DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.1.2

УДК 517.968
ББК 22.161.1

Дата поступления статьи: 21.10.2022
Дата принятия статьи: 26.01.2023

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ КОМПЛЕКСНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ [1]

Джасур Музофирович Одинабеков

Кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математики и естественных наук,
Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе
jasur_79@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0001-9851-9895
ул. Бохтар, 35/1, 734003 г. Душанбе, Таджикистан

Аннотация. Применяемый в работе метод исследования двумерных сингулярных интегральных уравнений, не содержащих комплексное сопряжение искомой функции, внешне подобен методу, разработанному Л.Г. Михайловым, который состоит из редукции данного уравнения к соответствующим однородным системам интегральных уравнений с ядрами однородными степени -1. Такие интегральные уравнения встречаются во многих задачах теории обобщенных аналитических функций, теории квазиконформных отображений и теории дифференциальных уравнений с частными производными. В работе для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения с разрывным коэффициентом, не содержащего комплексное сопряжение искомой функции, путем перехода к бесконечной системе интегральных уравнений с ядром Коши и с ядрами однородными степени -1 в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ получены необходимые и достаточные условия разрешимости и формула для подсчета индекса.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, однородные уравнения, неоднородное уравнение, безусловная разрешимость, условия разрешимости.

Введение

Уравнения

$$f(z) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{z}{\overline{z}}\iint_{|\zeta|\le 1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta + g(z), \quad |z| \le 1, \tag{1}$$

близки к интегральному уравнению

$$f(z) = \iint_G Q(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta + g(z), \quad z \in G = \{z : \ |z| \le 1,\} \tag{2}$$

с ядром $Q(z,\zeta)$ однородным порядка -2, то есть $Q(tz, t\zeta) = t^{-2}Q(z,\zeta)$ для любого вещественного $t \neq 0$.

Теория разрешимости уравнения (2) при условии

$$\iint_{E_2} |Q(1,\zeta)||\zeta|^{-\beta} ds_\zeta < \infty, \tag{3}$$

где β — некоторое вещественное число, а E_2 — комплексная плоскость, построена Л.Г. Михайловым [13]. Разработанный им метод, аналогичный известному методу разделения переменных в теории дифференциальных уравнений, дал возможность не только построить теорию Нетера, но также получить формулы для подсчета числа линейно независимых решений однородного и числа условий разрешимости неоднородного уравнения (2) в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, $1 < p < \infty$, β — из условия (3). Отметим, что ядра уравнений (1) условию суммируемости (3) не удовлетворяют. По этой причине к уравнениям (1) не могут быть применены результаты разрешимости уравнения (2). Среди тех уравнений, для ядер которых нарушается условие (3), наиболее близким к (1) является уравнение

$$a(z)f(z) + \frac{b(z)}{\pi}\iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta = g(z), \quad z \in G, \tag{4}$$

где G — область комплексной плоскости E_2.

Уравнение (4) играет важную роль в теории обобщенных аналитических функций [1], а также в экстремальных проблемах конформных отображений [16]. В связи с этим изучению (4) посвящено много работ [2; 3; 6].

И.Н. Векуа [1] на основе принципа сжатых отображений доказал, что (4) при условии $|a(z)| > |b(z)|$, $z \in \overline{G}$ однозначно разрешимо в классе L^p, при p близких к двум.

Дальнейшие существенные результаты относительно уравнения (4) и более общих в случае ограниченной области G получены А. Джураевым [8; 9]. Им был разработан способ, основанный на связи между решением уравнения (4) и теорией задач сопряжения для обобщенных аналитических функций, и показано, что при $|a(z)| \neq |b(z)|$ $z \in \overline{G}$; $a(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, где $a(z)$, $b(z)$ — функции класса $C^1(G) \cap C_\alpha(\overline{G})$, уравнение (4) является нетеровым в пространствах L^p, $2 < p < \infty$ и индекс равен $\frac{1}{\pi}[\arg a(t)]_\Gamma$.

В случае круговой области $G = \{z : |z| \le 1\}$ И.И. Комяк [10; 11], используя локальный метод Н.Б. Симоненко, доказал, что указанные условия на коэффициенты $a(z)$, $b(z)$ необходимы для нетеровости (4) в L^p, $1 < p < \infty$. При этом он требование гладкости коэффициентов $a(z)$, $b(z)$ снизил до непрерывности.

