www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.1.1

УДК 519.635.8
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 03.12.2021
Дата принятия статьи: 02.02.2023

ЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОКРАЩЕННЫХ В РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Максим Леонидович Зайцев

Бизнес,
mlzaytsev@gmail.com
г. Москва, Российская Федерация

Вячеслав Борисович Аккерман

Кандидат физико-математических наук,
профессор факультета машиностроения и аэрокосмической техники,
Университет Западной Вирджинии
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 г. Моргантаун, США

Аннотация. Большой научный интерес представляют различные способы сведения полной системы гидродинамических уравнений по объему к системе уравнений на поверхности. В статье получены в явном виде «стационарные» системы интегро-дифференциальных уравнений, которые являются следствиями нестационарных уравнений Эйлера сжимаемой жидкости и полной системы уравнений гидродинамики и у которых производные по времени отсутствуют. Использован метод редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений, предложенный ранее авторами и обобщенный очевидным образом на случай интегро-дифференциальных уравнений. Эволюция всего потока в объеме задается изменяющимися во времени данными на некоторой поверхности этого потока. Если к ним задать корректную задачу, то мы можем определить весь нестационарный поток в объеме без решения нестационарной задачи. Особенность данной работы заключается в том, что все сокращенные в размерности уравнения получены в явном виде, в отличие от предыдущих работ авторов, где предлагалось до 200–500 уравнений с сокращенной размерностью, которые очень сложно исследовать и моделировать. Получены также новые нестационарные интегральные уравнения, которые определяют эволюцию потока. Также предлагается новый способ переопределения любой системы УрЧП с помощью общего интегрального соотношения по пространству, следующего из теоремы разложения Гельмгольца.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений, размерность дифференциальных уравнений, гидродинамика, уравнения Эйлера, сжимаемая жидкость, интегро-дифференциальные уравнения, редукция.

Введение

На сегодняшний день прямое численное моделирование процессов горения, обтекания, развития гидродинамических неустойчивостей, турбулентности, а также многих других гидродинамических явлений по ряду причин вычислительного характера невозможно или чрезвычайно затруднено [8–10; 13; 14; 17; 20]. Большой интерес представляют различные способы сведения полной системы гидродинамических уравнений и химической кинетики по объему к уравнению или системе уравнений на поверхности, приводящие к уменьшению вычислительных мощностей [4; 5]. В теории горения, в частности, поставленную задачу можно было бы существенно упростить, если бы удалось свести полную систему уравнений гидродинамики горения к единственному уравнению, описывающему положение фронта реакции [16; 19]. Научный интерес также представляет подобная процедура для получения описания поверхностей других гидродинамических разрывов [8], например, тангенциального разрыва, который встречается в струях, следах от летящего тела или на поверхности воды в виде ветровых волн, а также является одним из препятствий, стоящих на пути осуществления управляемого инерциального термоядерного синтеза [2; 11; 12]. В частности, необходимо учитывать динамику тангенциального разрыва при описании гидродинамических неустойчивостей (Релея — Тейлора, Дарье — Ландау, Мешкова — Рихтмайера, Кельвина — Гельмгольца), гравитационных волн и ряда других явлений [8]. Данный метод позволяет также рассчитать гидродинамические разрывы с учетом вязкости, образования звука и других изменений плотности газов и жидкостей, пользуясь информацией только на их поверхностях. В общем случае решение нелинейной задачи описания тангенциального разрыва не найдено. Аналитическое решение может быть получено лишь в двух предельных случаях для бесконечно тонких пленок и в приближении «опрокинутой мелкой воды» [15; 18].

В данной работе мы сводим нестационарные уравнения Эйлера сжимаемой жидкости и полную систему уравнений гидродинамики к «стационарным» интегро-дифференциальным уравнениям, у которых производные по времени отсутствуют. С помощью этих уравнений гидродинамические разрывы могут «видеть» весь внешний поток в реальном времени. А именно, если есть система уравнений движения разрыва, то, вычисляя движение самого разрыва, а также других величин на его поверхности, можно сразу вычислить весь внешний поток без привязки ко времени. Все сокращенные в размерности уравнения получены в явном виде, в отличие от предыдущих работ авторов [1; 3], где предлагались до 200–500 уравнений с сокращенной размерностью, которые очень сложно исследовать и моделировать.

В работе авторов [7] нестационарные уравнения Эйлера несжимаемой жидкости и Навье — Стокса с постоянной плотностью сводятся к «стационарным» интегро-дифференциальным уравнениям, у которых производные по времени отсутствуют. Однако системы уравнений, приведенные в данной статье, к ним формально не сводятся, потому что здесь используется другой способ переопределения и учитывается существенным образом функция зависимости давления от плотности жидкости.

1. Уравнения Эйлера сжимаемой жидкости в изоэнтропическом 3D-потоке

В изоэнтропическом 3D потоке, если плотность $\rho(\mathbf{r},t) \neq \mathrm{const}$, но $s(\mathbf{r},t) = \mathrm{const}$, где $s(\mathbf{r},t)$ — энтропия жидкости, то есть существует однозначная связь между давлением $P(\mathbf{r},t)$ и плотностью $\rho(\mathbf{r},t): P = P_S(\rho)$, уравнения Эйлера примут вид [8]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{\partial P_S(\rho)}{\rho\partial\rho}\nabla\rho = 0, \tag{1}$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$; $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — скорость жидкости в точке $\mathbf{r} = (x,y,z)$ в момент времени t; $\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$.

