DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.3

УДК 536.2
ББК 22.375.5

Дата поступления статьи: 28.06.2023
Дата принятия статьи: 06.08.2023

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Станислав Алексеевич Прохоров

Студент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,
Волгоградский государственный университет
stas.evgrashin@mail.ru, prim-211_335925@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Анастасия Валерьевна Тен

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,
Волгоградский государственный университет
pak.anastasia@gmail.com, ten.anastasia@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе изучено двумерное линейное уравнение теплопроводности с дробным порядком дифференцирования и составлен вычислительный алгоритм его численного решения. Дробные производные по пространству и времени представлялись при помощи определения Римана — Лиувилля, а для их аппроксимации использовалось определение Грюнвальда — Летникова со сдвигом. На основе вычислительного алгоритма написана программа для компьютерного моделирования процесса теплообмена в неоднородных средах. Разработана версия программы с использованием технологии параллельных вычислений OpenMP. Компьютерная модель протестирована рядом численных экспериментов по решению задачи распространения теплового импульса. По результатам моделирования было изучено влияние дробного порядка дифференцирования на процесс теплопроводности.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, разностные схемы, дробное дифференцирование, уравнение теплопроводности, параллельные вычисления.

Введение

Значительная часть процессов в природе происходит в пористых средах и не может быть описана при помощи уравнений, относящихся к теории механики сплошной среды. Для учета особенностей неоднородности среды при моделировании данных процессов можно использовать математический аппарат дробного дифференцирования, позволяющий учитывать фрактальность среды [3].

Идея о распространении интегрирования и дифференцирования на дробные порядки существует с самого зарождения интегрального и дифференциального исчисления. Разработано множество способов для определения производной дробного порядка, одними из популярных являются определения Римана — Лиувилля [4; 8], Капуто [7] и Грюнвальда — Летникова [12].

Хотя основы дробно-дифференциального исчисления были заложены еще в позапрошлом веке, их широкое применение началось только в последние десятилетия. В следующих задачах использование математического аппарата с дробными производными оказалось особенно эффективным: классическая механика (обратные задачи) и гидродинамика (движение тела в вязкой жидкости) [9], конвекция-диффузия (решение начально-краевых задач с дробной производной Капуто) [7], теплопроводность (теплообмен в пористых средах, распространение тепла в аэрогелях) [1], динамика турбулентной среды, теория фазовых переходов, пространственные и временные корреляции в жидкостях, просачивание в пористых средах, вязкоупругость (реология полимеров) [2], решение начально-краевых задач для уравнения конвекции-диффузии.

Дробное дифференцирование является актуальной областью исследования, так как дает более реалистичные результаты, чем классические уравнения механики сплошной среды. Дробное исчисление может быть распространено на различные области физических и естественных наук. Кроме того, дробные операторы имеют больше степеней свободы, и они обобщают целочисленные дифференциальные операторы [11]. Некоторые линейные и нелинейные динамические задачи дробного порядка решаются с помощью полуаналитических решений с использованием преобразования дробной суммы [13; 14].

Основным преимуществом дробного дифференцирования перед целочисленным является возможность учитывать микро- или наноструктуру моделируемого объекта, но за это приходится расплачиваться более высокой вычислительной сложностью алгоритмов их численного решения.

1. Уравнение теплопроводности в неоднородных средах

При рассмотрении неоднородной (фрактальной) среды возникает дробная производная по координате (пространству), значение которой определяется посредством размерности фрактала. В случае прилипания атомов вещества к порам среды, в которой происходит теплообмен, необходимо учитывать нелокальность по времени при помощи дробной производной по времени. Также стоит сказать, что при $\beta = 2$ уравнение (1) превращается в классическое уравнение теплопроводности, а при $\beta = 1$ получаем уравнение переноса примеси [6].

Ниже записано одномерное уравнение теплопроводности в консервативной форме с дробным порядком дифференцирования по времени и пространству:

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = K \, \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta}, \tag{1}$$

где $T(x,t)$ — распределение температуры; $K = \mathrm{const}$ — коэффициент теплопроводности; $0 < \alpha \leq 1$ — дробный порядок дифференцирования по времени; $1 < \beta \leq 2$ — дробный порядок дифференцирования по пространству.

