DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

УДК 517.95
ББК 22.161.1

Дата поступления статьи: 07.08.2023
Дата принятия статьи: 04.10.2023

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Кристина Алексеевна Зубанкова

Аспирант кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
bliznjukka@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Елена Алексеевна Мазепа

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
elena.mazepa@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-7603-4133
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Наталья Михайловна Полубоярова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук
и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
natasha_medvedeva@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-3973-7574
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе исследуется проблема асимптотического поведения решений уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии M без границы. Вводится понятие φ-эквивалентности в классе непрерывных функций на некомпактном римановом многообразии и устанавливается взаимосвязь между существованием решений уравнения Шредингера на многообразии M и вне некоторого компактного подмножества $B \subset M$ в заданном классе φ-эквивалентных функций. В частности, доказывается, что если существует решение рассматриваемого уравнения с заданным асимптотическим поведением на $B \subset M$, то и на всем многообразии M существует решение этого уравнения с таким же асимптотическим поведением.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, некомпактное риманово многообразие, асимптотическое поведение, классы эквивалентных функций, краевые задачи.

Введение

В исследованиях последних десятилетий нередко отмечалась сильная связь между классическими проблемами теории функций и теорией решений эллиптических уравнений в частных производных второго порядка, например, уравнения Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шредингера. Данная проблематика нашла свое развитие в работах таких российских и зарубежных математиков, как М. Андерсон, А.А. Григорьян, А.Г. Лосев, В.М. Миклюков, М. Мурата, Н.С. Надирашвили, Д. Сулливан и ряда других авторов.

В современной математике изучение эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях охватывает достаточно весомую часть исследований, истоки которых восходят к классификационной теории некомпактных римановых поверхностей и многообразий, основанных на изучении некоторых функциональных классов на данных геометрических объектах. Достаточно полное представление об истории развития и современном состоянии данной научной области можно получить, например, из работы [14]. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии. Так, классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в R^n функция является тождественной постоянной.

С другой стороны, как было показано в 80-х гг. прошлого века, есть достаточно обширный класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные решения эллиптических дифференциальных уравнений. Так, например, М. Андерсон [13] и Д. Сулливан [20] доказали, что на односвязном римановом многообразии с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности, существует бесконечномерное множество нетривиальных ограниченных гармонических функций и разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической на таком многообразии функции по непрерывным граничным данным на «бесконечности». В этой связи стоит заметить, что в данном и ряде других случаев геометрическая компактификация многообразия позволяет осуществить постановку краевых задач, в частности задачи Дирихле, так же, как и в ограниченных областях R^n (см., например, [7–10; 17; 19]).

Однако постановка задачи Дирихле с граничными данными на «бесконечности» на произвольном некомпактном римановом многообразии M может оказаться проблематичной. В работе [11] был предложен подход, основанный на понятии классов эквивалентных функций. Данный подход позволил осуществить постановку краевых задач на многообразии при отсутствующей естественной геометрической компактификации. В дальнейшем этот подход был развит в работах [5; 12; 15; 18].

В исследованиях, посвященных разрешимости краевых задач, наряду с вопросом существования решения, часто параллельно исследуются вопросы: в каком смысле (в какой метрике) понимать близость решения к граничным данным (см.: [4; 6; 17]), с какой скоростью идет сближение. Так же вызывает интерес получение количественных характеристик, оценивающих скорость сближения решения и граничных данных.

Данная работа выполнена в указанном направлении. В частности, исследуются вопросы существования решения краевой задачи с заданной скоростью асимптотического приближения к граничным данным для стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0 \tag{1}$$

на произвольном гладком связном некомпактном римановом многообразии M без края. Здесь $c(x) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ — неотрицательная функция, $\Omega \subset M$ — произвольное предкомпактное подмножество, $0 < \alpha < 1$.

Доказательство основных результатов работы опирается на классические утверждения теории уравнений в частных производных: принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Их справедливость на предкомпактных подмножествах многообразия M доказывается так же, как и для ограниченных областей в R^n (см., например, [2, с. 39–40]).

1. Вспомогательные понятия и утверждения

Опишем сначала подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях из работы [11].

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $B \subset M$ — произвольное компактное подмножество, ∂B — гладкое подмногообразие, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание M, то есть последовательность предкомпактных непустых открытых подмножеств в M таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ и $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Всюду далее предполагаем, что границы ∂B_k являются гладкими подмногообразиями.

Определение 1 (см. также [11]). *Непрерывные функции f_1 и f_2 будем называть эквивалентными на M и обозначать $f_1 \sim f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M мы имеем*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{M\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0.$$

Непрерывную функцию ω будем называть *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная функция $f \geq 0$ такая, что $\omega \sim f$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Замечание 1. Это отношение эквивалентности характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ и обеспечивает асимптотическое приближение функций в равномерной норме. При этом, если изменить значения некоторой непрерывной функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет эквивалентна исходной.

