



www.volsu.ru



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.volsu.2023.3.5>

УДК 51.76
ББК 22.19, 41

Дата поступления статьи: 29.07.2023
Дата принятия статьи: 29.08.2023

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГНОЗА УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ПОЛЕВОГО МОНИТОРИНГА И ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ¹

Маржан Ануарбековна Саденова

Кандидат химических наук, ведущий научный сотрудник
приоритетного отделения Центра «Веритас»,
Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева
MSadenova@ektu.kz
<https://orcid.org/0000-0002-2870-6668>
ул. Серикбаева, 19, 070000 г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Сергей Сергеевич Храпов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем
и компьютерного моделирования,
Волгоградский государственный университет
khrapov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2660-2491>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Наиль Аликулы Бейсекенов

Магистрант, младший научный сотрудник
приоритетного отделения Центра «Веритас»,
Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева
BNail@ektu.kz
<https://orcid.org/0000-0003-4014-2903>
ул. Серикбаева, 19, 070000 г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Аннотация. Построена математическая модель прогноза урожайности сельскохозяйственных культур на основе данных полевого мониторинга и дистанционного зондирования Земли. Модель включает следующие основные

величины: вегетационные индексы NDVI, суммарный поток солнечного излучения на нижней границе атмосферы, эффективность использования фотосинтетически активного солнечного излучения, затраты биомассы на дыхание. После параметризации математической модели с использованием данных наблюдений количество неопределенных (калибровочных) коэффициентов модели уменьшается с 8 до 2. Эти коэффициенты определяются методом последовательных приближений при сравнении результатов расчетов с данными наблюдений урожайности конкретной сельхозкультуры (СХК) на заданном поле. Показано, что значения этих коэффициентов сильно зависят от выбора оптимальных условий роста СХК. Для уменьшения погрешности прогноза урожайности предложен подход, основанный на численном интегрировании суммарной плотности потока энергии методами второго и четвертого порядков точности. При использовании методов численного интегрирования высокого порядка точности погрешность прогноза урожайности снижается в среднем на 20 % по сравнению со широко используемой моделью расчета прироста биомассы, имеющей первый порядок точности.

Ключевые слова: математическое моделирование, методы численного интегрирования, модели прогноза урожайности, биомасса, индексы NDVI, индексы NDWI, поток солнечного излучения, фотосинтетически активное излучение.

Введение

Прогнозирование — специфический вид научного познания, который имеет длительную историю и начал интенсивно развиваться в середине прошлого века, охватив различные сферы деятельности человека в связи с необходимостью оптимизации управления динамикой сложных объектов и систем, а также подготовки к возможным событиям и контролю их развития. Научная обоснованность и методология прогнозирования определяются учетом объективных законов развития природы и экономических процессов производственной среды, связью с достижениями науки и инновациями, системным подходом, многовариантностью, оптимальностью и направленностью разрабатываемых прогностических моделей. Таким образом, с практической точки зрения прогнозирование в совокупности со своими моделями и методами можно рассматривать, как важный этап планирования, повышающий научную обоснованность хозяйственной деятельности предприятия. Урожайность сельскохозяйственных культур (СХК) — важнейший показатель эффективности агропромышленного комплекса, определяющий основные аспекты планирования хозяйственной деятельности сельхозпредприятий. Основными критериями оценки моделей прогнозирования урожайности являются качество, точность и надежность прогноза. Качество прогноза определяется следующим образом: $n = p/(p + q)$, где p — количество фактически подтвержденных прогнозов, а q — число не подтвержденных прогнозов.

В настоящее время разработано достаточно много эффективных методов прогнозирования урожайности СХК [6; 7; 10–14], которые классифицируются по трем основным направлениям:

- 1) динамические методы прогноза урожайности, в которых используются эволюционные модели оценок урожайности, учитывающие влияние внешних факторов на важные процессы развития СХК — фотосинтез, дыхание, рост и созревание;

- 2) статистические методы прогноза урожайности, в которых рассматриваются статистические закономерности влияния на развитие СХК агрометеорологических условий;
- 3) синоптико-статистические методы, в которых прогностические оценки выполняются с учетом динамики атмосферных потоков, влияющих на погодные условия обширных территорий.

Практически значимые задачи прогнозирования урожайности СХК решаются в большинстве случаев на основе результатов расчетов как с использованием физико-статистических, так и динамических (регрессионных) моделей.

В физико-статистических моделях хорошая точность и качество прогнозов достигаются при достаточной простоте вычислений, поэтому во многих случаях они чаще используются на практике [6; 7; 11].

В динамических регрессионных моделях существенную трудность представляет плохо формализуемый начальный этап, на котором определяются условия роста и формирования урожая для конкретной СХК на исследуемой территории, то есть подбираются ключевые количественные параметры модели [10; 12–14]. В таких моделях климат, окружающая среда СХК, а также территориальные аспекты земледелия учитываются на качественном уровне. Следующий этап реализации регрессионных моделей включает процесс составления списка основных (наиболее вероятных) факторов, по которым производится поиск исходных данных из архивов. С использованием полученных данных строятся корреляционные матрицы зависимости различных факторов между собой и урожайностью СХК. Далее проводится анализ этих матриц, который позволяет выделить важнейшие факторы, удовлетворяющие следующим свойствам [13; 14]: хорошая значимость; слабая корреляция этих факторов между собой или независимость. Затем определенные таким образом факторы являются основой для разработки математической модели, то есть уравнений регрессии различного типа (линейных, нелинейных, одно- и многопараметрических). Если построенная математическая модель обеспечивает необходимую точность прогноза (ошибка менее 20 %) на независимых данных ряда лет, то процесс создания динамической регрессионной модели можно считать законченным [13; 14]. В противном случае отдельные этапы повторяются, и при этом производится корректировка математической модели и структуры данных.

В регрессионных моделях ряды урожайности представляются в виде суммы детерминированной и случайной составляющих [13; 14]. Детерминированный ряд — функция времени (тренд), которая характеризует динамику почвенно-климатических условий и территориальные аспекты земледелия. Случайная составляющая характеризует не предсказуемые отклонения урожайности СХК от сложившихся тенденций на заданной территории [13].

Отметим, что наземные методы измерения характеристик урожайности СХК для конкретного региона являются субъективными и не могут в полном объеме обеспечить необходимую актуальность и своевременность данных. В настоящее время технологии дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) дают возможность проводить экономически обоснованный (с минимальными финансовыми затратами) оперативный мониторинг состояния сельскохозяйственных посевов на обширных территориях [9; 15].

Целью данной работы является построение математической модели и разработка программного обеспечения для прогнозирования урожайности основных видов сельскохозяйственных культур (зерновые, зернобобовые, масличные и кормовые) на основе данных полевого мониторинга и ДЗЗ.

1. Математическая модель прогноза урожайности сельхозкультур

В период вегетации биофизические процессы и структурные изменения СХК хорошо прослеживаются в отраженном растениями солнечном излучении, которое попадает на светочувствительные сенсоры спутниковых фотоприемников. Характеристики отраженного излучения растительности преобразуются в удобные для дальнейшего анализа величины: вегетационные индексы NDVI [17]; параметры переноса излучения (LAI, FAPAR) [16; 21]. Космический мониторинг динамики этих индексов и параметров в период вегетации СХК наряду с данными наземных метеонаблюдений позволяют повысить эффективность разрабатываемых методов прогноза урожайности.

В моделях биопродуктивности растений рассматривается комплексная система «атмосфера — растение — почва» и учитываются основные биофизические процессы: фотосинтез, суммарное испарение влаги, дыхание растений и почвы, рост растений и приток углерода в почву [5; 11; 18]. Детальный учет этих биофизических факторов в целом повышает точность методов прогноза урожайности СХК. Важным этапом адаптации и верификации моделей биопродуктивности является сравнение данных натуральных наблюдений с результатами математического моделирования, что позволяет подобрать эмпирические постоянные модели и на более детальном уровне учитывать в расчетах метеоусловия. С одной стороны, такой подход повышает точность модели и делает ее более универсальной, а с другой стороны, является наиболее ресурсоемким из-за необходимости задавать многочисленные агро-метео-химические параметры для каждого отдельного поля. Кроме того, многие из этих параметров, такие как интенсивность солнечного излучения и влажность почвы, не являются стандартными параметрами метеонаблюдений.