Взаимно-однозначно перейдем к лагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени $\mathbf{r}_0$, t (то есть к разметке).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0.t) \text{ и } \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),\ \mathbf{r}_0\Big|_{t=0} = \mathbf{r},\ \mathbf{r}\Big|_{t=0} = \mathbf{r}_0. \tag{4}$$

Тогда из системы уравнений (1)–(3) следует, что [4]

$$\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\mathbf{r}_0}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0(\rho_0)}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{6}$$

где $\rho_0(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla\times\mathbf{u}_0$ — начальные данные у $\rho(\mathbf{r},t)$ и $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}$ при $t = 0$. Из (5), (6) получаем

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0,t)}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_0\mathbf{r}}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{7}$$

где $\nabla_0 = (\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0})$.

Пусть мы имеем поток $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ во всем объеме и достаточно быстро убывающий на бесконечности. Тогда выражение для скорости $\mathbf{u}$ может быть записано в виде [14]:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \times \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}} \int \frac{\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}', \tag{8}$$

где $\nabla_{\mathbf{r}} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Перейдем в подынтегральном выражении в формуле (8) к переменным Лагранжа (4), используя (6), (7):

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Big(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}_0'} d^3\mathbf{r}_0' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Big(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big)\cdot \operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \mathbf{r}_0'} d^3\mathbf{r}_0' =$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\int \Big(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big) \times \frac{\Big(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0\Big)\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Big(\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big)M(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0', \tag{9}$$

где

$$M(\mathbf{r}_0', t) = \frac{\partial(u_x(\mathbf{r}_0', t), y', z')}{\partial \mathbf{r}_0'} + \frac{\partial(x', u_y(\mathbf{r}_0', t), z')}{\partial \mathbf{r}_0'} + \frac{\partial(x', y', u_z(\mathbf{r}_0', t))}{\partial \mathbf{r}_0'}.$$

Используя определение переменных Лагранжа (4), находим

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{1}{4\pi}\int \Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big) \times \frac{\Big(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0\Big)\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big)M(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0'. \tag{10}$$

Продифференцируем выражения (10) по лагранжеву времени t. Тогда, используя уравнения Эйлера (1)–(3), получим некоторые интегральные выражения вида

$$-\frac{\partial P_S(\rho)}{\rho\partial\rho}\nabla\rho = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\right) \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int \Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big) \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' +$$
$$+\frac{3}{4\pi}\int \Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big) \times$$
$$\times \left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^5}\Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\right)\right) d^3\mathbf{r}_0' -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\right)M(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' - \frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t))\frac{\partial M(\mathbf{r}_0', t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^3} d^3\mathbf{r}_0' +$$
$$+\frac{3}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t))M(\mathbf{r}_0', t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)|^5}\Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\Big)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)\right) d^3\mathbf{r}_0', \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}=\frac{\partial\left(\frac{\partial}{\partial t}u_x(\mathbf{r}'_0,t),y',z'\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),\frac{\partial}{\partial t}y'(\mathbf{r}'_0,t),z'\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),y',\frac{\partial}{\partial t}z'(\mathbf{r}'_0,t)\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+$$
$$+\frac{\partial\left(\frac{\partial}{\partial t}x'(\mathbf{r}'_0,t),u_y(\mathbf{r}'_0,t),z'\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(x',\frac{\partial}{\partial t}u_y(\mathbf{r}'_0,t),z'\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(x',u_y(\mathbf{r}'_0,t),\frac{\partial}{\partial t}z'(\mathbf{r}'_0,t)\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial}{\partial t}x'(\mathbf{r}'_0,t),y',u_z(\mathbf{r}'_0,t\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(x',\frac{\partial}{\partial t}y'(\mathbf{r}'_0,t),u_z(\mathbf{r}'_0,t\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial\left(x',y\,\frac{\partial}{\partial t}u_z(\mathbf{r}'_0,t)\right)}{\partial\mathbf{r}'_0}.$$

Перепишем выражение (6) в виде

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\rho(\mathbf{r}_0)}{\rho}. \tag{12}$$

Используя (12), находим, что компоненты вектора градиента плотности $\nabla\rho$ в формулах (11) в переменных Лагранжа (4) выражаются следующим образом

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\partial(\rho,y,z)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}}\frac{\partial(\rho,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}=\frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\frac{\partial(\rho,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{13}$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\frac{\partial(x,\rho,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\frac{\partial(x,y,\rho)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{15}$$

Таким образом, формально в переменных Лагранжа мы получили систему из 13 интегро-дифференциальных уравнений (10)–(12) и 13 неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, где производная по времени от этих неизвестных отсутствует в явном виде. Условие $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)\neq 0$ здесь существенно (в противном случае, уравнения (8)–(10) превратятся в верные тождества, и никакого переопределения при этом нет), то есть потенциальное решение этим методом найти невозможно.

Если мы в уравнении (11) в левую часть поставим $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t=\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, в правую часть $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t=-\nabla P/\rho=-(\nabla\rho/\rho)\partial P_S(\rho)/\partial\rho$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)=\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, то с учетом (12)–(15) получим систему из трех интегро-дифференциальных уравнений для определения лагранжевых координат $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, где старшие производные по времени выражены через остальные, а значит и всего потока. Формально тогда интегральные уравнения (11) в переменных Лагранжа определяют эволюцию потока (с начальными условиями $\mathbf{r}\Big|_{t=0}=\mathbf{r}_0$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t\Big|_{t=0}=\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0,t)$) и являются следствиями уравнений Эйлера (1)–(3).