Уравнение (1) может быть расширено на двумерный случай. Двумерное уравнение с дробными производными по пространству и времени имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = K_x \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta} + K_y \frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta} + f(t,x,y), \tag{2}$$

где $T(x,y,t)$ — распределение температуры; K_x, K_y — коэффициенты теплопроводности по x и y координате соответственно; $f(t,x,y)$ — функция, задающая источники тепла.

2. Численное решение двумерного уравнения теплопроводности в неоднородной среде

Решать будем уравнение теплопроводности вида (2), которое является классическим представителем уравнений в частных производных параболического типа. Перепишем уравнение в отсутствии внешних источников тепла и добавим в уравнение учет таких теплофизических характеристик, как плотность ρ и теплоемкость c:

$$D_t^\alpha T = \frac{K_x}{\rho c} D_x^\beta T + \frac{K_y}{\rho c} D_y^\beta T, \tag{3}$$

где D_t^α — параметр, отвечающий за дробный порядок дифференцирования по времени α $(0 < \alpha \leq 1)$; D_x^β — параметр, отвечающий за дробный порядок дифференцирования по координате x $(1 < \beta \leq 2)$; D_y^β — параметр, отвечающий за дробный порядок дифференцирования по координате y $(1 < \beta \leq 2)$; ρ и c — плотность и теплоемкость вещества.

Для аппроксимации дробных производных по пространству использовалось определение Грюнвальда — Летникова со смещением. Выражения для расчета D_x^β, D_y^β имеют следующий вид:

$$D_x^\beta = \frac{1}{h_x^\beta} \sum_{k=2}^{N+1} \omega_k u_{i-k+1,j}^n, \tag{4}$$

$$D_y^\beta = \frac{1}{h_y^\beta} \sum_{k=2}^{M+1} \omega_k u_{i,j-k+1}^n, \tag{5}$$

где $\omega_0 = 1, \omega_k = (-\beta)(-\beta+1)\ldots(-\beta+k-1)/k!$.

Для аппроксимации дробной производной по времени применялся достаточный признак существования дробной производной Римана — Лиувилля, в области $[t_k, t_{k+1}]$ при $0 < \alpha < 1$. Согласно нему D_t^α равно:

$$D^\alpha T(t,x,y)|_{t_k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{T(t_k,x,y)}{(t_{k+1}-tk)^\alpha} + \int\limits_{t_{k+1}}^{t_k} \frac{T'(x,s)ds}{(t_{k+1}-s)^\alpha} \right). \tag{6}$$

Производную $T'(\tau,x,y)$ в области $[t_k, t_{k+1}]$ можно представить с помощью конечной разности:

$$\left(\frac{dT}{d\tau}\right) \approx \frac{T(t_{k+1}, x, y) - T(t_k, x, y)}{\tau}. \qquad (7)$$

В итоге получим следующее равенство для аппроксимации дробной производной по времени:

$$D^{\alpha}T(t,x,y)|_{t_k} \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ \times \left(\frac{T(t_k,x,y)}{(t_{k+1}-tk)^{\alpha}} + \frac{T(t_{k+1},x,y)-T(t_k,x,y)}{\tau} \int_{t_{k+1}}^{t_k} \frac{ds}{(t_{k+1}-s)^{\alpha}}\right) = \\ = \frac{T_{i,j}^{n+1} - \alpha T_{i,j}^{n}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^{\alpha}}. \qquad (8)$$

Используя выражения (3–5) и уравнение (3), получим следующую явную разностную схему:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - \alpha T_{i,j}^{n}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}} = \frac{K_x}{h_x^{\beta}\rho c}\left(T_{i+1,j}^{n} - \beta T_{i,j}^{n} + \sum_{k=2}^{N+1} \omega_k T_{i-k+1,j}^{n}\right) + \\ + \frac{K_y}{h_y^{\beta}\rho c}\left(T_{i,j+1}^{n} - \beta T_{i,j}^{n} + \sum_{k=2}^{M+1} \omega_k T_{i,j-k+1}^{n}\right), \qquad (9)$$

где τ — шаг по времени; α — дробный порядок дифференцирования по времени; β — дробный порядок дифференцирования по пространству; $i = 0, 1, \ldots N$, $N = L_x/h_x$, $j = 0, 1, \ldots M$, $M = L_y/h_y$ $n = 0, 1, \ldots$. Расчетная сетка имеет постоянный шаг по времени и пространству: $\tau = t_{n+1} - t_n = \mathrm{const}$, $h_x = x_{i+1} - x_i = \mathrm{const}$, $h_y = y_{j+1} - y_j = \mathrm{const}$ для всех i, j и n.