Для корректировки и уточнения модельных параметров биопродуктивности СХК применяется подход, основанный на сравнении рассчитанных характеристик отражения растительностью солнечного излучения с данными спутникового мониторинга [20; 24; 27]. Другим способом оптимизации динамических моделей биопродуктивности СХК является замена расчетных величин измеряемыми из космоса параметрами [1; 3; 27]. В большинстве случаев такая замена производится в той части расчета, где учитываются процесс фотосинтеза и величины LAI и FAPAR. При некоторых условиях, например, при возникновении ограничений со стороны спутниковых приборов величины LAI и FAPAR могут заменяться вегетационными индексами NDVI, которые неявным образом (косвенно) учитывают сезонную зависимость процессов фотосинтеза [4].

Динамику углерода в системе «атмосфера — растение — почва» можно моделировать по данным спутникового мониторинга (ДДЗЗ) с использованием хорошо известных методов [4; 8; 19; 27; 28] и уравнения Монтейта [22], которое описывает прирост биомассы и имеет вид:

$$NPP_i = PAR_i \cdot FAPAR_i \cdot LUE(CO_2, T_i, VPD_i, W_i, \dots) \cdot (1 - R_i), \quad (1)$$

где i — индекс временного интервала; NPP_i (Net Primary Production) — чистое первичное производство биомассы СХК (кг/м²/период); PAR_i (Photosynthetically Active Radiation) — фотосинтетически активное солнечное излучение (ФАР); $FAPAR_i$ (Fraction of Absorbed Photosynthetically Active Radiation) — доля поглощенного растениями ФАР; LUE (Light Use Efficiency) — функция эффективности преобразования энергии ФАР в биомассу; CO_2 — концентрация углекислого газа; T_i — температура воздуха; VPD_i (Vapour Pressure Deficit) — дефицит давления водяного пара; W_i — содержание влаги в почве; R_i — доля затрат биомассы на дыхание.

Модели расчета биомассы, основанные на уравнении (1) и учитывающие метеорологические условия в период вегетации, имеют большую точность прогнозов урожайности СХК по сравнению с регрессионными моделями, устанавливающими связь между урожайностью и постоянными во времени значениями индексов NDVI [8; 27]. Основной проблемой при реализации подхода (1) является калибровка параметров модели для каждого поля и СХК.

В общем случае уравнение преобразования энергии в биомассу можно представить в следующем виде:

$$\sigma(x, y, t_f) = \frac{1}{v^2} \int_0^{t_f} F_{\Sigma}(x, y, t) dt, \quad (2)$$

где $\sigma(x, y, t_f)$ — поверхностная плотность биомассы СХК (кг/м²); v — скорость преобразования энергии в биомассу (м/с), зависящая от региона и СХК; t_f — временной период от начала вегетации до сбора урожая (с); $F_{\Sigma}(x, y, t)$ — суммарная плотность потока энергии (Вт/м²), для которой с учетом (1) будем иметь:

$$F_{\Sigma}(x, y, t) = PAR(x, y, t) \cdot FAPAR(x, y, t) \cdot LUE(x, y, t) \cdot [1 - R(x, y, t)]. \quad (3)$$

В работах [4; 21; 23] на основе экспериментальных данных и результатов математического моделирования переноса излучения получена линейная корреляция между величиной $FAPAR$ и вегетационным индексом $NDVI$. Поэтому мы предполагаем, что плотность энергии солнечного излучения в (3), поглощаемая за день СХК, определяется выражением $PAR \cdot FAPAR = F_{BOA} \cdot NDVI$, где величина суммарного потока солнечного излучения на нижней границе атмосферы (Bottom of Atmosphere) F_{BOA} рассчитывается по эмпирической формуле [26]:

$$F_{BOA} = F_{TOA}(t_d) \left[A\sqrt{T_{\max} - T_{\min}} + B\sqrt{1 - CF} \right], \quad (4)$$

где F_{TOA} — средний поток солнечного излучения на верхней границе атмосферы (Top of Atmosphere); t_d — время в днях с начала года; T_{\min} и T_{\max} — минимальная и максимальная дневная температура воздуха; CF — степень покрытия атмосферы облаками (Cloud Fraction); A и B — эмпирические постоянные, зависящие от географического положения поля. Для вычисления потока F_{TOA} в зависимости от времени года и зенитного угла Солнца используется следующее соотношение [25]:

$$F_{TOA}(t_d) = F_0 \left[1 + 0,033 \cos \left(\frac{360t_d}{365} \right) \right] \langle \cos \theta_s \rangle, \quad (5)$$

где $F_0 = 1367$ Вт/м² — солнечная постоянная; $\langle \cos \theta_s \rangle$ — средний косинус зенитного угла Солнца в данное время года.

Величина эффективности использования ФАР для фотосинтеза задается в следующем виде $LUE = \eta_1(T)\eta_2(W)$, где функции η_1 и η_2 определяют зависимость интенсивности фотосинтеза от температуры воздуха T и влажности почвы W соответственно. Для функции $\eta_1(T)$ воспользуемся моделью [11], в которой эта функция имеет максимум $\eta_1(T) = 1$ с температурным оптимумом фотосинтеза T_{opt} :

$$\eta_1(T) = \exp \left\{ -a \left(\frac{T - T_{opt}}{10} \right)^2 \right\}, \quad (6)$$

где a — положительный безразмерный параметр.

Функция $\eta_2(W)$ задается в соответствии с однопараметрической моделью [2]:

$$\eta_2(W) = 1 - \left(\frac{W - W_{opt}}{W_{opt}} \right)^2, \quad (7)$$

где W и W_{opt} — фактическая и оптимальная влажность метрового слоя почвы соответственно.

Величина затрат биомассы на дыхание рассчитывается по следующей формуле [11]:

$$R(T) = R_0 \cdot 2^{(T-T_R)/10}, \quad (8)$$

где T_R — базисная температура дыхания. Если температура воздуха на 10°C превышает значение T_R , то из этого уравнения следует, что расход органического вещества на дыхание увеличивается в два раза.

Величину влажности W можно измерять непосредственно во время полевого мониторинга, используя соответствующие датчики. В случае отсутствия на поле таких датчиков для расчета влажности метрового слоя почвы можно использовать методику, описанную в работе [4] и основанную на аналитической параметризации реанализа (ERA-Interim). В этом подходе данные ERA-Interim пересчитываются в среднеобъемную влажность метрового слоя почвы с учетом вклада каждого слоя. Далее в зависимости от стандартных метеорологических параметров используется следующая аппроксимация для значения влажности почвы:

$$W_i = W_{i-1} - c_1 \cdot VPD_i \cdot W_{i-1} + c_2 \cdot P_i + c_3 \cdot VPD_i, \quad (9)$$

где i — порядковый номер дня в году; VPD — дефицит давления водяного пара в Па; $P = P_a + P_w$ — суммарное количество осадков за сутки в мм; P_a — количество атмосферных осадков; P_w — количество выпавшей на грунт воды за счет орошения СХ-поля; c_1, c_2, c_3 — положительно определенные коэффициенты, зависящие от почвенно-климатических особенностей исследуемой территории. Первое слагаемое в (9) определяет запасы влаги в почве на начало i -го дня, второе учитывает уменьшение этих запасов за счет испарения, а третье и четвертое — это увеличение запасов влаги за счет осадков и конденсации водяного пара соответственно.

2. Описание объекта исследования, данные полевого мониторинга и дистанционного зондирования

Исследование было проведено на экспериментальном поле, расположенном на востоке Казахстана. На рисунке 1 представлено географическое расположение сельскохозяйственного поля. Общая площадь поля составляет 125 га, в соответствии с почвенной таксономией, на территории исследуемого поля преобладает тип черноземной почвы (чернозем). Восточная часть Казахстана характеризуется резко континентальным климатом. Выращиваемая на поле СХК яровая пшеница и ее основные характеристики, касающиеся параметров температуры, фотосинтеза, дыхания и влажности почвы для модели:

- Температурный оптимум фотосинтеза T_{opt} для яровой пшеницы составляет около $25\text{--}30^\circ\text{C}$.