Для $G = E_2$, когда под интегралом в (4) искомая функция входит без комплексного сопряжения, В.С. Виноградовым [3] доказано, что при условии $|a(z)| > |b(z)|$, $z \in E_2$, уравнение (4) однозначно разрешимо в пространствах L^p при $2 \le p < \infty$.

И.И. Комяк [12] распространил этот результат на более общее, чем (4), уравнение, а также на случай $L^p,\ 1 < p < 2$.

Во всех перечисленных работах, касающихся уравнения (4), требуется непрерывность коэффициентов $a(z)$, $b(z)$. В уравнениях (1) $a(z) \equiv 1$, а коэффициент $b(z)$ содержит множитель $\frac{z}{\bar{z}}$ или $e^{in\varphi}$, $\varphi = \arg z$, который имеет существенный разрыв в точке $z = 0$.

1. Вспомогательные утверждения

Пусть X банахово пространство, A линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* сопряженный к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*. Множество $\operatorname{Ker} A$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{5}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $\operatorname{Ker} A$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $\operatorname{Ker} A$, то есть число линейно независимых решений уравнения (5), будем обозначать через $\alpha_A = \dim \operatorname{Ker} A$. Через $\operatorname{Ker} A^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, то есть множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0, \tag{6}$$

называемое ядром оператора A^*, и, наконец, $\beta_A = \alpha_{A^*} = \operatorname{Ker} A^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A — конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $\operatorname{Ind} A$,

$$\operatorname{Ind} A = \alpha_A - \beta_A. \tag{7}$$

Очевидно, $\operatorname{Ind} A$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A – конечны.

Для того чтобы уравнение

$$Ax = y, \quad y \in X, \tag{8}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $\operatorname{Ker} A^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in \operatorname{Ker} A^*$). Действительно, если уравнение (8) имеет решение x, а $u \in \operatorname{Ker} A^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0;$$

здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (8), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее определение.

Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (8) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (6).

Определение 1. *Оператор A называется нетеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.*

Определение 2. *Индексом нетерова оператора A называется целое число* $\operatorname{Ind} A = \alpha_A - \beta_A$.

Определение 3. *Нетеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.*

Определение 4. *Простую замкнутую гладкую кривую Γ назовем кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гельдера относительно дуги s кривой* Γ.

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространства $\mathbf{L^p_{\beta-2/p}(D)}$ — это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p} f(z)$ суммируема с p-й степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$. Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$\|f(z)\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint_D |F(z)|^p ds_z \right)^{1/p} = \|F\|_{L^p}.$$

Пространство $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ изометрично L^p, а потому является банаховым пространством.

Положим

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) e^{-ik\varphi} d\varphi, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $z = re^{i\varphi}$.

Пространство $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит пространству $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, если функция

$$F(z) = |z|^{\beta-\frac{2}{p}} f(z) \in L^p,$$

то есть $f(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ и норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$||f|| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k(r)| dr \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Очевидно, что все аксиомы нормы выполняются.

Лемма 1. *Пространство $\tilde{L}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ является полным, то есть банаховым.*

Доказательство. Пусть $|z| \le 1$ и $\{f^{(m)}(z)\}$ — фундаментальная последовательность функций из $\tilde{\mathrm{L}}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что

$$\|f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

как только $m, n > N$. Покажем, что для любого фиксированного k последовательность $\{f^{(m)}(r)\}$ сходится по норме $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}$ на отрезке [0,1]. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$

$$\|f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)\|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)} = \left(\int_0^1 r |F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

как только $m, n > N$, то есть последовательность $\{f^{(m)}(r)\} \in L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$ — является фундаментальной последовательностью. Поскольку пространство $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$ полно, то $\{f^{(m)}(r)\} \to f_k(r)$ в $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$.

Покажем, что функция

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}, \quad z = re^{i\varphi},$$

принадлежит пространству $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что как только $n, m \geq N$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + A.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||f_k||_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon + A.$$

Следовательно, $f(z) \in \tilde{L}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ при $|z| \leq 1$.

Докажем теперь, что последовательность $\{f^{(m)}(z)\} \to f(z)$ по норме $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Из

$$\|f^{(m)}(z) - f^{(n)}(z)\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

следует, что для любого M существует такой номер N, что

$$\sum_{k=-M}^{M} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r) - F_k^{(n)}(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

как только $n, m \geq N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\sum_{k=-M}^{M} \left(\int_0^1 r|F_k^{(m)}(r) - F_k(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

при любых $M, m \geq N$. Переходя здесь к пределу при $M \to \infty$, получим, что $\{f^{(m)}(z)\} \to$ $\to f(z)$ по норме $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$.