Если известно распределение $u_{i,j}$ на n-м временном слое, то значение u^{n+1} в каждом i, j-м узле вычисляется из соотношения (9) по формуле:

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{K_x(\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha})}{h_x^{\beta}\rho c}\left(u_{i+1,j}^{n} - \beta u_{i,j}^{n} + \sum_{k=2}^{N+1} \omega_k u_{i-k+1,j}^{n}\right) + \\ + \frac{K_y(\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha})}{h_y^{\beta}\rho c}\left(u_{i,j+1}^{n} - \beta u_{i,j}^{n} + \sum_{k=2}^{M+1} \omega_k u_{i,j-k+1}^{n}\right) + \alpha u_{i,j}^{n}. \qquad (10)$$

Для устойчивости схемы (9) необходимо выполнение следующего условия [5]:

$$\frac{\tau^{\alpha}}{\rho c}\left(\frac{K_x}{h_x^{\beta}} + \frac{K_x}{h_x^{\beta}}\right) \le \frac{\alpha+1}{(2+\beta)\Gamma(2-\alpha)}. \qquad (11)$$

3. Применение технологии OpenMP для разработки параллельной версии программы

Тема увеличения эффективности вычислений весьма актуальна для задач, которые связаны с большими объемами вычислительных работ. Некоторые задачи требуют нескольких месяцев расчетов. Однако с развитием технологий и программного обеспечения стало возможным создавать программы с эффективным быстродействием.

На основе разностной схемы, приведенной выше, запишем вычислительный алгоритм для решения двумерного уравнения теплопроводности в неоднородных средах:

Этап 1: Задание начальных условий: $T(x,y,0)$ и $\left.\dfrac{\partial T}{\partial t}\right|_{(x,y,0)}$.

Этап 2: Вычисление шага по времени τ из условия устойчивости для конечно-разностной численной схемы (11).

Этап 3: Формирование значений температуры $T(x,y,t)$ на границах расчетной сетки (задаются граничные условия). В данной программе возможно задание граничных условий I, II и III типа.

Этап 4: Расчет значений D_x^β, D_y^β согласно выражениям (4–5) для всех ячеек $T_{j,n}^k(j=1,...,M; i=1,...,N)$ на текущем временном слое t_k.

Этап 5: Определение распределения тепла $T_{m,n}^{k+1}$ согласно (9) на следующем временном слое t_{k+1}.

На следующем временном интервале расчеты повторяются со второго этапа по пятый, до тех пор, пока не будет достигнуто время окончания расчетов. Вычислительная сложность данного алгоритма составляет $O(n^3)$.

На основе описанного выше алгоритма разработана программа на языке C++, с помощью которой проведены серии численных экспериментов с разными значениями дробного порядка дифференцирования.

В данной работе для распараллеливания программы применялся стандарт OpenMP, который представляет собой расширение исходного языка программирования. OpenMP предоставляет простой способ использовать для вычислений ресурсы нескольких вычислителей, без необходимости использования специфичного API операционной системы.

Для численного решения уравнения теплопроводности производится замена частных производных в дифференциальных уравнениях их разностными аналогами, то есть применяется явная конечно-разностная схема. Следовательно, область расчетов $[0\ldots N]\times$ $\times[0\ldots M]$ разбивается на ячейки с постоянным шагом по времени и пространству. Для распараллеливания программы расчетная область делится на равные подобласти согласно количеству потоков в выполняемой параллельной программе. На каждом полученном таким способом интервале процесс интегрирования осуществляется отдельным потоком, при этом в связи с использованием явной схемы соседние процессы должны обмениваться крайними значениями, полученными на предыдущем шаге, для выполнения следующего шага. В OpenMP описанное разделение на подобласти осуществляется при помощи условия `schedule` с типом `static`, который равномерно распределяет итерации между потоками.

Данным способом были распараллелены циклы для этапов 3–5. Разделяемыми переменными в данных циклах являются массивы, содержащие распределение температуры на текущем и следующем временных слоях, остальные переменные записаны под условием `private`, то есть каждый поток имеет свои копии данный переменных [10].