В случае, если имеются границы у потока, то выражения (8), (9) несколько усложняются [14], но уравнения, аналогичные (10)–(12), также можно получить.

Фактически, чтобы редуцировать уравнения Эйлера (1)–(3), достаточно использовать только одно из уравнений (8). Для этого нужно применить прием сокращения размерности (редукции) в переопределенных системах УрЧП [6], обобщенный очевидным образом на случай интегро-дифференциальных уравнений.

2. Полная система нестационарных уравнений гидродинамики в 3D-потоке

Рассмотрим уравнения гидродинамики в 3D-пространстве в виде [8]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right) + \frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\nabla \sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{18}$$

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)s\right] = Q - \operatorname{div} \mathbf{q} + \Phi, \tag{19}$$

$$T = T(\rho, s), \quad P = P(\rho, s), \tag{20}$$

$$\nabla w = T \cdot \nabla s + \frac{\nabla P}{\rho}, \tag{21}$$

где ρ, $\mathbf{u}$, P, T, w и s — плотность, скорость, давление, температура, удельная тепловая функция и энтропия (на единицу массы) рассматриваемой среды соответственно. Здесь $\mathbf{F}$, Q — объемные сила и тепловыделение; $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ — тепловой поток (λ — теплопроводность); σ — тензор вязких напряжений, для которого имеем

$$\nabla \sigma = \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \mathbf{u})\right), \tag{22}$$

где μ — сдвиговая динамическая вязкость. Входящая в уравнение (19) диссипативная функции Φ равна

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \sum_{k,i=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2, \tag{23}$$

где $(u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z)$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Уравнения (20) и (21) — термодинамические соотношения, которые зависят от свойств рассматриваемой среды.

Введем «поправку» $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}, t)$ к вектору $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и «псевдоплотность» $\rho^\bullet(\mathbf{r}, t)$, которые определим из уравнений:

$$\frac{\partial \rho^\bullet}{\partial t} + (\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla \rho^\bullet + \rho^\bullet \operatorname{div}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}) = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} + \big((\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})\nabla\big)\, \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\alpha}\nabla)\mathbf{u} + T \cdot \nabla s + \frac{\nabla \sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho} = 0. \tag{25}$$

Почленно сложим формулы (17) и (25). Тогда, учитывая (21), находим, что

$$\frac{\partial(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})}{\partial t} + \big((\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})\nabla\big)\, (\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}) + \nabla w =$$

$$= \frac{\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} - (\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha}) \times (\boldsymbol{\omega} + \nabla \times \boldsymbol{\alpha}) + \nabla \left(\frac{(\mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha})^2}{2}\right) + \nabla w = 0. \tag{26}$$

Векторное поле $\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}$ формально можно рассмотреть, как эйлеров изоэнтропический поток с плотностью $\rho^{\bullet}(\mathbf{r},t)$ и энтальпией $w(\mathbf{r},t)$. Взяв операцию «$\nabla\times$» от обеих частей (26), находим, что

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})}{\partial t}=\nabla\times\left[(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\times(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\right]. \tag{27}$$

Перейдем к псевдолагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени $\mathbf{r}_0$, t (то есть к разметке).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)\ \text{ и }\ \mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}_0\Big|_{t=0},\quad \mathbf{r}\Big|_{t=0}=\mathbf{r}_0. \tag{28}$$

Тогда уравнения (24) и (27) можно преобразовать к виду [4]:

$$\frac{(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\mathbf{r}_0}{\rho^{\bullet}}=\frac{\big(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)+\nabla\times\boldsymbol{\alpha}_0(\mathbf{r}_0)\big)}{{\rho^{\bullet}}_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\rho^{\bullet}}\frac{\partial(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{{\rho^{\bullet}}_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_0$, ${\rho^{\bullet}}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0=\nabla\times\mathbf{u}_0$ — начальные распределения величин $\boldsymbol{\alpha}$, $\rho^{\bullet}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{u}\Big|_{t=0}=\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$. Положим здесь $\boldsymbol{\alpha}_0\equiv 0$ и ${\rho^{\bullet}}_0\equiv\rho_0$. Тогда, как было показано, уравнения (29)–(30) можно преобразовать к виду (5), (6), а сама формула (30) принимает вид

$$\frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{\rho^{\bullet}}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}. \tag{31}$$

Из (29), (30) получаем

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0,t)}{\rho^{\bullet}}=\frac{\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0)\cdot\nabla_0\mathbf{r}}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}, \tag{32}$$

где $\nabla_0=(\frac{\partial}{\partial x_0},\frac{\partial}{\partial y_0},\frac{\partial}{\partial z_0})$.