2. Общее представление решения

В пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ рассматривается уравнение (1), то есть уравнение вида

$$f(z) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{z}{\bar z}\iint\limits_{|\zeta|\le 1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}ds_\zeta + g(z), \quad |z| \le 1,$$

где λ — комплексный параметр; ds_ζ — плоская лебеговая мера; интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что в отличие от всех уравнений, рассмотренных в работах [4; 5], под интегралом в (1) искомая функция $f(z)$ не содержит комплексное сопряжение. Уравнение, содержащее в ядре сингулярную особенность с нечетной характеристикой и при сингулярном интеграле имеющее в $z = 0$ существенный разрыв вида $\frac{z}{|z|}$, изучено в [6]. Как выясняется, оба эти обстоятельства существенно влияют на нетеровость и индекс уравнения. В работе [15] исследуется уравнение вида (1) с непрерывными коэффициентами и с добавлением оператора Бергмана. Найдено необходимое и достаточное условие нетеровости двумерного сингулярного интегрального уравнения и показано, что при его выполнении данное уравнение имеет единственное решение, которое находится в явном виде. Исследование уравнения (1) ведется в пространстве $\tilde{L}^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, $0 < \beta < 2$, $1 < p < \infty$.

Переходя в (1) к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = \rho e^{i\alpha}$, умножая обе части на $\frac{1}{2\pi}e^{-ik\varphi}$, интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π и используя результаты работ [4; 5] для нахождения коэффициентов Фурье решения уравнения (1), получим следующую бесконечную систему независимых между собой одномерных интегральных уравнений с ядрами, однородными степени -1:

$$f_k(r) = 2\lambda\int_0^r \frac{1-k}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho)d\rho - \lambda f_k(r) + g_k(r), \quad k \le 0,$$

$$f_k(r) = 2\lambda\int_r^1 \frac{k-1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho)d\rho - \lambda f_k(r) + g_k(r), \quad k \ge 1.$$

Полагая $\lambda \ne 1$, перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$f_k(r) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\int_0^r \frac{1-k}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho)d\rho + \frac{g_k(r)}{1+\lambda}, \quad k \le 0,$$

$$f_k(r) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\int_r^1 \frac{k-1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho)d\rho + \frac{g_k(r)}{1+\lambda}, \quad k \ge 1. \tag{9}$$

В соответствии с исходным пространством $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ уравнения (9) должны рассматриваться в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ на отрезке [0,1]. Ядра этих уравнений удовлетворяют надлежащим условиям суммируемости, и поэтому к каждому из них применимы результаты [16].

Пусть $\Gamma_\beta(k)$ — окружность на λ-плоскости радиуса $R_\beta(k) = \frac{1-k}{\beta-k}$ с центром в точке $\lambda_\beta(k) = \frac{1-\beta}{\beta-k}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Тогда, применяя результаты [14] к (9), получим, что для нормальной разрешимости k-го уравнения $(k \ne 1)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \notin \Gamma_\beta(k)$. Если λ лежит внутри окружности $\Gamma_\beta(k)$, то k-е уравнение безусловно разрешимо единственным образом. Если λ лежит вне окружности $\Gamma_\beta(k)$, то при

$k \leq 0$ однородное уравнение имеет точно одно линейно независимое (над полем комплексных чисел) решение, по которому строится решение однородного уравнения (1) вида $f_k(r)e^{ik\varphi}$, а неоднородное уравнение разрешимо безусловно; при $k \geq 2$ однородное уравнение нетривиальных решений не имеет, а для разрешимости неоднородного необходимо и достаточно одно условие. При этом решения и условия разрешимости уравнений (9) выписываются в явном виде. Для (9) разрешимости условия $|\lambda| \neq 1$, $\lambda \notin \Gamma_\beta(k)$, $k = 0, -1, \pm 2, \ldots$ необходимы и достаточны. Здесь нуждается в доказательстве необходимость условия $|\lambda| \neq 1$. Очевидно, если $|\lambda| \neq 1$, то оператор из (1) не может быть $\Phi_\pm$ оператором (ибо в окрестности точки λ содержится точки ненормальности). Если $0 < \beta < 1$, то однородное уравнение (9) нетривиальных решений не имеет, если же $1 < \beta < 2$, то сопряженное к однородному уравнению (9) нетривиальных решений не имеет, а следовательно $|\lambda| = 1$ не может быть линией нормальности.