- Базисная температура дыхания T_R для яровой пшеницы обычно составляет около 5–10 °С. Это означает, что дыхание пшеницы будет происходить даже при низких температурах, но с более низкой интенсивностью.
- Оптимальная влажность почвы W_{opt} для яровой пшеницы составляет около 50–70 % от водоудерживающей способности почвы.

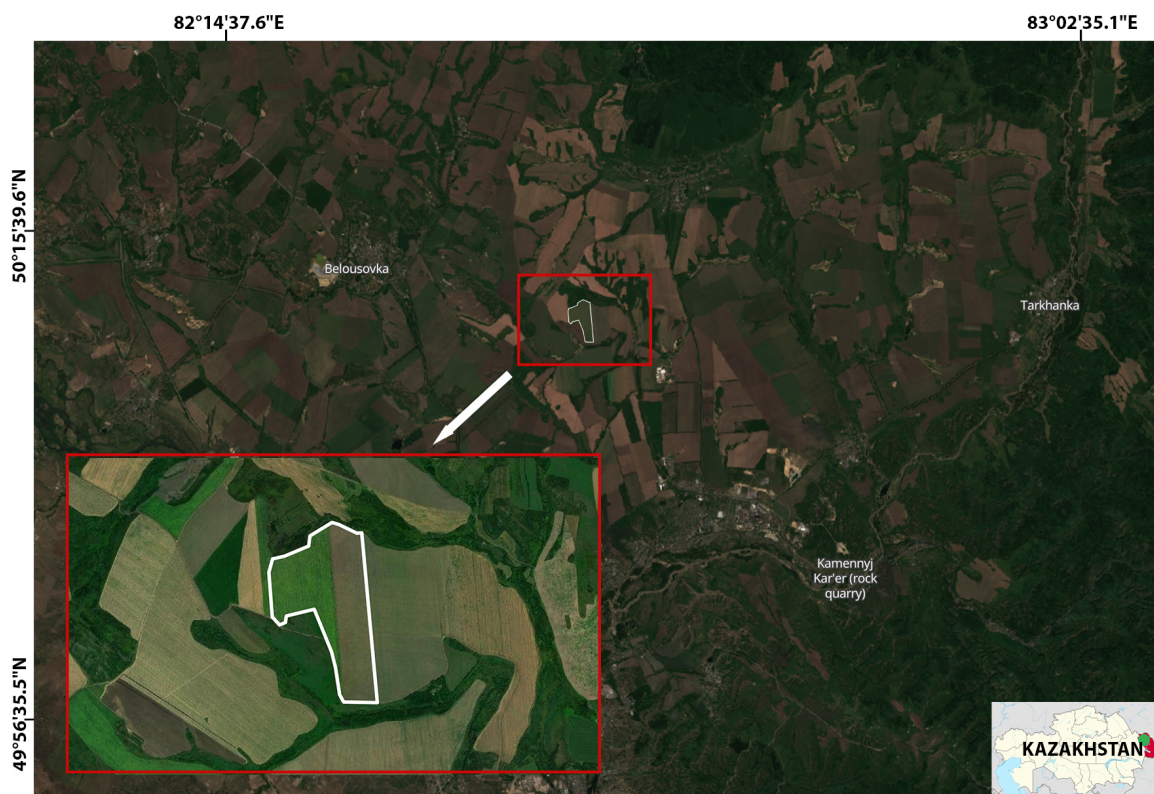


Рис. 1. Географическое положение сельскохозяйственного поля с посевами яровой пшеницы

Метеорологические данные, представленные на рисунке 2, были получены с локальной метеостанции, расположенной в районе исследования. На этом рисунке показана температура (T) с 2020 по 2023 год. Метеорологические условия в районе исследования характеризуются выраженными сезонными колебаниями. Можно заметить, что в районе наблюдается ярко выраженный сезонный цикл, с более высокими температурами до +38 °С в летние месяцы и более низкими температурами зимой до –40 °С. Максимальная температура (T_{max}) и минимальная температура (T_{min}) также демонстрируют аналогичную картину.

На рисунке 3 представлена динамика относительной влажности воздуха восточной части Казахстана в течение нескольких лет. Относительная влажность воздуха является важным параметром, определяющим содержание водяного пара в атмосфере относительно его максимальной насыщенной концентрации при данной температуре. На рисунке 3 наблюдаются колебания относительной влажности воздуха в течение исследуемого периода. Эти изменения могут быть связаны с сезонными факторами, влиянием местных географических особенностей и климатических систем, а также с изменениями общего климатического тренда.

Динамика дефицита давления водяного пара (VPD) также является важным показателем, отражающим взаимосвязь между влажностью воздуха и его способностью удерживать водяной пар. VPD измеряется разницей между насыщенным давлением водяного пара и давлением фактического водяного пара в атмосфере. На рисунке 4 представлены данные о динамике дефицита давления водяного пара восточной части Казахстана на протяжении нескольких лет. Изменения в VPD могут свидетельствовать о периодах повышенной сухости воздуха и потенциальной способности атмосферы удерживать водяной пар. Такие изменения могут быть связаны с факторами, такими как климатические системы, воздействие приземных и высотных потоков воздуха, а также изменениями температуры и влажности окружающей среды. Анализ динамики дефицита давления водяного пара в сочетании с другими параметрами, такими как относительная влажность, облачность и количество атмосферных осадков, позволяет получить более полное представление о влажностных условиях восточной части Казахстана и их влиянии на климатические процессы в регионе.

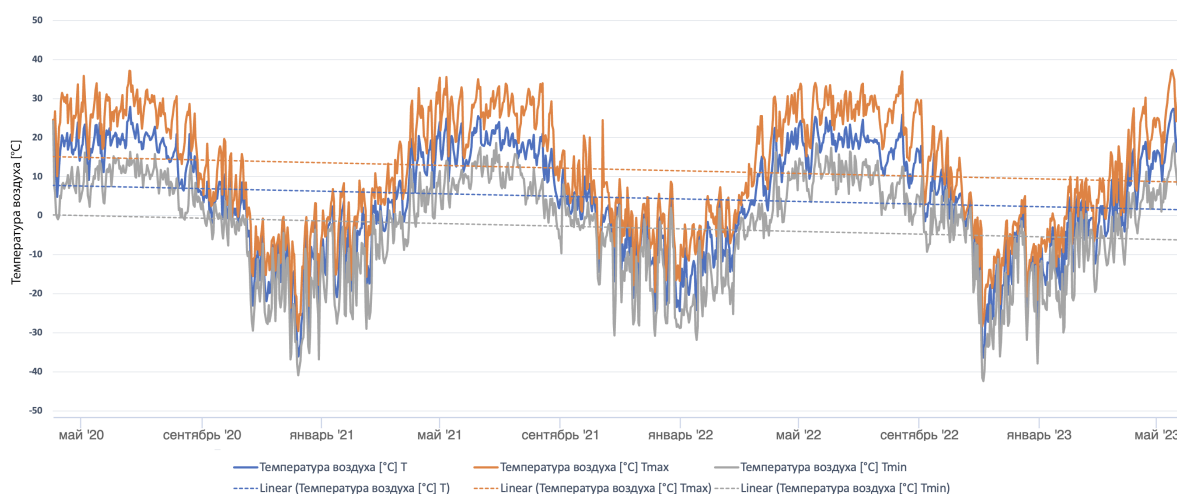


Рис. 2. Динамика температуры воздуха: анализ средней T , T_{\max} и T_{\min} за сутки, с 2020 по 2023 г.

Структура данных и методы их обработки в полевом мониторинге описываются следующим образом. Первоначально для получения космических снимков используется ГИС-портал EO Browser со спутника Sentinel-2 L2A, который является основным источником данных для расчета вегетационного индекса NDVI. Затем полученные снимки подвергаются обработке в программе QGIS для последующего расчета вегетационных индексов.

Количество атмосферных осадков (P_a) также отражает влияние влажности воздуха на климатические условия восточной части Казахстана. Изменения в количестве осадков могут быть связаны с изменениями в водяном цикле, периодами засухи или паводков, а также с изменениями общего климатического режима. На рисунке 5 отображена зависимость влажности почвы W и количества атмосферных осадков (P_a) от времени (в сутках) для нескольких лет на данном поле. График показывает изменения этих параметров на протяжении рассматриваемого периода.

