www.volsu.ru

# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.9

УДК 517.53
ББК 22.161.5, 22.162

Дата поступления статьи: 25.04.2023
Дата принятия статьи: 06.07.2023

# РАЗНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ

**Андрей Валерианович Павлов**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-1,
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики — РТУ
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
просп. Вернадского, 78, 117454 г. Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** Доказано, что в относительно общих условиях после введения новой системы координат с центром в точке $(-A, 0)$ уравнения аналитической функции $f(p)$ в двух системах координат возможны только в случае периодичности исходной функции. Аналогичный результат получен для произвольных функций двух переменных. Приведен пример двух обратных функций с точки зрения новой системы координат. Для широкого класса функций доказана теорема о равенстве нулю на действительной оси аналитичной в некоторой открытой области этой оси функции.

**Ключевые слова:** регулярная функция, периодичность аналитической функции, двойное представление функций, разные системы координат, сдвинутые функции.

## Введение

В статье рассматривается обобщенная периодичность аналитических функций, возникающая при рассмотрении уравнений с точки зрения разных систем кординат (теоремы 1–3) [3].

Возможность периодичности, которую мы не предполагали по условию, хорошо иллюстрирует примеры 1, 2 из доказательства теорем 1, 3. Нам понадобятся обозначения: сдвинутая направо на величину А функция $f(p)$ совпадает при всех $p = w$ с функцией

$f_1(w) = f(p-A)$, которая одновременно является уравнением одного и того же многообразия $C_f = \{(p,z):\ z = f(p)\}$ в системе координат с центром в точке $(-A,0)$ и комплексной переменной $w$, $A>0$; аналогично $f_2(r) = f(p+A)$ при всех $p = r$, и уравнение $z = f_2(r)$ является уравнением исходного многообразия $C_f = \{(p,z):\ z = f(p)\}$ в системе координат с центром в точке $(A,0)$ и комплексной переменной $r$, $A>0$.

В первом примере по определению $f_{right}(r) = f_2(r) = f(r+A)$, $A>0$. Очевидно для обратных функций выполнено равенство $f_{right}^{(-1)}(z) + A = f^{(-1)}(z)$ в области аналитичности и однолистности $G$ обеих функций, $A>0$; данный факт следует из $f_{right}^{(-1)}(z) = -b+iy, f^{(-1)}(z) = A-b+iy$, при всех $z$ из области значений $z = f(p)$; данное равенство влечет совпадение производных функций $f_{right}^{(-1)}(z)$, $f^{(-1)}(z)$ в случае аналитичности и однолистности обратных функций. Совпадение выражений производных обратных функций в свою очередь влечет совпадение аналитических выражений производных функций $df_{right}(p)/dp = df(p)/dp$ в произвольной области однозначности данных функций. Совпадение аналитических выражений производных влечет периодичность производных с параметром $A$ в области аналитичности и однолистности прямых и обратных функций $f_{right}, f$. (Мы использовали то, что многообразие производных в исходной системе координат совпадает с многообразием производных $C_f$ в системе координат с переменной $r$ при любом $A$.) Доказанный факт, например, выполнен для функции $z = 1/p$ в области $G = \{p: -\pi/2 < arg\, p < \pi/2 \bigcap Re\, p > \varepsilon > 0\}$ (теорема 3).

Данный пример в теореме 3 приводит к возможности аналитически продолжить любую производную аналитической в некоторой открытой области $G$ функции сдвинутой направо на величину $A>0$ функцией в условиях теоремы 3 (в виде аналитического выражения).

Аналогичный факт вытекает из рассуждения второго примера: уравнение $z = f_2(r)$ в системе координат с переменной $p$ имеет вид $z = f(p-A)$, $r + A = p$ (переменная $r$ — комплексное число в системе координат с центром в $(A,0)$, переменная $p$ — комплексное число в системе координат с центром в $(0,0)$). При каждом $z$ и комплексном числе $R = p$ равенство $z = f(R-A)$ также выполнено в системе координат с переменной $r$, так как, отложив вектор $R = p$ от центра координат в точке $(A,0)$, после вычитания $A>0$ мы получим вектор $R - A = w$, значение в котором совпадало с числом $z$ из уравнения $z = f(p-A)$ в системе координат с центром в $(0,0)$. Мы получили, что два одинаковых уравнения $z = f(p-A)$, $z = f(R-A)$, $R = r$, являются уравнением одного исходного многообразия в разных системах координат, сдвинутых одна относительно другой на $A>0$. Данный факт возможен только в случае периодичности исходной функции (теорема 1).