Для оценки эффективности параллельных вычислений рассчитаны следующие показатели параллельного алгоритма: ускорение (S_p) и эффективность (E_p), представленные ниже в таблице. Отладка и тестирование программы проводились на ПК (персональном компьютере) со следующими характеристиками: процессор — Intel(R) Core(TM) i5-8250U с 4 ядрами и 8 потоками, частотой 3,60 GHz; оперативная память 8 Гб; графический процессор — NVIDIA Geforce GTX 1060 с оперативной памятью 6 Гб.

Время работы T_p, ускорение S_p и эффективность распараллеливания E_p вычислений с помощью OpenMP

$Z\backslash t(c)$	T_1	T_2	T_4	T_8	S_2	S_4	S_8	E_2	E_4	E_8
10^2	0,038	0,039	0,042	0,045	0,95	0,88	0,84	0,47	0,22	0,11
10^3	0,863	0,559	0,394	0,256	1,54	2,19	3,37	0,77	0,55	0,42
10^4	384,9	252,6	161,8	103,7	1,52	2,38	3,71	0,76	0,59	0,46

Как ожидалось, наибольшее ускорение получено при использовании восьми потоков, $Z = 10^4$ и равно $S_8 = 3{,}71$. Также наблюдается следующая закономерность: в случае малых значений вычислительной сложности (Z) параллельная программа работает медленнее последовательной. Это обусловлено тем, что время, затраченное на инициализацию потоков в параллельной версии программы, превышает время работы последовательной версии.

4. Результаты компьютерного моделирования процесса теплопроводности в неоднородных средах

Проведены серии численных экспериментов с разными значениями дробного порядка дифференцирования по времени α, также для сравнения проводились расчеты для классического уравнения теплопроводности.

Задача о распространении импульса решается в области $[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$ ($N_x = M_y = 50$) при следующих начальных и граничных условиях:

$$T(x, y, 0) = \delta(x - \pi), \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \beta = 2, K_x = K_y = \rho = c = 1, \tag{12}$$

$$T(x, 0, t) = T(0, y, t) = T(x, M, t) = T(N, y, t) = 0. \tag{13}$$

Ниже показаны результаты численного эксперимента при $\alpha = 0{,}2$ (см. рис. 1) и $\alpha = 0{,}8$ (см. рис. 2), вертикальная ось u показывает температуру. По графикам видно, что при более высоком значении α процесс теплообмена протекает быстрее. На рисунке 1 можно наблюдать эффект «памяти», когда начальное состояние дольше сохраняется с течением времени, а на рисунке 2 данный эффект не такой заметный, но наблюдается смещение центра столба влево.

Также проведены численные эксперименты при разных значениях дробной производной по пространству, в случае $\beta = 1{,}1$ (см. рис. 3) и $\beta = 1{,}9$ (см. рис. 4), порядок производной по времени в обоих случаях равен $\alpha = 1$. В случае дробного порядка дифференцирования по пространству наблюдается перенос тепла влево. В ходе численных экспериментов также замечено, что при уменьшении значений β перенос тепла влево увеличивается.

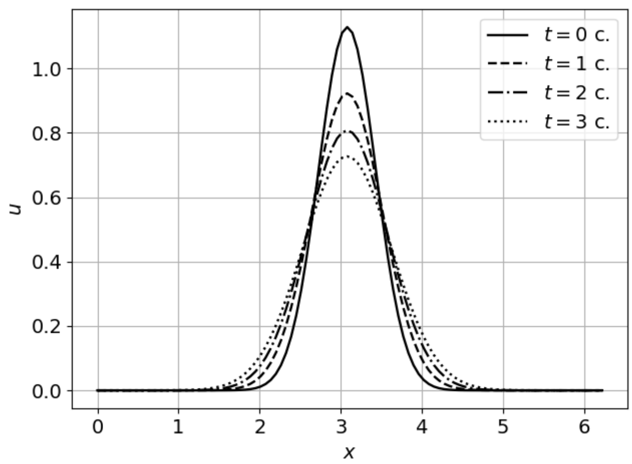

Рис. 1. График зависимости температуры $T(x, \pi)$ при $\alpha = 0{,}2$ за $t = 0$; 1; 2; 3 секунды