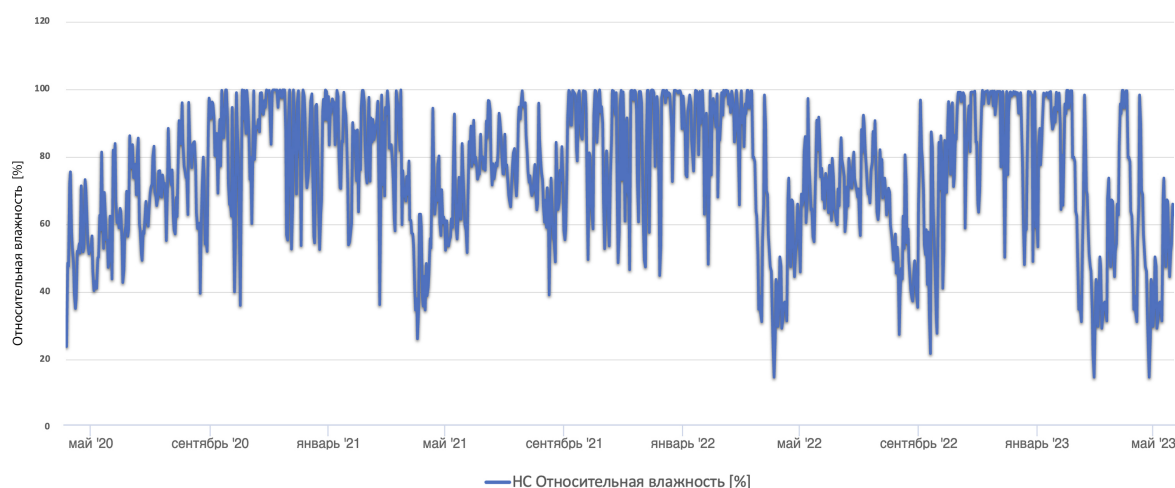


Рис. 3. Динамика относительной влажности в % за сутки, с 2020 по 2023 г.

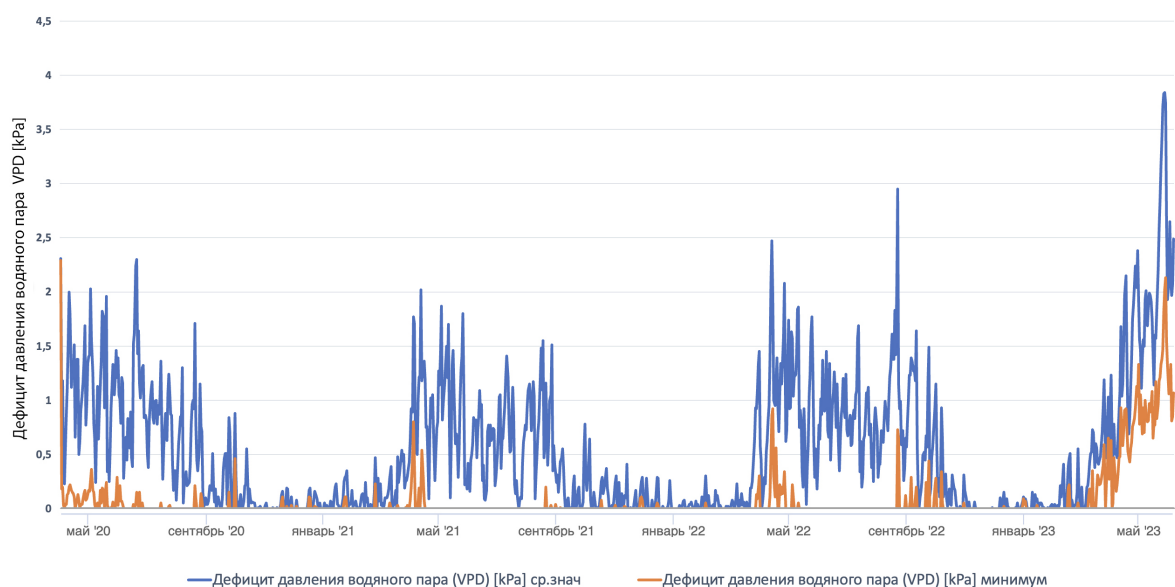


Рис. 4. Динамика дефицита давления водяного пара VPD за сутки, с 2020 по 2023 г.

В таблице 1 содержится информация о реальных значениях урожайности σ на данном поле за несколько лет. Данная таблица предоставляет количественные данные о производительности посевов за указанный период времени.

Необходимо отметить, что для более точного и всестороннего анализа данных полевого мониторинга проводятся дополнительные исследования и статистические анализы, которые позволяют получить более полную информацию о состоянии и производительности данного поля. Такой подход способствует более глубокому пониманию факторов, влияющих на агроклиматические процессы и оптимизацию сельскохозяйственных практик.



Рис. 5. Зависимость влажности почвы W и количества атмосферных осадков (P_a) (в сутках), с 2017 по 2022 г.

Таблица 1

Урожайность исследуемого поля с 2017 по 2022 г.

Год	Сельхозкультура	Урожайность (ц/га)
2017	Яровая пшеница	30
2018	Яровой ячмень	35
2019	Яровой рапс / Посевной горох	32
2020	Яровая пшеница	9
2021	Озимая пшеница	26
2022	Яровая пшеница	37,4

В нашем исследовании были использованы данные дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) для анализа пространственного распределения индекса NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) на изучаемом поле в различные вегетационные периоды. Структура данных ДЗЗ включает растровые изображения, где каждый пиксель представляет определенную область на земной поверхности и содержит соответствующее значение индекса NDVI.

Обработка данных ДЗЗ включает ряд методов, которые позволяют проанализировать и интерпретировать полученные растровые изображения. Пространственный анализ осуществлен с помощью геоинформационных систем (ГИС) и методов обработки изображений, включая классификацию, сегментацию и анализ текстур. Эти методы позволили выявить пространственные шаблоны изменения индекса NDVI на поле и проанализировать зеленый покров.

Кроме того, была изучена зависимость индекса NDVI к T_{max} и T_{min} за сутки, для нескольких лет. На рисунке 6 был построен график, где на оси абсцисс отложено время, а на оси ординат — значения индекса NDVI, T_{max} и T_{min} . На графике представлена динамика за 5 лет, что позволяет наблюдать и сравнивать динамику изменения зеленого покрова на поле в разные годы. Этот анализ временной зависимости индекса

NDVI позволяет выявить сезонные изменения растительности и оценить ее долгосрочные тенденции. Таким образом, данные ДЗЗ и их обработка предоставляют уникальную возможность анализа пространственного распределения и временной динамики индекса NDVI на изучаемых полях. Результаты нашего исследования могут быть использованы для более глубокого понимания состояния растительности и ее изменений на данной территории, что имеет важное значение для экологического и сельскохозяйственного анализа.

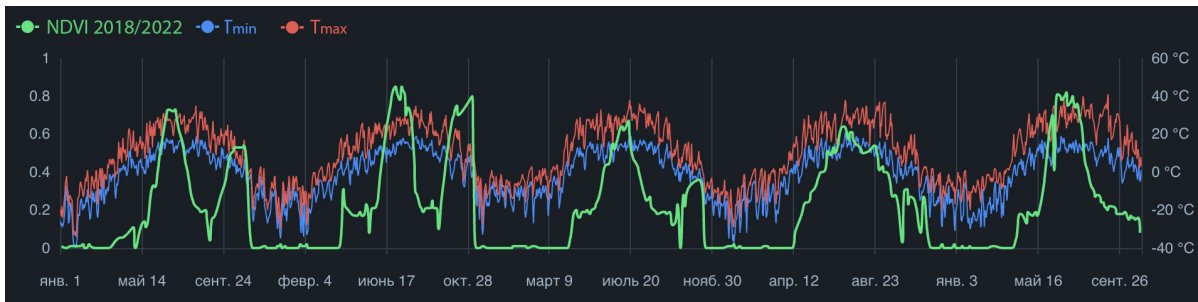


Рис. 6. График зависимости индекса NDVI к T_{\max} и T_{\min} за сутки, с 2018 по 2022 г.