Пусть мы имеем поток $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r},t)$ во всем пространстве и достаточно быстро убывающий на бесконечности. Аналогично (8) выражение для $\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}$ может быть записано в виде [14]:

$$\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\times\int\frac{(\boldsymbol{\omega}+\nabla\times\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'+\frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\int\frac{\operatorname{div}(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}', \tag{33}$$

где $\nabla_{\mathbf{r}}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$. Перейдем в подынтегральном выражении в формуле (33) к переменным (28), используя (31), (32):

$$\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}=(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}_0,t)=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)=-\frac{1}{4\pi}\int\Big(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)\Big)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t))M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)-\mathbf{r}'(\mathbf{r}'_0,t)|^3}d^3\mathbf{r}'_0, \tag{34}$$

где

$$M(\mathbf{r}'_0,t)=\frac{\partial((u+\alpha)_x(\mathbf{r}'_0,t),y',z')}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial(x',(u+\alpha)_y(\mathbf{r}'_0,t),z')}{\partial\mathbf{r}'_0}+\frac{\partial(x',y',(u+\alpha)_z(\mathbf{r}'_0,t))}{\partial\mathbf{r}'_0}.$$

Продифференцируем выражения (34) по псевдолагранжеву времени t. Тогда получим некоторые интегральные выражения вида

$$\frac{\partial(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} = I\left(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t), \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t}, (\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}_0,t), \frac{\partial(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t}\right). \tag{35}$$

Используя уравнения (26), получим, что

$$\frac{\partial(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t^2} = -\nabla w(\rho,s). \tag{36}$$

Из уравнений (16), (19), (25) и (26) следует, что

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} - \boldsymbol{\alpha}\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{37}$$

$$\rho T\left[\frac{\partial s(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} - \boldsymbol{\alpha}\nabla s\right] = Q - \mathrm{div}\,\mathbf{q} + \Phi, \tag{38}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} + (\boldsymbol{\alpha}\nabla)\mathbf{u} + T\cdot\nabla s + \frac{\nabla\sigma}{\rho} + \frac{\mathbf{F}}{\rho} = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} = -w(\rho,s) - \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t}. \tag{40}$$

В выражениях для пространственных производных в (37)–(40) аналогично (12)–(15) можно перейти к псевдолагранжевым переменным (28).

Если выражения (36) подставить в интегральные уравнения (35), то вместе с уравнениями (34) мы будем иметь 9 «стационарных» интегро-дифференциальных уравнений от 14 неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $s(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0,t)$ и $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, где производная по времени от этих неизвестных отсутствует в явном виде. Чтобы получить недостающие уравнения, проделаем следующую процедуру. Подставим формулы (36) в уравнения (35) и продифференцируем их по псевдолагранжеву времени t. Выражения для производных $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial s(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ подставим из формул (36)–(38). Получим три новых интегральных уравнений вида (35) и проделаем эту процедуру еще раз, используя выражения (39), (40) для $\partial\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$ и $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$. В результате получим еще 6 интегро-дифференциальных уравнений вида (35), и вместе с уже имеющимися 9 уравнениями (34), (35) можно составить систему из 15 «стационарных» уравнений от 14 неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $s(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0,t)$ и $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$.

Эта система уравнений должна допускать параметрическое семейство решений (зависимость от времени t). Каждое конкретное решение должно выделяться данными на некоторой поверхности, которые должны быть найдены независимо.

В двумерном случае эта система уравнений будет несколько проще. Выражение (35) можно дифференцировать по времени еще раз и получать новые соотношения. Однако не все они могут быть независимыми. Достаточно продифференцировать уравнения (35) ограниченное число раз, и при выполнение некоторого условия (см. приложение А) все последующие соотношения будут следствиями ранее полученных уравнений. Заметим, что уравнения гидродинамики (16)–(21) можно редуцировать и не используя замену переменных вида (28), а ограничившись только переменными Лагранжа (4). Для редукции мы используем только то, что в новых переменных производная от завихренности по времени в соотношениях (8) или (33) выражалась через пространственные производные от остальных функций. Фактически мы предлагаем новый способ переопределения любой системы уравнений типа (16)–(21) с помощью общего интегрального соотношения по пространству [14].

Заключение

Сокращение размерности в уравнениях гидродинамики является важной задачей, которая позволяет упростить расчеты гидродинамических потоков. В целом в приложениях при конструировании двигателей внутреннего сгорания, ракетных двигателей, газовых турбин и др. данное исследование необходимо для снижения вычислительных мощностей, затрачиваемых для решения этих задач в настоящее время. В частности, снижение размерности может позволить сократить продолжительность таких расчетов на один или несколько порядков. Снижение размерности также может быть использовано, чтобы верифицировать полные расчеты гидродинамических потоков, используя упрощенные расчеты на основе результатов, полученных в данной работе, как тестовые.

В данной работе мы получили «стационарные» системы интегро-дифференциальных уравнений, которые являются следствиями нестационарных уравнений Эйлера сжимаемой жидкости (часть 1) и полной системы уравнений гидродинамики в неограниченном пространстве (часть 2). Обратное показывается на примере уравнений Эйлера (приложение А). Если к ним задать корректную задачу, то мы можем определить весь нестационарный поток в объеме без решения нестационарной задачи. Достаточно задать изменяющиеся во времени данные только на некоторой поверхности этого потока, которые должны быть определены независимо. Например, из расчета другой задачи, описывающей эволюцию жидкости на этой поверхности в терминах самой поверхности. Начальные данные задачи Коши для всего потока в неограниченном пространстве учитываются в самих редуцированных уравнениях (см. (5), (6)).

Получены также интегральные нестационарные уравнения в новых переменных (лагранжевых (4) и псевдолагранжевых (28)), которые определяют эволюцию потока.

В статье также предлагается новый способ переопределения любой системы УрЧП типа (16)–(21) с помощью общего интегрального соотношения по пространству, следующего из теоремы разложения Гельмгольца [14].

Поскольку в системах (11) и (34)–(36) есть интегрирование по пространству, то редукция по пространственным переменным данным методом невозможна.