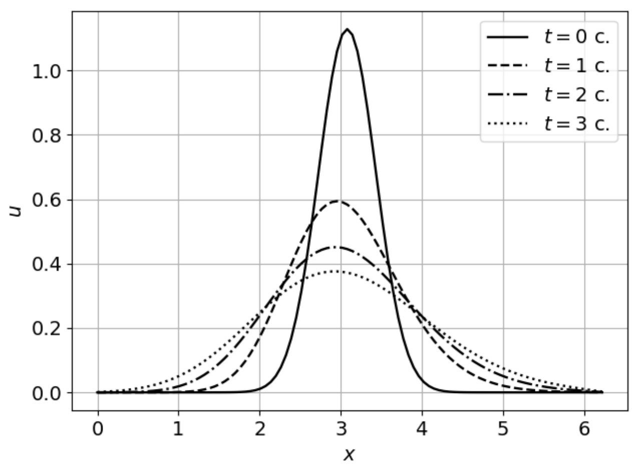

Рис. 2. График зависимости температуры $T(x, \pi)$ при $\alpha = 0{,}8$ за $t = 0$; 1; 2; 3 секунды

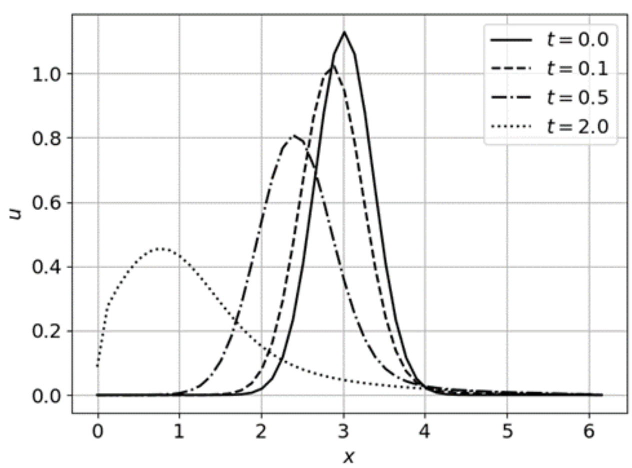

Рис. 3. График зависимости температуры $T(x, \pi)$ при $\beta = 1{,}1$ за $t = 0$; 0,1; 0,5; 2 секунды

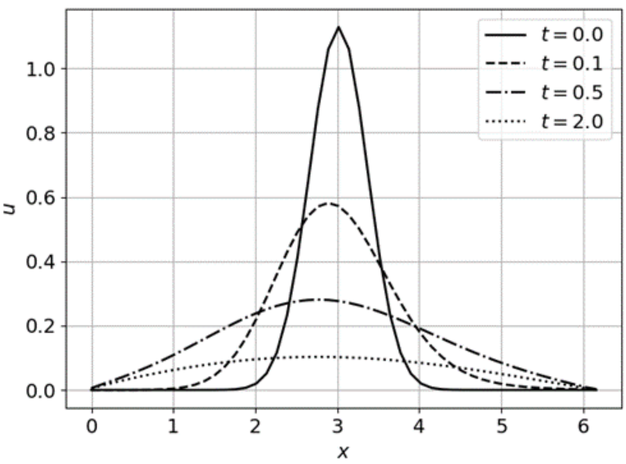

Рис. 4. График зависимости температуры $T(x, \pi)$ при $\beta = 1{,}9$ за $t = 0$; 0,1; 0,5; 2 секунды

По графикам можно сделать вывод, что в случае дробной производной по времени процесс теплообмена происходит медленнее, чем в классическом случае. В случае дробной производной по пространству наблюдается процесс переноса тепла влево. Также по результатам численных экспериментов можно утверждать, что реализованная конечно-разностная схема является устойчивой и ее можно применять для решения практических задач.

Заключение

В результате работы была разработана программа, позволяющая моделировать процесс теплообмена в неоднородных средах, с последующей визуализацией полученных результатов в виде двумерных и трехмерных графиков. Подробно описаны способы определения производной дробного порядка, а также рассмотрена возможность применения линейного уравнения теплопроводности с дробным порядком дифференцирования для исследования неоднородных сред.