3. Численный метод и оценка калибровочных параметров модели

Для вычисления поверхностной плотности биомассы σ на основе (2) будем использовать методы численного интегрирования различного порядка. Простейшим методом интегрирования первого порядка является метод прямоугольников, применяя который в (2), получим:

$$\sigma_I(x, y, t_f) = \frac{\tau}{v^2} \sum_{i=0}^{N_f} F_{\Sigma}(x, y, t_i), \quad (10)$$

где τ — временной шаг; $N_f = t_f/\tau$ — количество временных слоев. Отметим, что в большинстве работ по прогнозу урожайности СХК, основанных на модели Монтейта, используется аппроксимация первого порядка (10), которая при наличии нестационарности параметров модели в период вегитации может приводить к значительной погрешности прогноза величины σ . Поэтому, для повышения точности прогноза величины σ воспользуемся методами второго (метод трапеций) и четвертого (метод Симпсона) порядков:

$$\begin{aligned} \sigma_{II}(x, y, t_f) &= \frac{\tau}{2v^2} \sum_{i=1}^{N_f} [F_{\Sigma}(x, y, t_{i-1}) + F_{\Sigma}(x, y, t_i)], \\ \sigma_{IV}(x, y, t_f) &= \frac{\tau}{6v^2} \sum_{i=1}^{N_f-1} [F_{\Sigma}(x, y, t_{i-1}) + 4F_{\Sigma}(x, y, t_i) + F_{\Sigma}(x, y, t_{i+1})]. \end{aligned} \quad (11)$$

Величина суммарной плотности энергии F_{Σ} в (10)–(11) зависит как от измеряемых (наблюдаемых) параметров, так и от калибровочных (неопределенных) коэффициентов модели. В общем случае имеем 8 таких калибровочных коэффициентов: $v, A, B, a, R_0, c_1, c_2, c_3$.

Оценочные значения калибровочных параметров c_1 , c_2 и c_3 можно определить из уравнения (9), зная данные метеорологических наблюдений (VPD_i , P_i) и полевого мониторинга (W_{i-1} , W_i). Для определения трех параметров c_k сначала последовательно решаем систему уравнений (9), записывая ее для трех моментов времени (t_i , t_{i+1} , t_{i+2} , где $i = 1, \dots, N_f - 2$). В результате получим набор из $N_f - 2$ значений трех коэффициентов c_k . Далее, усредняя полученный набор параметров для всего периода, получим искомые значения калибровочных коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 .

Аналогично оценочные значения калибровочных параметров A и B можно определить из уравнения (4), зная данные измерений величин минимальной и максимальной суточных температур (T_{\min} , T_{\max}), суммарного потока солнечного излучения на нижней границе атмосферы F_{BOA} и степени покрытия атмосферы облаками CF .

Если в нашей модели произвести нормировку параметра a на коэффициент v , то вместо трех оставшихся калибровочных коэффициентов v , a , R_0 будем иметь два: $\hat{a} = -2a \ln v$ и R_0 .

Таким образом, для модельной задачи прогноза урожайности (10)–(11) имеем всего 2 неопределенных (калибровочных) коэффициента \hat{a} и R_0 , которые можно получить из сравнения результатов расчетов с данными наблюдений урожайности СХК на заданном поле.

4. Результаты математического моделирования

Исследуем влияние параметров модели и методов интегрирования на расчетную величину поверхностной плотности биомассы σ на примере яровой пшеницы. В качестве расчетного периода выберем временной диапазон 04.04.2022–31.08.2022 (150 сут.), который соответствует периоду роста выбранной СХК.

Для выбранного периода времени динамика индекса $NDVI$, средней температуры T , влажности почвы W и суммарного потока солнечного излучения на нижней границе атмосферы F_{BOA} представлена на рисунке 7. Видно, что весной величина F_{BOA} колеблется в пределах 50–250 Вт/м², а летом — 100–300 Вт/м². Значение температуры изменяется от 1–10 °С весной до 15–25 °С летом. Заметна хорошая корреляция между распределениями T и F_{BOA} , значения локальных минимумов которых могут быть обусловлены сплошной облачностью. В рассматриваемый период значение влажности почвы W практически не меняется и составляет порядка 30 %, а индекс $NDVI$ изменяется от 0,01 весной до 0,8 летом.

Поскольку значения оптимальных параметров температуры фотосинтеза T_{opt} , влажности W_{opt} и базисной температуры дыхания T_R для выбранной СХК лежат в некотором диапазоне, то будем рассматривать три модели:

A — с минимальными значениями оптимальных параметров $T_{opt} = 25$ °С, $W_{opt} = 50$ % и $T_R = 5$ °С;

B — со средними значениями оптимальных параметров $T_{opt} = 27,5$ °С, $W_{opt} = 60$ % и $T_R = 7,5$ °С;

C — с минимальными значениями оптимальных параметров $T_{opt} = 30$ °С, $W_{opt} = 70$ % и $T_R = 10$ °С.

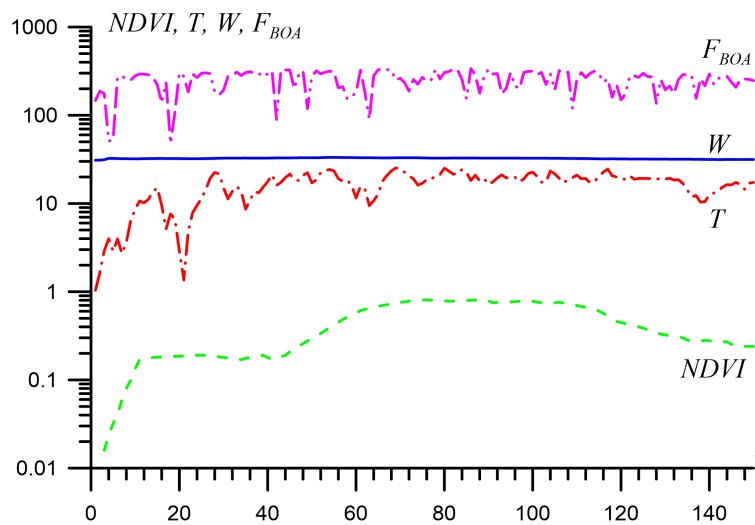


Рис. 7. Зависимости индекса $NDVI$, температуры T , влажности W и суммарного потока солнечного излучения на нижней границе атмосферы F_{BOA} от времени

Далее для удобства представления результатов моделирования будем использовать в качестве единицы измерений: время — сутки; масса — ц; площадь — га.

Калибровочные параметры модели определялись методом последовательных приближений при сравнении результатов расчетов величины σ_{IV} по формуле (11) с данными наблюдений (см. табл. 1, яровая пшеница 2022 г.). В результате для модели B имеем: $\hat{a} = 0,261$, $R_0 = 0,001$.

На рисунке 8 показана эволюция скорости роста поверхностной плотности биомассы $\frac{d\sigma}{dt}$ для моделей A , B и C . Видно, что зависимость величины $\frac{d\sigma}{dt}$ от времени имеет немонотонный характер, что обусловлено аналогичной немонотонной зависимостью наблюдаемых данных среднесуточной температуры $T(t)$, влажности почвы $W(t)$ и индекса $NDVI(t)$, входящих в определение поверхностной плотности биомассы (2). С увеличением значений оптимальных параметров (модели от A до C) величина скорости роста поверхностной плотности биомассы уменьшается.

Динамика расчетных значений поверхностной плотности биомассы σ_{IV} для моделей A , B и C показана на рисунке 9. Видно, что с увеличением значений оптимальных параметров (модели от A до C) величина поверхностной плотности биомассы уменьшается. По сравнению с наиболее точной моделью B , для которой проводился подбор калибровочных параметров, в модели A значение σ_{IV} увеличивается на 20 % до 44,9 ц/га, а в модели C уменьшается на 15 % до 32,4 ц/га. Различия между моделями A и C достигают 40 %. Таким образом, значения калибровочных коэффициентов, при которых достигается наилучшее согласие с данными наблюдений, сильно зависит от выбора оптимальных параметров модели (T_{opt} , W_{opt} , T_R). Например, если подбирать коэффициент \hat{a} при фиксированном $R_0 = 0,001$ для модели A , то получим: $\hat{a} = -0,159$. Подбирая аналогичным образом этот калибровочный коэффициент для модели C , получим: $\hat{a} = 0,301$.