Приложение А. Достаточные условия корректности редуцированной системы интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из 13 интегро-дифференциальных уравнений (10)–(12). Выражение (10) можно дифференцировать по времени еще раз и получать новые соотношения и соответственно получать новые уравнения помимо (10)–(12). Найдем условия, при которых из этих редуцированных уравнений будут прямо следовать уравнения Эйлера (1)–(3).

Продифференцируем по лагранжеву времени t первое равенство в уравнении (10).

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t). \tag{A.1}$$

Аналогично продифференцируем по лагранжеву времени уравнение (12). Тогда

$$\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{A.2}$$

Аналогично продифференцируем левое равенство в уравнении (11). Имеем,

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial P_S(\rho)}{\partial \rho} - \rho\frac{\partial^2 P_S(\rho)}{\partial \rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t}\nabla\rho - \frac{\partial P_S(\rho)}{\rho\partial\rho}\frac{\partial \nabla\rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t), \tag{A.3}$$

где

$$\frac{\partial \nabla\rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial(\rho, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\frac{\partial\rho}{\partial t}, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\rho, \frac{\partial y}{\partial t}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\rho, y, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial(x, \rho, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, \rho, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial\rho}{\partial t}, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \rho, \frac{\partial z}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial(x, y, \rho)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial t}, y, \rho)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, \frac{\partial y}{\partial t}, \rho)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} + \frac{\partial(x, y, \frac{\partial\rho}{\partial t})}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \end{array}\right].$$

Обозначим $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r}_0', t)$. Продифференцируем теперь правое равенство в уравнении (11). Получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi}\int(E_1 + E_2)d^2\mathbf{r}_0', \tag{A.4}$$

где

$$\begin{aligned} E_1 = &-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'\right) \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right) \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \\ &+ 6\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right) \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right) - \\ &- (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + 6(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right) + \\ &+ 3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'\right)\right) + \\ &+ 3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)^2\right) - \\ &- 15(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times \left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7}\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)^2\right), \end{aligned}$$

$$E_2 = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\dfrac{\partial^2 M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t^2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'\right) M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} +$$

$$+6\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right) M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} -$$

$$-2\frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\dfrac{\partial M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + 3\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)^2 +$$

$$+6\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)\dfrac{\partial M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} +$$

$$+3\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{r}'\right) -$$

$$-15\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7}\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0',t), y', z'\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(u_x(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}, z'\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(u_x(\mathbf{r}_0',t), y', \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\right) +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial y'}{\partial t}, z'\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t), y', \frac{\partial z'}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(u_x(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial y'}{\partial t}, \frac{\partial z'}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}, u_y(\mathbf{r}_0',t), z'\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0',t), z'\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', u_y(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\right) +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}, \frac{\partial u_y}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t), z'\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', \frac{\partial u_y}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial z'}{\partial t}\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}, u_y(\mathbf{r}_0',t), \frac{\partial z'}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}, y', u_z(\mathbf{r}_0',t)\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}, u_z(\mathbf{r}_0',t)\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', y', \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0',t)\right) +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}, \frac{\partial y'}{\partial t}, u_z(\mathbf{r}_0',t)\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(x', \frac{\partial y'}{\partial t}, \frac{\partial u_z}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t)\right) + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0'}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}, y', \frac{\partial u_z}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t)\right).$$

В итоге мы имеем переопределенную систему из 23 интегро-дифференциальных уравнений в объеме (10)–(12), (A.1)–(A.4) от 20 неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, где производная по времени от этих неизвестных отсутствует в явном виде.

Пусть система уравнений (10)–(12), (A.1)–(A.4) допускает некоторое параметрическое семейство решений $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, где $t \in [0,T]$, $T > 0$, параметр такой, что $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)\Big|_{t=0} = \mathbf{r}_0$,

$\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t\Big|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)$. Рассмотрим $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)$, $\rho(\mathbf{r}_0,t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0,t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)/\partial t^2$ просто как обозначения неизвестных функций, которые зависят от параметра t и $\mathbf{r}_0$. Продифференцируем по параметру t первое равенство в (10), уравнение (12) и левое равенство в (11) и вычтем их почленно из (A.1), (A.2) и (A.3) соответственно. Тогда

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}1} = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}, \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial(\delta_{x1},y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{x,\partial(\delta_{y1},z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \frac{\partial(x,y,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = -\frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{\rho^2}\delta_\rho, \tag{A.6}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial P_S(\rho)}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial^2 P_S(\rho)}{\partial\rho^2}\right)\delta_\rho\nabla\rho - \frac{\partial P_S(\rho)}{\rho\partial\rho}\mathbf{G} = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}2}, \tag{A.7}$$

где

$$\mathbf{G} = \frac{\rho}{\rho_0(\mathbf{r}_0)}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\dfrac{\partial(\rho,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(\delta_\rho,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(\rho,\delta_{y1},z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(\rho,y,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\dfrac{\partial(x,\rho,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(\delta_{x1},\rho,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(x,\delta_\rho,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(x,\rho,\delta_{z1})}{\partial(x_0,y_0,z_0)} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\dfrac{\partial(x,y,\rho)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(\delta_{x1},y,\rho)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(x,\delta_{y1},\rho)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} + \dfrac{\partial(x,y,\delta_\rho)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)\Big], \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} = (\delta_{x1},\delta_{y1},\delta_{z1}), \quad \delta_\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho(\mathbf{r}_0,t)\Big],$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2} = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)\Big], \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2} = (\delta_{x2},\delta_{y2},\delta_{z2}), \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}1} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathbf{u}(\mathbf{r}_0,t)\Big],$$
$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}1} = (\delta_{u_x1},\delta_{u_y1},\delta_{u_z1}), \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}2} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0,t) - \frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0,t)\Big], \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}2} = (\delta_{u_x2},\delta_{u_y2},\delta_{u_z2}).$$