Для представления производных дробного порядка использовалось определение Грюнвальда — Летникова и Римана — Лиувилля, а для вычисления гамма-функции использовался метод Ланцоша. На основе данных определений проведена аппроксимация дробных производных и составлена численная схема для решения двумерного уравнения теплопроводности в неоднородных средах.

Разработана параллельная версия программы с использованием технологии параллельных вычислений OpenMP, для которой в табличном виде представлены параметры.

Проведен ряд численных экспериментов по моделированию процесса переноса тепла с различными параметрами дробного дифференцирования по времени и пространству. По результатам компьютерного моделирования были сделаны следующие выводы:

1. Процесс теплообмена при решении уравнения с дробным порядком дифференцирования по времени происходит медленнее, чем в классическом случае. И чем меньше значение дробного порядка, тем медленнее протекает процесс теплообмена.

2. При дробном порядке дифференцирования по пространству наблюдается процесс переноса. С уменьшением значения дробного порядка перенос происходит быстрее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейбалаев, В. Д. Численный метод решения начально-граничной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка / В. Д. Бейбалаев, М. Р. Шабанова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». — 2010. — Т. 5, № 1. — С. 244–251.

2. Евсеев, К. Б. Моделирование упругих свойств винтовых пружин, выполненных с применением полимерных композиционных материалов, в системах подрессоривания колесных машин с учетом реологических свойств / К. Б. Евсеев, А. Б. Карташов // Журнал автомобильных инженеров. — 2017. — № 3. — С. 17–21.

3. Журавков, М. А. О некоторых направлениях применения аппарата дробного дифференцирования в механике / М. А. Журавков, Н. С. Романова // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. — 2018. — № 1. — С. 33–34.

4. Карпова, А. П. Аппарат дробного интегро-дифференцирования / А. П. Карпова. — Минск : Изд-во БГУ, 2019. — 45 с.

5. Корчагина, А. Н. Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах / А. Н. Корчагина, Л. А. Мержиевский // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Серия: Физика, математика, техника, технология. — 2013. — № 3. — С. 53–59.

6. Мержиевский, Л. А. Численное моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде / Л. А. Мержиевский, А. Н. Корчагина // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика. — 2011. — Т. 9, № 2. — С. 126–146.

7. О численном решении начально-краевых задач для уравнения конвекции-диффузии с дробной производной Капуто и нелокальным линейным источником / А. М. Апеков, М. Х. Бештоков, З. В. Бештокова, З. В. Шомахов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2020. — Т. 23, № 4. — С. 35–50. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.4.4

8. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.

9. Учайкин, В. В. О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы / В. В. Учайкин // Прикладная математика & Физика. — 2014. — Т. 37, № 25 (196). — С. 58–67.

10. Chandra, R. Parallel Programming in OpenMP / R. Chandra. — San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2001. — 112 p.

11. Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics / R. Hilfer. — London : World Scientific, 2000. — 429 p.

12. Machado, J. A. The Bouncing Ball and the Grünwald – Letnikov Definition of Fractional Derivative / J. A. Machado // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 1003–1014.

13. Rahman, N. A. Solving Fuzzy Fractional Differential Equations Using Fuzzy Sumudu Transform / N. A. Rahman, M. Z. Ahmad // Nonlinear Sci. Appl. — 2017. — Vol. 10, № 5. — P. 2620–2632.

14. Rossikhin, Y. A. Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids / Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // The American Society of Mechanical Engineers. — 1997. — Vol. 50, № 5. — P. 15–67.

REFERENCES

1. Beybalaev V.D., Shabanova M.R. Chislennyy metod resheniya nachalno-granichnoy zadachi dlya dvumernogo uravneniya teploprovodnosti s proizvodnymi drobnogo poryadka [Numerical Method of Solving the Initial-Boundary Problem for a Two-Dimensional Equation of Thermal Conductivity with Derivatives of Fractional Order]. *Vestnik Samarskogo*

gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki», 2010, vol. 5, no. 1, pp. 244-251.

2. Evseev K.B., Kartashov A.B. Modelirovanie uprugikh svoystv vintovykh pruzhin, vypolnennykh s primeneniem polimernykh kompozitsionnykh materialov, v sistemakh podressorivaniya kolesnykh mashin s uchetom reologicheskikh svoystv [Modeling of Elastic Properties of Helical Springs Made with the Use of Polymer Composite Materials in Systems for Pressing Wheel Machines Taking into Account Rheological Properties]. *Zhurnal avtomobilnykh inzhenerov*, 2017, no. 3, pp. 17-21.