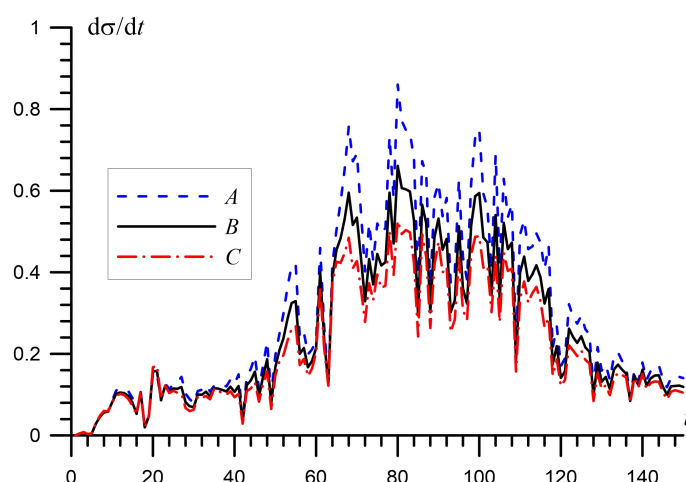


Рис. 8. Зависимость скорости роста поверхностной плотности биомассы $\frac{d\sigma}{dt}$ от времени для различных моделей: A , B и C

Рассмотрим влияние численного метода интегрирования в (2) на точность прогноза урожайности. На рисунке 10 показана динамика относительного отклонения $\delta = \frac{|\sigma_I - \sigma_{IV}|}{\sigma_{IV}}$ между методами первого и четвертого порядков. Видно, что на начальной стадии роста СХК (~30 дн.) относительное отклонение между величинами σ_I и σ_{IV} достигает порядка 5–40 %. В середине периода роста — $\delta \simeq 1-5\%$, а в конце отклонение становится незначительным $\delta \sim 0,1\%$. Различия относительного отклонения δ в моделях A , B и C заметны только на конечной стадии роста СХК.

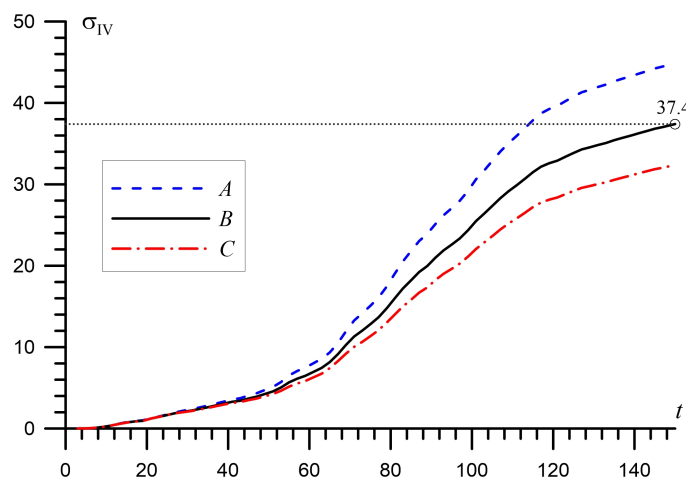


Рис. 9. Зависимость поверхностной плотности биомассы σ_{IV} от времени для различных моделей: A , B и C

Заключение

Разработана математическая модель прогноза урожайности сельскохозяйственных культур, которая включает данные полевого мониторинга и дистанционного зондирования Земли: вегетационные индексы NDVI, суммарный поток солнечного излучения на нижней границе атмосферы, эффективность использования фотосинтетически активно-

го солнечного излучения, затраты биомассы на дыхание. В общем случае построенная математическая модель содержит 8 неопределенных (калибровочных) коэффициентов, что существенно затрудняет их определение для конкретной СХК на заданном поле. Используя параметризацию на основе данных мониторинга, количество калибровочных коэффициентов математической модели уменьшено до двух.

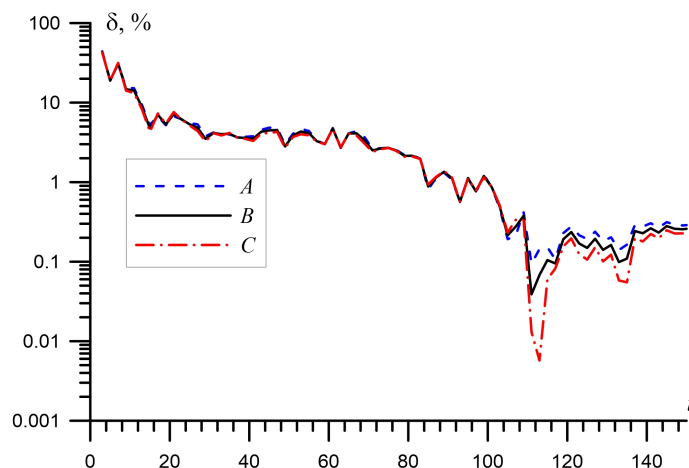


Рис. 10. Зависимость относительной погрешности $\delta = |\sigma_I - \sigma_{IV}|/\sigma_{IV}$ от времени для различных моделей: A , B и C

Моделирование прогноза урожайности проведено на экспериментальном поле, которое располагается на востоке Казахстана и имеет площадь 125 га. В качестве конкретной СХК для исследования выбрана яровая пшеница, для которой определены оптимальные условия роста (влажности почвы, температуры фотосинтеза и дыхания). Получены и проанализированы данные мониторинга, на основе которых подготовлены временные ряды среднесуточных значений индекса $NDVI$, температуры T , влажности почвы W и суммарного потока солнечного излучения на нижней границе атмосферы F_{BOA} , необходимые для расчета величины поверхностной плотности биомассы σ .

Проведено численное моделирование динамики прироста поверхностной плотности биомассы конкретной СХК на заданном поле при различных значениях оптимальных параметров (T_{opt} , W_{opt} , T_R). Калибровочные коэффициенты определялись методом последовательных приближений при сравнении результатов расчетов поверхностной плотности биомассы σ с данными наблюдений урожайности выбранной СХК. Показано, что выбор значений этих оптимальных параметров (модели A , B и C) оказывает существенное влияние как на расчетные (прогнозные) значения поверхностной плотности биомассы, так и на величину калибровочных коэффициентов. Различия между моделями A , B и C достигают 15–40 % по величине σ и 15–160 % по значению калибровочного коэффициента \hat{a} .

Исследовано влияние порядка точности метода численного интегрирования суммарной плотности потока энергии, расходуемой СХК для роста. Показано, что использование методов численного интегрирования четвертого порядка точности снижает погрешность прогноза урожайности в среднем на 20 % по сравнению с широко используемой моделью расчета прироста биомассы, имеющей первый порядок точности.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Данное исследование выполнено при поддержке проекта BR10865102 «Разработка технологий дистанционного зондирования земли (ДЗЗ) для улучшения управления сельским хозяйством», финансируемого Министерством сельского хозяйства Республики Казахстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брыксин, В. М. Использование модели биопродуктивности EPIC и космоснимков MODIS для прогнозирования урожайности зерновых культур / В. М. Брыксин, А. В. Евтюшкин // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса: физические основы, методы и технологии мониторинга окружающей среды, потенциально опасных явлений и объектов. — 2007. — Т. 2, № 4. — С. 189–196.

2. Дмитренко, В. П. Погода, климат и урожай полевых культур / В. П. Дмитренко. — Киев : Ника-центр, 2010. — 620 с.

3. Клещенко, А. Д. Использование данных дистанционного зондирования для моделирования физиологических процессов растений в динамических моделях прогнозирования урожая / А. Д. Клещенко, Т. А. Найдина // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2011. — Т. 8, № 1. — С. 170–177.

4. Лысенко, С. А. Прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур на основе спутникового мониторинга динамики углерода в наземных экосистемах / С. А. Лысенко // Исследование Земли из космоса. — 2019. — № 4. — С. 48–59.

5. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур / Р. А. Полуэктов, Э. И. Смоляр, В. В. Терлеев, А. Г. Топаж. — СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2006. — 392 с.