В теореме 2 аналогичный результат получен несколько другим методом. В данной теореме и теореме 1 в достаточно общих условиях доказана периодичность аналитической в открытой окрестности мнимой оси функции [2–6]. В теореме 2 не используются формулировки и доказательства примеров введения и теорем 1, 3. Теорема 1, как и примеры 1, 2 введения, является обоснованием основного утверждения теорем 2, 3 о том, что с точки зрения обратной функции и сопоставления точек плоскости, а не аналитических выражений функций, существует два уравнения одного многообразия $z = f(w)$, $z = f(w-A)$ в некоторой новой системе кординат, $A>0$.

Результаты теорем 1, 2, 3 эквивалентны периодичности исходной функции [3; 6].

Применение результатов статьи к задачам механики и математической физики очевидно вытекает из совпадения аналитических функций с результатом сдвига этих функций с точки зрения новых систем координат $[1; 3; 6; 7]$.

## 1. Периодичность аналитических функций

В теореме 1 приводится доказательство периодичности произвольной аналитической функции в относительно общих условиях $[2; 3]$. Утверждение теоремы 1 становится естественным с точки зрения примеров введения, использующих только обыкновенные факты комплексного анализа.

Отметим, что два разных уравнения одного многообразия влечет периодичность с периодом $A$ в случае аналитических функций $f(p)$ $[1; 3; 6]$, которую мы не предполагали.

**Теорема 1.** *С точки зрения разных систем координат с центрами в точках* $(0,0)$ *и* $(A,0)$ *одно и то же многообразие имеет одинаковое аналитическое уравнение* $z = f(P - A)$, $A > 0$, *при всех* $P = p$ *и* $P = r$, *для произвольной аналитической в открытой односвязной области* $G$ *функции* $z = f(p)$, $(0,0) \in G$, $(A,0) \in G$ *(пример 2 введения).*

***Доказательство.*** Теорема 1 является непосредственным следствием второго примера введения. (См. также пример 1 для производных аналитических функций.)

В доказательстве теоремы 2 используются несколько другие по сравнению с примерами 1, 2 введения методы.

**Теорема 2.** *С точки зрения введения новых систем координат относительно переменных* $w_1$, $w$ *и* $p$ *с центрами, соответственно, в точках* $(-2A,0)$, $(-A,0)$ *и* $(0,0)$ *аналитическая в открытой односвязной области* $G$, *содержащей эти три точки, функция* $f(p)$ *становится периодичной с периодом* $A > 0$.

***Доказательство.*** Как и во введении, рассматривается уравнение $z = f_1(w) = f(w-A)$ многообразия $C_f$ во второй системе координат с центром в точке $(-A,0)$.

Заметим, что уравнение $z = f_1(p) = f(p-A)$ совпадает с уравнением многообразия $C_f$ во второй системе кординат с переобозначенной переменной $p$ вместо $w$. Перепишем равенство $z = f(p)$ в форме $z = f((p+A)-A) = f(w-A)$. С точки зрения отмеченного факта это — уравнение перемещенного (сдвинутого) во второй центр $(-A,0)$ исходного многообразия $C_f$ в третьей системе координат с центром в точке $(-2A,0)$ (для всего рисунка двух систем координат, сдвинутого налево на величину $A > 0$). Здесь мы находим $w_1 = w$ по $z$ как результат обратного отображения $z = g(w_1) = f_1(w_1)$ для такого «сдвинутого» многообразия для переменной $w_1$ в третьей системе координат с центром в $(-2A,0)$, $g(w) = f(w-A)$. Существование двух обратных отображений одновременно возможно только при периодичности с периодом $A$ аналитического выражения функции $z = f(p)$.

Теорема 2 доказана.

В теореме 3 с помощью примеров введения и теорем 1, 2 доказана возможность аналитически продолжить аналитическую функцию $f(p)$ через границу ее аналитичности в условиях теормы 1.

В теореме 3 мы предполагаем, что функция $z = f(p)$ определена и аналитична в открытой области $G$, включающей в себя квадрат $K = \{p : 0 < Re\,p < 2A \bigcap -A < < Im\,p < A\}$ при некотором $A > 0$.

**Теорема 3.** *Функция $z = f(p)$, аналитичная в открытой области $G$, включающей в себя квадрат $K$, может быть аналитически продолжена через границу квадрата $Re\,p = 2A$ функцией $z = f(p - 2A)$, если обратная к ней функция $p = f^{(-1)}(z)$ является однозначной аналитической функцией $z$ в некоторой односвязной открытой области $ImG$, совпадающей с образом области $G$ при отображении $z = f(p)$, $df(p)/dp \neq 0$, $p \in G$.*

***Доказательство.*** Теорема является непосредственным следствием примера 1 введения (можно также воспользоваться периодичностью исходной функции, доказанной в примере 2 введения и в теоремах 1, 2).

Заметим, что формально из результатов данной работы следуют все результаты статей [5–7].