Продифференцируем правую часть выражения (10) по параметру t и вычтем его из правой части выражения (11). Учитывая (A.1), имеем:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2} = -\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r}'_0 - \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r}'_0 + \\ + \frac{3}{4\pi}\int(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}'_0)\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\right)d^3\mathbf{r}'_0 - \\ - \frac{1}{4\pi}\int\frac{(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r}'_0 - \frac{1}{4\pi}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta\dfrac{\partial M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d^3\mathbf{r}'_0 + \\ + \frac{3}{4\pi}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})d^3\mathbf{r}'_0,\end{gathered} \tag{A.8}$$

где

$$\delta\frac{\partial M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t}=\frac{\partial(\delta_{u_x'1},y',z')}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(u_x(\mathbf{r}_0',t),\delta_{y'1},z')}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(u_x(\mathbf{r}_0',t),y',\delta_{z'1})}{\partial\mathbf{r}_0'}+$$
$$+\frac{\partial(\delta_{x'1},u_y(\mathbf{r}_0',t),z')}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(x',\delta_{u_y'1},z')}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(x',u_y(\mathbf{r}_0',t),\delta_{z'1})}{\partial\mathbf{r}_0'}+$$
$$+\frac{\partial(\delta_{x'1},y',u_z(\mathbf{r}_0',t))}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(x',\delta_{y'1},u_z(\mathbf{r}_0',t))}{\partial\mathbf{r}_0'}+\frac{\partial(x',y',\delta_{u_z'1})}{\partial\mathbf{r}_0'},$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}=\frac{\partial\mathbf{r}'}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t)-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathbf{r}'(\mathbf{r}_0',t)\Big],\qquad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}'1}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0',t)-\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mathbf{u}(\mathbf{r}_0',t)\Big].$$

Продифференцируем теперь правую часть выражения (11) по параметру t и вычтем его из уравнения (A.4). Находим, что

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}2}=\frac{1}{4\pi}\int(\delta E_1+\delta E_2)d^3\mathbf{r}_0',\tag{A.9}$$

$$\delta E_1=-\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2}\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+$$
$$+3\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})-$$
$$-\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\left(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+$$
$$+3\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\times\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})+$$
$$+3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2})\right)+$$
$$+3(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)+$$
$$+3(\mathbf{r}-\mathbf{r})\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)+$$
$$+3(\mathbf{r}-\mathbf{r})\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)-$$
$$-15(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\left(\frac{(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}_0')\cdot\nabla_0)\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7}\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}'\right)\right)\Big((\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\Big)\right),$$

$$\delta E_2=-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta\dfrac{\partial^2M(\mathbf{r}_0',t)}{\partial t^2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\frac{(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2})M(\mathbf{r}_0',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+$$

$$+3\frac{\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\dfrac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\Big((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2})\Big)M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}-$$

$$-\frac{(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\dfrac{\partial^2 M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t^2}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}-\frac{\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\dfrac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\delta\dfrac{\partial M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+$$

$$+3\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Big((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\Big)\dfrac{\partial M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}+$$

$$+3\,\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left((\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\Big(\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\dfrac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\Big)\right)\delta\dfrac{\partial M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}+$$

$$+3\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\Big)+3\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2})+$$

$$+3\frac{(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1})M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\Big)-$$

$$-15\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')M(\mathbf{r}'_0,t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\Big(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\Big)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}-\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'1}),$$

$$\delta\frac{\partial^2 M(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{u'_x2},y',z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),\delta_{y'2},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),y',\delta_{z'2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial u_x(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t},\delta_{y'1},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial u_x(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t},y',\delta_{z'1}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),\frac{\partial y'}{\partial t},\delta_{z'1}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{u'_x1},\frac{\partial y'}{\partial t},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{u'_x1},y',\frac{\partial z'}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(u_x(\mathbf{r}'_0,t),\delta_{y'1},\frac{\partial z'}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'2},u_y(\mathbf{r}'_0,t),z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\delta_{u'_y2},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',u_y(\mathbf{r}'_0,t),\delta_{u'_z2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial x'}{\partial t},\delta_{u'_y1},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\frac{\partial u_y(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t},\delta_{z'1}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial x'}{\partial t},u_y(\mathbf{r}'_0,t),\delta_{z'1}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'1},\frac{\partial u_y(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t},z'\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\delta_{u'_y1},\frac{\partial z'}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'1},u_y(\mathbf{r}'_0,t),\frac{\partial z'}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'2},y',u_z(\mathbf{r}'_0,t)\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\delta_{y'2},u_z(\mathbf{r}'_0,t)\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',y',\delta_{u'_z2}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial x'}{\partial t},\delta_{y'1},u_z(\mathbf{r}'_0,t)\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\frac{\partial y'}{\partial t},\delta_{u'_z1}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\frac{\partial x'}{\partial t},y',\delta_{u'_z1}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'1},\frac{\partial y'}{\partial t},u_z(\mathbf{r}'_0,t)\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(x',\delta_{y'1},\frac{\partial u_z(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'_0}\left(\delta_{x'1},y',\frac{\partial u_z(\mathbf{r}'_0,t)}{\partial t}\right),$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}'2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial t^2}(\mathbf{r}'_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}(\mathbf{r}'_0, t)\right], \qquad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}'2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{r}'_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}'_0, t)\right].$$