6. Набока, В. В. Методы оценки условий формирования урожая и прогноза средней урожайности яровой пшеницы по территории Томской, Новосибирской, Кемеровской областей и Алтайского края и результаты их оперативных испытаний / В. В. Набока, И. Г. Ковригина // Информационный сборник. — 2011. — № 38. — С. 115–130.

7. Набока, В. В. О развитии в ГУ «СибНИГМИ» прикладного динамико-статистического моделирования для агрометеорологического обеспечения земледелия Урало-Сибирского региона / В. В. Набока // Труды СибНИГМИ. — 2011. — № 106. — С. 112–129.

8. Прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур на основе спутниковых данных: возможности и перспективы / И. Ю. Савин, С. А. Барталев, Е. А. Лупян, В. А. Толпин, С. А. Хвостиков // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. — 2010. — Т. 7, № 3. — С. 275–285.

9. Савин, И. Ю. Оперативный спутниковый мониторинг состояния посевов сельскохозяйственных культур в России / И. Ю. Савин, Е. А. Лупян, С. А. Барталев // Геоматика. — 2011. — № 2. — С. 69–76.

10. Сиротенко, О. Д. Динамическая модель погода–урожай для яровых зерновых культур и ее использование при оценке агрометеорологических условий формирования урожая в аридной зоне / О. Д. Сиротенко, Е. В. Абашина, В. Н. Павлова // Труды ВНИИСХМ. — 1985. — № 10. — С. 43–61.

11. Сиротенко, О. Д. Математическое моделирование водно-теплового режима и продуктивности агроэкосистем / О. Д. Сиротенко. — Л. : Гидрометеиздат, 1981. — 167 с.

12. Сиротенко, О. Д. Об использовании динамических моделей для оценки агрометеорологических условий формирования урожая / О. Д. Сиротенко, Е. В. Абашина // Метеорология и гидрология. — 1982. — Вып. 8. — С. 112–129.

13. Старостина, Т. В. Методы прогноза урожайности зерновых и зернобобовых культур по отдельным муниципальным районам, ярового ячменя и овса по Омской области / Т. В. Старостина. — Новосибирск : ФГБУ СибНИГМИ, 2013. — 89 с.

14. Старостина, Т. В. Метод расчета валового сбора ярового ячменя в Новосибирской области и Алтайском крае / Т. В. Старостина // Труды ЗапСибНИИ. — 1985. — Вып. 71. — С. 62–68.
15. Степанов, А. С. Прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур на основе данных дистанционного зондирования Земли (на примере сои) / А. С. Степанов // Вычислительные технологии. — 2019. — Т. 24, № 6. — С. 125–133.
16. Baret, F. Estimating Canopy Characteristics from Remote Sensing Observations: Review of Methods and Associated Problems / F. Baret, S. Buis // Estimating Canopy Characteristics from Remote Sensing Observations: Review of Methods and Associated Problems. — 2008. — P. 173–201.
17. Indices of Vegetation Activity / A. Huete, T. Miura, H. Yoshioka, P. Ratana, M. Broich // Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. — P. 1–41.
18. Contribution of Remote Sensing on Crop Models: A Review / D. A. Kasampalis, T. K. Alexandridis, C. Deva, A. Challinor // J. Imaging. — 2018. — Vol. 4, № 4. — Article ID: 52. — DOI: <https://doi.org/10.3390/jimaging4040052>
19. Estimating Crop Stresses, Aboveground Dry Biomass and Yield of Corn Using Multi-Temporal Optical Data Combined with a Radiation Use Efficiency Model / J. Liu, E. Pattey, J. R. Miller, H. McNairn, A. Smith, B. Hu // Remote Sens. Environ. — 2010. — Vol. 114, № 6. — P. 1167–1177.
20. Estimation of Winter Wheat Biomass and Yield by Combining the AquaCrop Model and Field Hyperspectral Data / X. Jin, L. Kumar, Z. Li, X. Xu // Remote Sens. — 2016. — Vol. 8, № 12. — Article ID: 972. — DOI: <https://doi.org/10.3390/rs8120972>
21. Green Leaf Area and Fraction of Photosynthetically Active Radiation Absorbed by Vegetation / S. Ganguly, R. R. Nemani, F. Baret, J. Bi // Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. — P. 43–61.
22. Monteith, J. L. Solar Radiation and Productivity in Tropical Ecosystems / J. L. Monteith // J. Appl. Ecol. — 1972. — Vol. 9, № 3. — P. 747–766.
23. Myneni, R. B. On the Relationship Between FAPAR and NDVI / R. B. Myneni, D. L. Williams // Remote Sens. Environ. — 1994. — Vol. 49, № 3. — P. 200–211.
24. Remote Sensing and Crop Production Models: Present Trends / R. Delcolle, S. J. Maas, M. Gurif, F. Baret // SPRS J. Photogramm. — 1992. — Vol. 47, № 2–3. — P. 145–161.
25. Sen, Z. Solar Energy Fundamentals and Modeling Techniques Atmosphere, Environment, Climate Change and Renewable Energy / Z. Sen. — London : Springer-Verlag London Limited, 2008. — 276 p.
26. Supit, I. A Simple Method to Estimate Global Radiation / I. Supit, R. R. Van Kappel // Solar Energy. — 1998. — Vol. 63, № 3. — P. 147–160.
27. Using Low Resolution Satellite Imagery for Yield Prediction and Yield Anomaly Detection / F. Rembold, C. Atzberger, I. Savin, O. Rojas // Remote Sens. — 2013. — Vol. 5, № 4. — P. 1704–1733.
28. Xiao, X. Gross Primary Production of Terrestrial Vegetation / X. Xiao, C. Jin, J. Dong // Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. — P. 127–148.

REFERENCES

1. Bryksin V.M., Evtuyshkin A.V. Ispolzovanie modeli bioproduktivnosti EPIC i kosmosnimkov MODIS dlya prognozirovaniya urozhaynosti zernovykh kultur [Using the EPIC Bioproductivity Model and MODIS Satellite Images to Predict Grain Yields]. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa: fizicheskie osnovy, metody i tekhnologii monitoringa okruzhayushchey sredy, potentsialno opasnykh yavleniy i obyektov*, 2007, vol. 2, no. 4, pp. 189–196.
2. Dmitrenko V.P. *Pogoda, klimat i urozhay polevykh kultur* [Weather, Climate and Harvest of Field Crops]. Kiev, Nika-tsentr Publ., 2010. 620 p.

3. Kleshchenko A.D., Naydina T.A. Ispolzovanie dannykh distantsionnogo zondirovaniya dlya modelirovaniya fiziologicheskikh protsessov rasteniy v dinamicheskikh modelyakh prognozirovaniya urozhaya [Using Remote Sensing Data to Simulate Physiological Processes of Plants in Dynamic Crop Forecasting Models]. *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2011, vol. 8, no. 1, pp. 170-177.

4. Lysenko S.A. Prognozirovanie urozhaynosti selskokhozyaystvennykh kultur na osnove sputnikovogo monitoringa dinamiki ugleroda v nazemnykh ekosistemakh [Crop Yield Forecasting Based on the Satellite Monitoring of Carbon Dynamics in Terrestrial Ecosystems]. *Issledovanie Zemli iz kosmosa*, 2019, no. 4, pp. 48-59.

5. Poluektov R.A., Smolyar E.I., Terleev V.V., Topazh A.G. *Modeli produktsionnogo protsessa selskokhozyaystvennykh kultur* [Models of the Production Process of Agricultural Crops]. Saint Petersburg, Izd-vo S.-Peterb. un-ta, 2006. 392 p.

6. Naboka V.V., Kovrigina I.G. Metody otsenki usloviy formirovaniya urozhaya i prognoza sredney urozhaynosti yarovoy pshenitsy po territorii Tomskoy, Novosibirskoy, Kemerovskoy oblastey i Altayskogo kraya i rezultaty ikh operativnykh ispytaniy [Methods for Assessing the Conditions of Crop Formation and Forecasting the Average Yield of Spring Wheat on the Territory of Tomsk, Novosibirsk, Kemerovo Regions and Altai Krai and the Results of Their Operational Tests]. *Informatsionnyy sbornik*, 2011, no. 38, pp. 115-130.