Теперь переходим к неоднородным уравнениям (9). После нахождения их решений, мы должны еще показать, что они действительно образуют коэффициенты Фурье функции из $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, то есть ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)e^{ik\varphi}$$

сходится. Это доказывается таким образом. Пусть все уравнения (9) разрешимы. Тогда, благодаря частным видам уравнений (9), выпишем их частные решения. Оценивая эти решения по норме соответствующих пространств, мы убедимся, что ряд Фурье, построенный по этим решениям, сходится по норме $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$ к искомой функции $f(z)$.

Теорема 1. *Для нормальной разрешимости уравнения* (1) *в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$, $0 < \beta < 2$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $|\lambda| \neq 1$ *и* $\lambda \notin \Gamma_\beta(k)$, $k = 0, -1, \pm 2, \ldots$

Далее в случае нормальной разрешимости будем обозначать через κ^+ — размерность подпространства решений однородного уравнения, а через κ^- — число необходимых и достаточных условий разрешимости неоднородного уравнения в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$. Через $S_\beta(k)$ обозначим открытую область, заключенную между $\Gamma_\beta(k)$ и $\Gamma_\beta(k+1)$, $k = -1, \pm 2, \ldots$

Теорема 2. *1) Пусть* $0 < \beta < 1$. *Тогда, если* λ *лежит внутри круга, ограниченного окружностью* $\Gamma_\beta(2)$, *то уравнение* (1) *безусловно разрешимо единственным образом в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}$; *если* $\lambda \in S_\beta(k_0)$, $k_0 = 2, 3, \ldots$, *то* $\kappa^+ = 0$, $\kappa^- = m_0 - 1$, *причем условия разрешимости неоднородного уравнения имеют вид*

$$\iint_{|z|\leq 1} g(z)z^{-k}|z|^{\frac{2\lambda(k-1)}{1+\lambda}}ds_\zeta = 0, \; k = 2, 3, \ldots.., k_0; \tag{10}$$

если $\lambda \in S_\beta(k_0)$, $(k_0 = -1, -2, \ldots)$ *или лежит вне круга, ограниченного* $\Gamma_\beta(0)$, *то* κ^+ *и* κ^- *бесконечны, причем базис подпространства решений однородного уравнения* (1) *имеет вид*

$$|z|^{\frac{2\lambda(1-k)}{1+\lambda}-2+k}e^{ik\varphi}, \tag{11}$$

где $k \leq k_0$, *а условия разрешимости неоднородного уравнения даются формулой* (10), *в которой следует положить* $k = 2, 3, \ldots$

2) Пусть $1 < \beta < 2$. *Тогда, если* λ *лежит внутри круга, ограниченного окружностью* $\Gamma_\beta(0)$, *то* $\kappa^+ = \kappa^- = 0$; *если* $\lambda \in S_\beta(k_0)$ $(k_0 = -1, -2, \ldots)$, *то* $\kappa^+ = |k_0|$, $\kappa^- = 0$, *причем базис подпространства решений однородного уравнения* (1) *имеет вид* (11), *где* $k_0+1 \leq k \leq 0$; *если* $\lambda \in S_\beta(k_0)$ $(k_0 = 2, 3, \ldots)$ *или лежит вне круга, ограниченного* $\Gamma_\beta(2)$, *то* κ^+ *и* κ^- *бесконечны, причем базис подпространства решений однородного уравнения имеет вид* (11), *в котором надо положить* $k = k_0 + 1,\ k_0 + 2, \ldots$

3) Пусть $\beta = 1$. *Тогда, если* $|\lambda| < 1$, *то* $\kappa^+ = \kappa^- = 0$; *если* $|\lambda| > 1$, *то* κ^+ *и* κ^- *бесконечны, причем базис подпространства решений имеет вид* (11), *где* $k \leq 0$, *а условия разрешимости имеют вид* (10), *где* $k \geq 2$.

Заключение

В настоящей работе наряду с получением общих теорем Нетера и формулы для подсчета индекса уравнения (1) особое внимание уделяется получению более конкретных результатов относительно уравнения (1): выяснение необходимых и достаточных условий нормальной разрешимости; получение раздельных формул для подсчета числа линейно независимых решений однородных и числа условий разрешимости неоднородных уравнений и написание в явном виде базиса решений однородного и условия разрешимости неоднородных уравнений.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

2. Векуа, Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. — М. : Наука, 1970. — 399 с.