Пусть на некоторой поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^3$ известны величины $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, которые согласуются следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right] = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right] = 0, \quad \mathbf{r}_0 \in S, t \in [0, T], \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right] = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right] = 0, \quad \mathbf{r}_0 \in S, t \in [0, T], \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\mathbf{r}_0, t)\right] = 0, \quad \mathbf{r}_0 \in S, t \in [0, T]. \tag{A.12}$$

Пусть мы имеем решение системы уравнений (10)–(12), (A.1)–(A.4) от неизвестных функций $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, которые заданы на поверхности S и согласуются сообразно условиям (A.10)–(A.12). Пусть на этом решении линейная система (A.5)–(A.9) из 13 интегро-дифференциальных уравнений и 13 неизвестных $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1}$, $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2}$, δ_ρ с условием на поверхности S

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}1} = 0,\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2} = 0,\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}1} = 0,\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{r}2} = 0,\ \delta_\rho = 0,\ \mathbf{r}_0 \in S,\ t \in [0, T] \tag{A.13}$$

имеет только нулевое решение в пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда согласно самому способу получения системы уравнений (A.5)–(A.9) для решения $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$ выполняются соотношения (A.10)–(A.12), но во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Кроме того, из левого равенства уравнения (11) и первого равенства в уравнении (10), следует, что

$$-\frac{\partial P_S(\rho)}{\rho\partial\rho}\nabla\rho = -\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}_0, t)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)]\right]. \tag{A.14}$$

Система уравнений (A.14) с учетом уравнений (12)–(15) является системой уравнений Эйлера в переменных Лагранжа. Скорость и плотность тогда будут определяться по формулам $\mathbf{u} = \partial\mathbf{r}/\partial t(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t)$, $\rho = \rho(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t)$.

Следует отметить, что $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$, $\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial\rho(\mathbf{r}_0, t)/\partial t$, $\partial^2\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$, $\partial^2\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t^2$ не могут быть заданы на поверхности произвольно. Они фиксируются заранее из начального распределения $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)\Big|_{t=0} = \mathbf{r}_0$, $\partial\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)/\partial t|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Эти данные могут быть найдены, например, из независимых экспериментальных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // ЖВММФ. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1518–1530.

2. Велихов, Е. П. Физические явления в газоразрядной плазме / Е. П. Велихов, А. С. Ковалев, А. Т. Рахимов. — М. : Наука, 1987. — 160 с.

3. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 2. — С. 5–27.

4. Зайцев, М. Л. К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // ЖЭТФ. — 2009. — Т. 135, № 4. — С. 800–819.

5. Зайцев, М. Л. Метод описания стационарного фронта реакции в двухмерном потоке / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Письма в ЖЭТФ. — 2010. — Т. 92, № 11. — С. 813–816.

6. Зайцев, М. Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 43–67. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5

7. Зайцев, М. Л. Явное представление сокращенных в размерности уравнений Эйлера и Навье — Стокса несжимаемой жидкости в интегральной форме / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2022. — Т. 25, № 1. — С. 5–20. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.1.1

8. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. VI : Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.

9. Математическая теория горения и взрыва / Я. Б. Зельдович, Г. И. Баренблат, В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе. — М. : Наука, 1980. — 478 с.

10. Мержанов, А. Г. Теория волн горения в гомогенных средах / А. Г. Мержанов, Б. И. Хайкин. — Черноголовка : Из-во ОИХФ РАН, 1992. — 162 с.

11. Напартович, А. П. Механизмы неустойчивости тлеющего разряда повышенного давления / А. П. Напартович, А. Н. Старостин // Химия плазмы. — М. : Атомиздат, 1979. — Вып. 6. — С. 153–208.

12. Недоспасов, А. В. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы / А. В. Недоспасов, В. Д. Хаит. — М. : Наука, 1979. — 168 с.

13. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

14. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Изд-во МГУ, 1999. — 799 с.

15. Book, D. L. Rayleigh-Taylor instability in the “shallow-water” approximation / D. L. Book, E. Ott, A. L. Sulton // Phys. Fluids. — 1974. — Vol. 17, № 4. — P. 676–678.

16. Bychkov, V. Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity / V. Bychkov // Phys. Fluids. — 1998. — Vol. 10, № 8. — P. 2091–2098.

17. Law, C. K. Combustion Physics / C. K. Law. — N. Y. : Cambridge University press, 2006. — 720 p.

18. Ott, E. Nonlinear evolution of the Rayleigh — Taylor instability of thin layer / E. Ott // Phys. Rev. Lett. — 1972. — Vol. 29. — P. 1429–1432.

19. Sivashinsky, G. I. Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations / G. I. Sivashinsky // Acta Astronaut. — 1977. — Vol. 4. — P. 1177–1215.

20. Williams, F. A. Combustion Theory / F. A. Williams. — Menlo Park, CA : Benjamin Cummings, 1985. — 708 p.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyakh gidrodinamiki [Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations]. *ZhVMMF*, 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1518-1530.

2. Velikhov E.P., Kovalev A.S., Rakhimov A.T. *Fizicheskie yavleniya v gazorazryadnoy plazme* [Physical Phenomena in Gas-Discharge Plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 160 p.

3. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki [Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and Its Application to Equations of Hydrodynamics]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 5-27.

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. K nelineynoy teorii dvizheniya poverkhnostey gidrodinamicheskikh razryvov [Nonlinear Theory for the Motion of Hydrodynamic Discontinuity Surfaces]. *ZhETF*, 2009, vol. 135, no. 4, pp. 800-819.

5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Metod opisaniya statsionarnogo fronta reaktsii v dvukhmernom potoke [Method for Describing the Steady-State Reaction Front in a Two-Dimensional Flow]. *Pisma v ZhETF*, 2010, vol. 92, no. 11, pp. 813-816.

6. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical Physics]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 4, pp. 43-67. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.4.5

7. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Yavnoe predstavlenie sokrashchennykh v razmernosti uravneniy Eylera i Nave — Stoksa neszhimaemoy zhidkosti v integralnoy forme [Explicit Representation of the Euler and Navier – Stokes Equations of an Incompressible Fluid Reduced in Dimension in Integral Form]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2022, vol. 25, no. 1, pp. 5-20. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.1.1

8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: v 10 t. T. VI: Gidrodinamika* [Course of Theoretical Physics. Vol. 6: Fluid Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.

9. Zeldovich Ya.B., Barenblat G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva* [Mathematical Theory of Combustion and Explosion]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 478 p.

10. Merzhanov A.G., Khaykin B.I. *Teoriya voln goreniya v gomogennykh sredakh* [Theory of Combustion Waves in Homogeneous Media]. Chernogolovka, Iz-vo OIKhF RAN Publ., 1992. 162 p.

11. Napartovich A.P., Starostin A.N. Mekhanizmy neustoychivosti tleyushchego razryada povyshennogo davleniya [Mechanisms of Instability of a Glow Discharge of Increased Pressure]. *Khimiya plazmy*. Moscow, Atomizdat Publ., 1979, iss. 6, pp. 153-208.

12. Nedospasov A.V., Khait V.D. *Kolebaniya i neustoychivosti nizkotemperaturnoy plazmy* [Oscillations and Instabilities of Low-Temperature Plasma]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 168 p.

13. Samarskiy A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoy dinamiki* [Difference Methods for Solving Problems of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.

14. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Izd-vo MGU, 1999. 799 p.

15. Book D.L., Ott E., Sulton A.L. Rayleigh-Taylor Instability in the "Shallow-Water" Approximation. *Phys. Fluids.*, 1974, vol. 17, no. 4, pp. 676-678.

16. Bychkov V. Nonlinear Equation for a Curved Stationary Flame and the Flame Velocity. *Phys. Fluids*, 1998, vol. 10, no. 8, pp. 2091-2098.

17. Law C.K. *Combustion Physics*. N. Y., Cambridge University press, 2006. 720 p.

18. Ott E. Nonlinear Evolution of the Rayleigh – Taylor Instability of Thin Layer. *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 29, pp. 1429-1432.

19. Sivashinsky G.I. Nonlinear Analysis of Hydrodynamics Instability in Laminar Flames. Derivation of Basic Equations. *Acta Astronaut.*, 1977, vol. 4, pp. 1177-1215.

20. Williams F.A. *Combustion Theory*. Menlo Park, CA, Benjamin Cummings, 1985. 708 p.

EXPLICIT REPRESENTATION OF THE REDUCED EULER EQUATIONS OF A COMPRESSIBLE FLUID AND THE COMPLETE SYSTEM OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN INTEGRAL FORM

Maksim L. Zaytsev

Business,
mlzaytsev@gmail.com
Moscow, Russian Federation

Vyacheslav B. Akkerman

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mechanical and Aerospace Engineering,
West Virginia University
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Morgantown, USA

Abstract. Various ways of reducing the complete system of hydrodynamic equations in volume to a system of equations on the surface are of great scientific interest. In this article, the unsteady Euler equations of a compressible fluid and the complete system of hydrodynamic equations are reduced to “stationary” integral-differential equations where time derivatives are absent. Such a procedure ($3D \to 2D$, $2D \to 1D$) makes it possible to reduce the dimension of the problem by one, which significantly reduces the necessary computing power when modeling them. If to set the correct problem, then one can determine the entire unsteady flow in the volume without solving the unsteady problem. It is enough to set time-varying data only on some surface of this stream, which must be determined independently. The peculiarity of this work is that all equations reduced in dimension are obtained in explicit form, unlike previous works of the authors, where up to 200–500 equations with reduced dimension were proposed, which are very difficult to study and model. In previous authors' work, dimensionality was reduced by reducing overdetermined systems of differential equations. In this method, in the case of a successful choice of an additional constraint equation for overdetermined systems of differential equations, there is a reduction to PDE systems of dimension less than that of the original PDE systems. The method that is used to reduce the dimension of the Euler equations and the complete system of hydrodynamic equations in this paper is actually a special case of the above. The technique of dimensional reduction in overdetermined systems of PDEs is obviously generalized to the case of integral-differential equations. The article also obtained integral equations in new variables (Lagrangian and pseudo-Lagrangian), which determine the evolution of the flow. Also, a new method is proposed for overdetermination of any system of PDEs using the general integral space relation, which is consequence of the Helmholtz decomposition theorem.

Key words: overdetermined systems of differential equations, dimension of differential equations, hydrodynamics, Euler equations, compressible fluid, integrodifferential equations, reduction.