Далее обозначим через v_k решение уравнения (1) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям $v_k|_{\partial B} = 1$, $v_k|_{\partial B_k} = 0$. В [11] показано, что последовательность v_k равномерно ограничена на любом компактном подмножестве в $M \setminus B$, при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и, следовательно, сходится на $M \setminus B$ в классе дважды непрерывно-дифференцируемых функций к функции $v = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$, которая удовлетворяет уравнению (1) и условиям $0 < v \leq 1$, $\;v|_{\partial B} = 1$. Функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и называется *L-потенциалом компакта B* относительно многообразия M (см. также [11]).

Если в уравнении (1) $c(x) \equiv 0$, то предельная функция v есть не что иное, как *емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M*.

Определение 2 (см. также [11]). *Многообразие M будем называть L-строгим многообразием, если для некоторого компакта $B \subset M$ существует L-потенциал v такой, что $v \in [0]$.*

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения из работы [11].

Лемма 1. *Пусть $Lw \leq 0$ на $M \backslash B$, $w|_{\partial B} \geq 0$, w является асимптотически неотрицательной. Тогда $w \geq 0$ на $M \backslash B$.*

Лемма 2. *Пусть $Lw \leq 0$ на M, w является асимптотически неотрицательной. Тогда $w \geq 0$ на M.*

Следствие 1. *Пусть $Lw \leq Lu$ на $M \backslash B$, $w|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $w \sim u$. Тогда $w \geq u$ на $M \backslash B$. Если же $Lw = Lu$ на $M \backslash B$ и $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $w \sim u$, то $w = u$ на $M \backslash B$.*

Следствие 2. *Пусть $Lw \leq Lu$ на M и $w \sim u$. Тогда $w \geq u$ на M. Если же $Lw = Lu$ на M и $w \sim u$, то $w \equiv u$ на M.*

С помощью описанного подхода в [11] была установлена взаимосвязь между разрешимостью краевых задач и разрешимостью внешних краевых задач для стационарного уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии. Этот подход был развит в дальнейшем в ряде работ. В частности, в работах [5; 15] было введено понятие слабой эквивалентности решений однородных эллиптических уравнений и получена некоторая оценка скорости асимптотической сходимости этих решений к граничным данным в терминах слабой эквивалентности. В работах [1; 16] было введено понятие φ-эквивалентности (где $\varphi > 0$ — некоторая непрерывная на M функция, $\varphi \sim 0$ на M) и исследовано асимптотическое поведение решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа — Бельтрами в терминах φ-эквивалентности. Остановимся подробнее на этом понятии.

Заметим также, что из определения эквивалентных функций, условий $\varphi \sim 0$, $\varphi > 0$ и непрерывности φ на M следует, что функция φ будет ограничена на M.

Определение 3 (см. также [1; 16]). *Пусть $B \subset M$ — как и выше, некоторое произвольное компактное подмножество с гладкой границей. Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 φ-эквивалентны на M и обозначать $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, если существует константа $C > 0$ (не зависящая от B) такая, что*

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq C \cdot \varphi(x),$$

для любого $x \in M \backslash B$.

Как и выше, данное отношение является отношением эквивалентности и разбивает множество всех непрерывных на M функций на классы эквивалентности. Обозначим класс φ-эквивалентных f функций через $[f]_{\varphi}$.

Замечание 2. Отношение φ-эквивалентности также как и отношение эквивалентности характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$, и если изменить значения функции f на компакте B, то вновь полученная функция будет φ-эквивалентна исходной. Ясно также, что если $f_1 \overset{\varphi}{\sim} f_2$, то $f_1 \sim f_2$.

В работе [18] показана независимость L-строгости многообразия от выбора компактного подмножества, то есть если $B \subset M$, $B' \subset M$ различные компактные подмножества и v, v' — соответствующие L-потенциалы, то условия $v \sim 0$ и $v' \sim 0$ эквивалентны. Покажем, что аналогичное свойство выполнено и для понятия φ-эквивалентности. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Если $v \in [0]_\varphi$, то $v' \in [0]_\varphi$.*

Доказательство. Будем считать, что $\partial B'$ — гладкое подмногообразие и $B' \subset B_k$ для всех k. По определению функции v' как L-потенциала компакта B' относительно многообразия M имеем $v' = \lim_{k\to\infty} v'_k$, где $Lv'_k = 0$ в $B_k \setminus B'$, $v'_k = 1$ на $\partial B'$ и $v'_k = 0$ на ∂B_k.