3. Виноградов, В. С. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения / В. С. Виноградов // ДАН СССР. — 1979. — Т. 241, № 2. — С. 272–274.

4. Джангибеков, Г. О разрешимости одного особого двумерного интегрального уравнения с комплексно сопряженной неизвестной функцией / Г. Джангибеков // Доклады АН Тадж. ССР. — 1977. — Т. 20, № 5. — С. 3–6.

5. Джангибеков, Г. Исследование разрешимости одного двумерного сингулярного интегрального уравнения с комплексно сопряженной неизвестной функцией / Г. Джангибеков // Доклады АН Тадж. ССР. — 1978. — Т. 21, № 7. — С. 3–8.

6. Джангибеков, Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с нечеткой характеристикой / Г. Джангибеков, Г. Козиев // Вестник таджикского национального университета. Серия естественных наук. — 2017. — Т. 1, № 5. — С. 212–216.

7. Джураев, А. Д. Решение одного класса характеристических сингулярных интегральных уравнений на комплексной плоскости / А. Д. Джураев // Доклады АН Тадж. ССР. — 1974. — Т. 17, № 9. — С. 3–6.

8. Джураев, А. Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области / А. Д. Джураев // ДАН СССР. — 1971. — Т. 197, № 6. — С. 1251–1254.

9. Джураев, А. Д. Эффект регулярной части в сингулярных уравнениях по двухмерной ограниченной области / А. Д. Джураев // ДАН СССР. — 1971. — Т. 198. — С. 27–30.

10. Комяк, И. Н. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения / И. Н. Комяк // ДАН БССР. — 1977. — Т. 21, № 2. — С. 1074–1077.

11. Комяк, И. Н. Об условиях нетеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений / И. Н. Комяк // ДАН БССР. — 1978. — Т. 22, № 6. — С. 488–491.

12. Комяк, И. Н. О разрешимости одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений / И. Н. Комяк // ДАН СССР. — 1980. — Т. 250, № 6. — С. 1307–1310.

13. Михайлов, Л. Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 / Л. Г. Михайлов. — Душанбе : Дониш, 1966. — 49 с.

14. Михайлов, Л. Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами / Л. Г. Михайлов // ДАН СССР. — 1970. — Т. 192, № 2. — С. 272–275.

15. Одинабеков, Д. М. Формула обращения для одного сингулярного интегрального уравнения / Д. М. Одинабеков // Материалы международной научно-практической конференции «XII Ломоносовские чтения» (29–30 апреля 2022). — Душанбе : Фил. МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 2022. — С. 37–40.

16. Шиффер, М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении / М. Шиффер // Международный математический конгресс в Эдинбурге (обзорные доклады). — М. : Физматгиз, 1962. — С. 193–218.

REFERENCES

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

2. Vekua N.P. *Sistemy singulyarnykh integralnykh uravneniy* [Systems of Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 399 p.

3. Vinogradov V.S. O razreshimosti odnogo singulyarnogo integralnogo uravneniya [On the Solvability of a Singular Integral Equation]. *DAN SSSR*, 1979, vol. 241, no. 2, pp. 272-274.

4. Dzhangibekov G. O razreshimosti odnogo osobogo dvumernogo integralnogo uravneniya s kompleksno sopryazhennoy neizvestnoy funktsiey [On the Solvability of a Singular Two-Dimensional Integral Equation with a Complex Conjugate Unknown Function]. *Doklady AN Tadzh. SSR*, 1977, vol. 20, no. 5, pp. 3-6.

5. Dzhangibekov G. Issledovanie razreshimosti odnogo dvumernogo singulyarnogo integralnogo uravneniya s kompleksno sopryazhennoy neizvestnoy funktsiey [Study of the Solvability of One Two-Dimensional Singular Integral Equation with Complex Conjugate Unknown Function]. *Doklady AN Tadzh. SSR*, 1978, vol. 21, no. 7, pp. 3-8.

6. Dzhangibekov G., Koziev G. Ob odnom klasse dvumernykh singulyarnykh integralnykh operatorov s nechetkoy kharakteristikoy [Of Some Class Singular Integral Operators with Even Characteristic]. *Vestnik tadzhikskogo natsionalnogo universiteta. Seriya estestvennykh nauk*, 2017, vol. 1, no. 5, pp. 212-216.