7. Naboka V.V. O razvitiy v GU «SibNIGMI» prikladnogo dinamiko-statisticheskogo modelirovaniya dlya agrometeorologicheskogo obespecheniya zemledeliya Uralo-Sibirskogo regiona [About the Development of Applied Dynamic and Statistical Modeling in the State Institution “SibNIGMI” for Agrometeorological Support of Agriculture in the Ural-Siberian Region]. *Trudy SibNIGMI*, 2011, no. 106, pp. 112-129.

8. Savin I.Yu., Bartalev S.A., Lupyay E.A., Tolpin V.A., Khvostikov S.A. Prognozirovanie urozhaynosti selskokhozyaystvennykh kultur na osnove sputnikovyykh dannykh: vozmozhnosti i perspektivy [Crop Yield Forecasting Based on Satellite Data: Opportunities and Perspectives]. *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2010, vol. 7, no. 3, pp. 275-285.

9. Savin I.Yu., Lupyay E.A., Bartalev S.A. Operativnyy sputnikovyy monitoring sostoyaniya posevov selskokhozyaystvennykh kultur v Rossii [Efficient Space Monitoring of Crops in Russia]. *Geomatika*, 2011, no. 2, pp. 69-76.

10. Sirotenko O.D., Abashina E.V., Pavlova V.N. Dinamicheskaya model pogoda–urozhay dlya yarovykh zernovykh kultur i ee ispolzovanie pri otsenke agrometeorologicheskikh usloviy formirovaniya urozhayev v aridnoy zone [Dynamic Model Weather – Harvest for Spring Grain Crops and Its Use in Assessing the Agrometeorological Conditions of Crop Formation in the Arid Zone]. *Trudy VNIISKhM*, 1985, no. 10, pp. 43-61.

11. Sirotenko O.D. *Matematicheskoe modelirovanie vodno-teplovogo rezhima i produktivnosti agroekosistem* [Mathematical Modeling of Water-Thermal Regime and Productivity of Agroecosystems]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981. 167 p.

12. Sirotenko O.D., Abashina E.V. Ob ispolzovanii dinamicheskikh modeley dlya otsenki agrometeorologicheskikh usloviy formirovaniya urozhayev [On the Use of Dynamic Models to Assess the Agrometeorological Conditions of Crop Formation]. *Meteorologiya i gidrologiya*, 1982, iss. 8, pp. 112-129.

13. Starostina T.V. *Metody prognoza urozhaynosti zernovykh i zernobobovykh kultur po otdelnym munitsipalnym rayonam, yarovogo yachmenya i ovsy po Omskoy oblasti* [Methods of Forecasting the Yield of Grain and Leguminous Crops in Individual Municipal Districts, Spring Barley and Oats in the Omsk Region]. Novosibirsk, FGBU SibNIGMI Publ., 2013. 89 p.

14. Starostina T.V. Metod rascheta valovogo sbora yarovogo yachmenya v Novosibirskoy oblasti i Altayskom krae [Method of Calculating the Gross Harvest of Spring Barley in the Novosibirsk Region and the Altai Territory]. *Trudy ZapSibNII*, 1985, iss. 71, pp. 62-68.

15. Stepanov A.S. Prognozirovanie urozhaynosti selskokhozyaystvennykh kultur na osnove dannykh distantsionnogo zondirovaniya Zemli (na primere soi) [Forecasting of Crop Yields Based on Earth Remote Sensing Data (Using Soybeans as an Example)]. *Vychislitelnye tekhnologii*, 2019, vol. 24, no. 6, pp. 125-133.

16. Baret F., Buis S. Estimating Canopy Characteristics from Remote Sensing Observations:

Review of Methods and Associated Problems. *Estimating Canopy Characteristics from Remote Sensing Observations: Review of Methods and Associated Problems*, 2008, pp. 173-201.

17. Huete A., Miura T., Yoshioka H., Ratana P., Broich M. Indices of Vegetation Activity. *Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing*. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, pp. 1-41.

18. Kasampalis D.A., Alexandridis T.K., Deva C., Challinor A. Contribution of Remote Sensing on Crop Models: A Review. *J. Imaging*, 2018, vol. 4, no. 4, article ID: 52. DOI: <https://doi.org/10.3390/jimaging4040052>

19. Liu J., Pattey E., Miller J.R., McNairn H., Smith A., Hu B. Estimating Crop Stresses, Aboveground Dry Biomass and Yield of Corn Using Multi-Temporal Optical Data Combined with a Radiation Use Efficiency Model. *Remote Sens. Environ.*, 2010, vol. 114, no. 6, pp. 1167-1177.

20. Jin X., Kumar L., Li Z., Xu X. Estimation of Winter Wheat Biomass and Yield by Combining the AquaCrop Model and Field Hyperspectral Data. *Remote Sens*, 2016, vol. 8, no. 12, article ID: 972. DOI: <https://doi.org/10.3390/rs8120972>

21. Ganguly S., Nemani R.R., Baret F., Bi J. Green Leaf Area and Fraction of Photosynthetically Active Radiation Absorbed by Vegetation. *Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing*. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, pp. 43-61.

22. Monteith J.L. Solar Radiation and Productivity in Tropical Ecosystems. *J. Appl. Ecol.*, 1972, vol. 9, no. 3, pp. 747-766.

23. Myneni R.B., Williams D.L. On the Relationship Between FAPAR and NDVI. *Remote Sens. Environ.*, 1994, vol. 49, no. 3, pp. 200-211.

24. Delcolle R., Maas S.J., Gurif M., Baret F. Remote Sensing and Crop Production Models: Present Trends. *SPRS J. Photogramm*, 1992, vol. 47, no. 2-3, pp. 145-161.

25. Sen Z. *Solar Energy Fundamentals and Modeling Techniques Atmosphere, Environment, Climate Change and Renewable Energy*. London, Springer-Verlag London Limited, 2008. 276 p.

26. Supit I., Van Kappel R.R. A Simple Method to Estimate Global Radiation. *Solar Energy*, 1998, vol. 63, no. 3, pp. 147-160.

27. Rembold F., Atzberger C., Savin I., Rojas O. Using Low Resolution Satellite Imagery for Yield Prediction and Yield Anomaly Detection. *Remote Sens*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 1704-1733.

28. Xiao X., Jin C., Dong J. Gross Primary Production of Terrestrial Vegetation. *Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing*. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, pp. 127-148.

MATHEMATICAL MODELING OF CROP YIELD FORECAST BASED ON FIELD MONITORING AND REMOTE SENSING DATA

Marzhan A. Sadenova

Candidate of Sciences (Chemistry), Leading Researcher,
Priority Branch of the Veritas Center,
D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University
MSadenova@ektu.kz
<https://orcid.org/0000-0002-2870-6668>
Serikbayeva St, 19, 070000 Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

Sergey S. Khrapov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Information Systems and Computing Modeling,
Volgograd State University
khrapov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2660-2491>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Nail A. Beysekenov

Master's Student, Junior Researcher, Priority Branch of the Veritas Center,
D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University
BNail@ektu.kz
<https://orcid.org/0000-0003-4014-2903>
Serikbayeva St, 19, 070000 Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

Abstract. A mathematical model for forecasting crop yields based on field monitoring data and remote sensing of the Earth has been constructed. The model includes the following main values: vegetation indices NDVI, total solar radiation flux at the lower boundary of the atmosphere, efficiency of using photosynthetically active solar radiation, biomass respiration costs. After the parameterization of the mathematical model using observational data, the number of uncertain (calibration) coefficients of the model decreases from 8 to 2. These coefficients are determined by the method of successive approximations when comparing the results of calculations with observational data on the yield of a particular agricultural crop (ACC) in a given field. It is shown that the values of these coefficients strongly depend on the choice of optimal conditions for the growth of ACC. To reduce the yield forecast error, an approach based on the numerical integration of the total energy flux density by methods of the second and fourth orders of accuracy is proposed. When using numerical integration methods of a high order of accuracy, the yield forecast error decreases on average by 20% compared to the widely used model for calculating biomass growth, which has the first order of accuracy.

Key words: mathematical modeling, numerical integration methods, yield forecast models, biomass, NDVI indices, NDWI indices, solar radiation flux, photosynthetically active radiation.