Пусть сначала $B \subset B' \subset B_k$ для всех k, где $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольное исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Так как $v > 0$ и $v \sim 0$, то $\inf_{M\setminus B} v = 0$ и для некоторой константы $c > 0$ выполнено $c \cdot v|_{\partial B'} > 1$. Применяя принцип сравнения для любого k, мы имеем $0 \le v'_k < c \cdot v$ на $B_k \setminus B'$ и поэтому $0 < v' \le c \cdot v$. Так как $v \in [0]_\varphi$, то и $v' \in [0]_\varphi$.

Далее положим $B' \subset B \subset B_k$ для всех k. Тогда $v'_k|_{\partial B} \le 1 = v|_{\partial B}$, $v'_k|_{\partial B_k} = 0 < < v|_{\partial B_k}$ и по принципу максимума для всех k имеем $v'_k \le v$ на $B_k \setminus B$ и следовательно $0 < v' \le v$. Поскольку $v \in [0]_\varphi$, то и $v' \in [0]_\varphi$.

Пусть теперь B и B' — произвольные компактные подмножества многообразия M. Тогда рассмотрим произвольное компактное подмножество $B'' \subset M$ ($\partial B''$ — гладкое подмногообразие) такое, что $B \cup B' \subset B'' \subset B_k$. В качестве B'' можно взять, например, $\overline{B_1}$, а в качестве исчерпания многообразия M взять последовательность множеств $\{B_k\}_{k=2}^{\infty}$. Обозначим v'' — L-потенциал компакта B'' относительно многообразия M.

Тогда, как показано выше, $v'' \in [0]_\varphi$, так как $B \subset B''$ и $v \in [0]_\varphi$, следовательно, $v' \in [0]_\varphi$, так как $B' \subset B''$ и $v'' \in [0]_\varphi$. Лемма доказана.

Определение 4 (см. также [1; 16]). *Будем говорить, что для уравнения (1) на M разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]_\varphi$.*

Определение 5 (см. также [1; 16]). *Будем говорить, что для уравнения (1) на $M\setminus B$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M\setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1), непрерывное вплоть до границы ∂B, и такое, что $u \in [f]_\varphi$ и $u|_{\partial B} = = \Phi|_{\partial B}$.*

Таким образом, понятие φ-эквивалентности, с одной стороны, обобщает понятия эквивалентности, а с другой стороны, позволяет более точно оценить скорость асимптотического приближения решения краевой задачи к граничным условиям.

Определение 6 (см. также [1; 16]). *Будем говорить, что функция w является φ-асимптотически неотрицательной, если на M существует непрерывная функция $f \ge 0$ такая, что на $|w - f| \le C \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) \sim 0$.*

Докажем утверждения, аналогичные леммам 1 и 2 и их следствиям в классе φ-эквивалентных функций для уравнения Шредингера (1).

Лемма 4. *Пусть $Lw \leq 0$ на $M \setminus B$, $w|_{\partial B} \geq 0$, w является φ-асимптотически неотрицательной. Тогда $w \geq 0$ на $M \setminus B$.*

Доказательство. Из определения 6 и замечания 2 следует, что функция w будет асимптотически неотрицательной. Тогда по лемме 1 получаем $w \geq 0$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть $Lw \leq Lu$ на $M\backslash B$, $w|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $w \overset{\varphi}{\sim} u$. Тогда $w \geq u$ на $M\backslash B$. Если же $Lw = Lu$ на $M\backslash B$ и $w|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $w \overset{\varphi}{\sim} u$, то $w = u$ на $M\backslash B$.*

Доказательство. Положим $v = w - u$. Следовательно, $Lv = Lw - Lu \leq 0$, $v|_{\partial B} = w|_{\partial B} - u|_{\partial B} \geq 0$. Также $w - u \overset{\varphi}{\sim} 0$, из этого следует $v \overset{\varphi}{\sim} 0$, то есть v является φ-асимптотически неотрицательной. По лемме 4 получаем, что $v = w - u \geq 0$ на $M\backslash B$.

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть одновременно функции $v = w - u$ и $-v = u - w$, затем показать, что $v \geq 0$ и $-v \geq 0$ на $M\backslash B$.

Аналогичным образом получаются следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть $Lw \leq 0$ на M, w является φ-асимптотически неотрицательной. Тогда $w \geq 0$ на M.*

Следствие 4. *Пусть $Lw \leq Lu$ на M и $w \overset{\varphi}{\sim} u$. Тогда $w \geq u$ на M. Если же $Lw = Lu$ на M и $w \overset{\varphi}{\sim} u$, то $w \equiv u$ на M.*

Замечание 3. Следствия 3 и 4 непосредственно влекут за собой выполнение теоремы единственности для решений краевой и внешней краевой задач для уравнения (1) с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$.

Аналогичные утверждения для класса φ-эквивалентных гармонических функций были доказаны в [16], в частности, получен принцип сравнения и теорема единственности для решений краевых и внешних краевых задач для уравнения Лапласа — Бельтрами с граничными данными из класса $[f]_\varphi$.