## Заключение

Из равенства $z = f_2(r) = f(p + A)$, $p = r$, получаем, что, как следствие примеров 1, 2, одно уравнение $z = f(p + A)$ является уравнением исходного многообразия $C_f$ как в исходной, так и сдвинутой налево второй системе координат, так как значения $z$ из равенств $z = f_2(r) = f(r + A)$ и $z = f(p + A)$ одни и те же при всех $p = r$ из области аналитичности функции $f_2$.

На первый взгляд второе уравнение $z = f(p + A)$ является уравнением сдвинутого многообразия $z = f_2(r)$, но с точки зрения другого рассуждения обратная функция к $z = f(p + A)$ совпадает с уравнением обратной функции к исходному многообразию $C_f$ (а не к сдвинутому), а именно, если существует единственное число $z$ из множества значений $f_2(r)$, то уравнение $z = f(p + A)$, верное при всех $p$, определяет единственную точку на плоскости комплексных аргументов, совпадающую с основанием высоты, опущенной из каждого $z$, по определению вообще говоря любого уравнения с тремя переменными; с этой точки зрения $z = f(p+A)$ тоже уравнение исходного многообразия, а не сдвинутого (мы получаем несколько оснований высот в сдвинутых одна относительно другой точках $P, W$).

Применимость данных результатов к физическим задачам математической физики требует дальнейшего рассмотрения с точки зрения сравнения полей сдвигов с физически осуществимыми математическими моделями электромагнитных полей.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
2. Павлов, А. В. Отражение регулярных функций / А. В. Павлов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2021. — Т. 24, № 4. — С. 79–82. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.6
3. Павлов, А. В. Отраженные функции и периодичность / А. В. Павлов // International Journal of Open Information Technologies. — 2022. — № 6. — С. 33–39.
4. Чубариков, В. Н. Об асимптотических формулах для интеграла И.М. Виноградова / В. Н. Чубариков // Тр. Матем. Ин-та АН СССР. — 1981. — Т. 157. — С. 214–232.
5. Pavlov, A. V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier / A. V. Pavlov // Issues of Analysis. — 2016. — Vol. 23, № 1. — P. 21–30.

6. Pavlov, A. V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms / A. V. Pavlov // Journal Moscow University Mathematics Bulletin. — 2019. — Vol. 74, № 2. — P. 75–78.

7. Pavlov, A. V. The Regularity of the Transform of Laplace and the Transform of Fourier / A. V. Pavlov // Chebyshevskii sbornik. — 2020. — Vol. 21, № 4. — P. 162–170.

## *REFERENCES*

1. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [The Methods of Theory Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 688 p.

2. Pavlov A.V. Otrazhenie regulyarnykh funktsiy [Reflection of Regular Functions]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2021, vol. 24, no. 4, pp. 79-82. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.4.6

3. Pavlov A.V. Otrazhennye funktsii i periodichnost [Reflected Functions and Periodicity]. *International Journal of Open Information Technologies*, 2022, no. 6, pp. 33-39.

4. Chubarikov V.N. Ob asimptoticheskikh formulakh dlya integrala I.M. Vinogradova [On Asymptotic Formulas for the I.M. Vinogradov Integral]. *Tr. Matem. In-ta AN SSSR*, 1981, vol. 157, pp. 214-232.

5. Pavlov A.V. About the Equality of the Transform of Laplace to the Transform of Fourier. *Issues of Analysis*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 21-30.

6. Pavlov A.V. Permutability of Cosine and Sine Fourier Transforms. *Journal Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 2, pp. 75-78.

7. Pavlov A.V. The Regularity of the Transform of Laplace and the Transform of Fourier. *Chebyshevskii sbornik*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 162-170.

# DIFFERENT COORDINATE SYSTEMS AND PERIODICITY

**Andrey V. Pavlov**

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics-1,
Moscow Institute of Radiotechnics, Electronics and Automatics — RTU
avpavlovmgu@my-post.ru
https://orcid.org/0000-0002-1082-2222
Prosp. Vernadskogo, 78, 117454 Moscow, Russian Federation

**Abstract.** In the article we consider a two new systems of coordinate for the p,w complex variables. The centers of coordinates of the systems are located in the $(0,0)$, $(-A,0)$ points, $A > 0$. With point of view of the centers we obtain some new equations of the $(p, f(p))$ set of points for the $f(p)$ function. The consideration of the equations results in periodicity of the f(p) function, if the $f(p)$ function is regular in some open G set of points. Similar theorems are proved for the irregular functions. The example of two reverse functions for a new system of coordinates is resulted. The theorem is proved about the $f(p) = 0$ equality for wide class of regular functions, if $\operatorname{Im} p = 0$.

**Key words:** regular function, periodicity of analitic function, double representation of functions, different coordinate systems, moved functions.