron. J. Qual. Theory Differ. Eq. — 2020. — Vol. 75. — P. 1–12.

10. Zhong, S. Existence of positive solutions to periodic boundary value problems with sign-changing Green's function / S. Zhong, Y. An // Bound. Value Probl. — 2011. — Vol. 8. — P. 1–6.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Funktsionalno-differentsialnye uravneniya i ikh prilozheniya [Functional Differential Equations and Their Applications]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye nauki*, 2009, iss. 1, pp. 3-23. DOI: 10.20537/vm090101

2. Krasnoselskiy M.A. *Polozhitelnye resheniya operatornykh uravneniy* [Positive Solutions of Operator Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 396 p.

3. Kreyn S.G. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 544 p.

4. Cabada A., Jebari R. Existence Results for a Clamped Beam Equation with Integral Boundary Conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020, vol. 70, pp. 1-17.

5. Hu Q-Q., Yan B. Existence of Multiple Solutions for Second-Order Problem with Stieltjes Integral Boundary Condition. *J. Funct. Spaces*, 2021, vol. 2021, pp. 1-7.

6. Jiang Y. Periodic Solutions for Second Order Damped Boundary Value Problem with Nonnegative Green's Functions. *Bound. Value Probl.*, 2019, vol. 189, pp. 1-12.

7. Wang F., Ding R. On Positive Solutions of Second-Order Delayed Differential System with Indefinite Weight. *Bound. Value Probl.*, 2021, vol. 96, pp. 1-17.

8. Yang Z. Positive Solutions of a Second-Order Nonlinear Robin Problem Involving the First-Order Derivative. *Adv. Differ. Eq.*, 2021, vol. 313, pp. 1-16.

9. Zhang Y., Abdella K., Feng W. Positive Solutions for Second-Order Differential Equations with Singularities and Separated Integral Boundary Condition. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Eq.*, 2020, vol. 75, pp. 1-12.

10. Zhong S., An Y. Existence of Positive Solutions to Periodic Boundary Value Problems with Sign-Changing Green's Function. *Bound. Value Probl.*, 2011, vol. 8, pp. 1-6.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

Gusen E. Abduragimov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
Magomeda Gadzhieva St, 43a, 367000 Makhachkala, Russian Federation

Abstract. Problems of the type presented in this article describe the operation of a harmonic oscillator under the influence of external forces, which is fixed in the extreme left position and has some mechanism at right one, that controls the displacement according to the feedback from devices measuring the displacements along parts of the oscillator. Above in the introduction, references are given to some papers in which integral boundary conditions for differential equations were considered. The paper is organized as follows: the boundary value problem considered in the paper is reduced to an equivalent integral equation, and the existence of a positive solution of the integral equation is established using the fixed point principle of an operator defined on a certain cone. An a priori estimate of such a solution is obtained, which subsequently participates in the proof of the uniqueness of a positive solution. Sufficient conditions for uniqueness follow from the uniqueness principle for u_0 convex operators on a cone. At the end of the work, an example is given that demonstrates the results obtained.

Key words: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone, integral boundary conditions.