7. Dzhuraev A.D. Reshenie odnogo klassa kharakteristicheskikh singulyarnykh integralnykh uravneniy na kompleksnoy ploskosti [Solution of a Class of Characteristic Singular Integral Equations on the Complex Plane]. *Doklady AN Tadzh. SSR*, 1974, vol. 17, no. 9, pp. 3-6.

8. Dzhuraev A.D. Ob odnom metode issledovaniya singulyarnykh integralnykh uravneniy po ogranichennoy ploskoy oblasti [On a Method for Studying Singular Integral Equations over a Bounded Plane Domain]. *DAN SSSR*, 1971, vol. 197, no. 6, pp. 1251-1254.

9. Dzhuraev A.D. Effekt regulyarnoy chasti v singulyarnykh uravneniyakh po dvukhmernoy ogranichennoy oblasti [The Effect of the Regular Part in Singular Equations over a Two-Dimensional Bounded Domain]. *DAN SSSR*, 1971, vol. 198, pp. 27-30.

10. Komyak I.N. Obshchee reshenie odnogo dvumernogo singulyarnogo integralnogo uravneniya [General Solution of One Two-Dimensional Singular Integral Equations]. *DAN BSSR*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 1074-1077.

11. Komyak I.N. Ob usloviyakh neterovosti i formule indeksa odnogo klassa singulyarnykh integralnykh uravneniy [On the Noetherian Conditions and the Formula for the Index of One Class of Singular Integral Equations]. *DAN BSSR*, 1978, vol. 22, no. 6, pp. 488-491.

12. Komyak I.N. O razreshimosti odnogo klassa dvumernykh singulyarnykh integralnykh uravneniy [On the Solvability of a Class of Two-Dimensional Singular Integral Equations]. *DAN SSSR*, 1980, vol. 250, no. 6, pp. 1307-1310.

13. Mikhaylov L.G. *Integralnye uravneniya s yadrom, odnorodnym stepeni -1* [Integral Equations with a Kernel Homogeneous of Degree -1]. Dushanbe, Donish Publ., 1966. 49 p.

14. Mikhaylov L.G. O nekotorykh dvumernykh integralnykh uravneniyakh s odnorodnymi yadrami [On Some Two-Dimensional Integral Equations with Homogeneous Kernels]. *DAN SSSR*, 1970, vol. 192, no. 2, pp. 272-275.

15. Odinabekov D.M. Formula obrashcheniya dlya odnogo singulyarnogo integralnogo uravneniya [Inversion Formula for One Singular Integral Equation]. *Materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «XII Lomonosovskie chteniya» (29–30 aprelya 2022)*. Dushanbe, Fil. MGU im. M.V. Lomonosova v g. Dushanbe, 2022, pp. 37-40.

16. Shiffer M. Ekstremalnye problemy i variatsionnye metody v konformnom otobrazhenii [Extremal Problems and Variational Methods in Conformal Mapping]. *Mezhdunarodnyy matematicheskiy kongress v Edinburge (obzornye doklady)*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, pp. 193-218.

ON A CLASS OF TWO-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL EQUATION NOT CONTAINING COMPLEX CONJUGATION OF THE DESIRED FUNCTIONS

Dzhasur M. Odinabekov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Head of the Department of Mathematics and Natural Sciences,
Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe
jasur_79@inbox.ru
https://orcid.org/0000-0001-9851-9895
Bokhtar St, 35/1, 734003 Dushanbe, Tajikistan

Abstract. The method of investigating two-dimensional singular integral equations that do not contain complex conjugation of the desired function, used in the study, is externally similar to the method developed by L.G. Mikhailov, which consists of the reduction of this equation to the corresponding homogeneous systems of integral equations with homogeneous kernels of degree -1. Such integral equations occur in many problems in the theory of generalized analytic functions, the theory of quasiconformal mappings and the theory of partial differential equations. In this paper, for one two-dimensional singular integral equations with a discontinuous coefficient not containing complex conjugation of desired functions by passing to an infinite system of integral equations with Cauchy kernel and with homogeneous kernels of degree -1 in the Lebesgue space $L^p_{\beta-\frac{2}{2}}(D),\ \ 1<p<1; 0<\beta<2$, necessary and sufficient conditions of solvability and the formula for calculating the index are obtained.

Key words: singular integral equations, homogeneous equations, non-homogeneous equation, unconditionally solvable, solvability conditions.