3. Zhuravkov M.A., Romanova N.S. O nekotorykh napravleniyakh primeneniya apparata drobnogo differentsirovaniya v mekhanike [About Some Directions of Application of Fractional Differentiation Apparatus in Mechanics]. *Analiticheskie metody analiza i differentsialnykh uravneniy*, 2018, no. 1, pp. 33-34.

4. Karpova A.P. *Apparat drobnogo integro-differentsirovaniya* [Fractional Integro-Differentiation Apparatus]. Minsk, Izd-vo BGU, 2019. 45 p.

5. Korchagina A.N., Merzhievskiy L.A. Chislennoe modelirovanie diffuzionnykh protsessov v fraktalnykh sredakh [Numerical Modeling of Diffusion Processes in Fractal Media]. *Uchenye zapiski Zabaykalskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya*, 2013, no. 3, pp. 53-59.

6. Merzhievskiy L.A., Korchagina A.N. Chislennoe modelirovanie rasprostraneniya teplovogo impulsa vo fraktalnoy srede [Numerical Modeling of Thermal Momentum Propagation in Fractal Medium]. *Sovremennye problemy prikladnoy matematiki i mekhaniki: teoriya, eksperiment i praktika*, 2011, vol. 9, no. 2, pp. 126-146.

7. Apekov A.M., Beshtokov M.Kh., Beshtokova Z.V., Shomakhov Z.V. O chislennom reshenii nachalno-kraevykh zadach dlya uravneniya konvektsii-diffuzii s drobnoy proizvodnoy Kaputo i nelokalnym lineynym istochnikom [On the Numerical Solution of Initial-Edge Problems for Convection-Diffusion Equation with Caputo Fractional Derivative and Non-Local Linear Source]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2020, vol. 23, no. 4, pp. 35-50. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.4.4

8. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 199 p.

9. Uchaykin V.V. O drobno-differentsialnom uravnenii Liuvillya kak uravnenii dinamiki otkrytoy sistemy [On the Fractional-Differential Liouville Equation as the Open System Dynamics Equation]. *Prikladnaya matematika & Fizika*, 2014, vol. 37, no. 25 (196), pp. 58-67.

10. Chandra R. *Parallel Programming in OpenMP*. San Francisco, Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 112 p.

11. Hilfer R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. London, World Scientific, 2000. 429 p.

12. Machado J.A. The Bouncing Ball and the Grünwald – Letnikov Definition of Fractional Derivative. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 1003-1014.

13. Rahman N.A., Ahmad M.Z. Solving Fuzzy Fractional Differential Equations Using Fuzzy Sumudu Transform. *Nonlinear Sci. Appl*, 2017, vol. 10, no. 5, pp. 2620-2632.

14. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids. *The American Society of Mechanical Engineers*, 1997, vol. 50, no. 5, pp. 15-67.

COMPUTER SIMULATIONS OF THE HEAT TRANSFER PROCESS IN HETEROGENEOUS MEDIA USING PARALLEL COMPUTING TECHNOLOGIES

Stanislav A. Prokhorov

Student, Department of Information System and Computer Modeling,
Volgograd State University
stas.evgrashin@mail.ru, prim-211_335925@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Anastasiya V. Ten

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Information System and Computer Modeling,
Volgograd State University
pak.anastasia@gmail.com, ten.anastasia@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This paper studied a two-dimensional linear equation of thermal conductivity with a fractional differentiation order and compiled a computational algorithm for its numerical solution. Fractional derivatives in space and time were represented using the Riemann—Liouville definition, and the Grunwald—Letnikov definition with a shift was used to approximate them. Based on the computational algorithm, a program was written for computer modeling of the heat exchange process in heterogeneous environments. A version of the program has been developed using OpenMP parallel computing technology. The computer model has been tested by a number of numerical experiments to solve the problem of thermal momentum propagation. Based on the modeling results, the effect of fractional differentiation order on the thermal conductivity process was studied.

Key words: computer modeling, difference schemes, fractional differentiation, thermal equation, parallel calculations.