2. Разрешимость краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в классе φ-эквивалентных функций

Пусть как и выше M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ — произвольное компактное подмножество с гладкой границей, f — непрерывная ограниченная на M функция. Сформулируем и докажем основные результаты работы.

Теорема 1. *Если на $M\backslash B$ для уравнения (1) разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$, то на M для уравнения (1) разрешима и краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$.*

Доказательство. Обозначим через $u_0 \in [f]_\varphi$ решение внешней краевой задачи для уравнения (1) на $M\backslash B$, удовлетворяющее условию $u_0|_{\partial B} = 0$. Так как f ограниченная на M функция, то и u_0 является ограниченным решением на $M\backslash B$.

Рассмотрим последовательность функций φ_i, являющихся решением такой задачи

$$\begin{cases} L\varphi_i = 0 & \text{в} \quad B_i, \\ \varphi_i \,|_{\partial B_i} = u_0|_{\partial B_i}\,. \end{cases}$$

Используем принцип максимума, для всех i имеем

$$|\varphi_i| \le \sup_{B_i} |\varphi_i| = \sup_{\partial B_i} |\varphi_i| = \sup_{\partial B_i} |u_0| \le \sup_{M} |u_0|.$$

Отсюда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{\varphi_i\}_{k=1}^{\infty}$ на M.

Учитывая равномерную ограниченность, также как и в [11], получаем компактность семейства функций $\{\varphi_i\}$ в классе $C^2(G)$ для произвольного компактного подмножества $G \subset M$. В свою очередь, компактность семейства $\{\varphi_i\}_{k=1}^{\infty}$ влечет существование предельной функции $u = \lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i$, которая является решением уравнения (1) на M.

Докажем, что $u(x) \in [f]_\varphi$. Действительно, в силу непрерывности функции $u(x)$ существует

$$U_1 = \min_{\partial B} |u(x)|, \qquad U_2 = \max_{\partial B} |u(x)|.$$

Тогда $U_1 \le u|_{\partial B} \le U_2$ и, следовательно, при достаточно больших i выполнены неравенства

$$U_1 - 1 \le \varphi_i|_{\partial B} \le U_2 + 1. \tag{2}$$

Определим $A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}$ и $A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}$. Учитывая, что $u_0|_{\partial B} = 0$, имеем $A_1 \le u_0|_{\partial B} \le A_2$ и $A_1 \le \varphi_i|_{\partial B} \le A_2$ для больших i.

Согласно условию теоремы на $M\backslash B$ существуют решения $u_1(x) \in [f]_\varphi$ и $u_2(x) \in \in [f]_\varphi$ уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям

$$u_1|_{\partial B} = A_1, \quad u_2|_{\partial B} = A_2. \tag{3}$$

Так как $Lu_2 = Lu_0 = Lu_1$ на $M\backslash B$, $A_1 = u_1|_{\partial B} \le u_0|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B} = A_2$ и $u_2 \overset{\varphi}{\sim} u_0 \overset{\varphi}{\sim} u_1$, то по лемме 4 на $M\backslash B$ получаем, что $u_1 \le u_0 \le u_2$.

Тогда для достаточно больших i с учетом (2) и (3) выполнены соотношения

$$u_1|_{\partial B_i} \le \varphi_i\,|_{\partial B_i} = u_0|_{\partial B_i} \le u_2|_{\partial B_i}, \quad u_1|_{\partial B} \le \varphi_i\,|_{\partial B} \le u_2|_{\partial B}.$$

Далее, применяя принцип сравнения к функциям φ_i, u_1, u_2 в $B_i\backslash B$ для достаточно больших i на множестве $B_i\backslash B$, имеем $u_1 \le \varphi_i \le u_2$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, на $M\backslash B$ получим $u_1 \le u \le u_2$. Учитывая, что $u_1 \overset{\varphi}{\sim} u_0 \overset{\varphi}{\sim} u_2$, приходим к эквивалентности $u \overset{\varphi}{\sim} u_0$ и, следовательно, $u \in [f]_\varphi$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть многообразие M является L-строгим и L-потенциал некоторого компакта $B \subset M$ удовлетворяет условию $v \in [0]_\varphi$. Если на M для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$, то на $M\backslash B$ для уравнения (1) разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$.*

Доказательство. Докажем сначала, что на $M\backslash B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ существует решение ω уравнения (1) такое, что $w|_{\partial B} = \Phi$, $w \in [0]_\varphi$. Рассмотрим последовательность функций w_k, являющихся решением следующих краевых задач:

$$\begin{cases} Lw_k = 0 \quad \text{в} \quad B_k\backslash B, \\ w_k\,|_{\partial B} = \Phi(x), \\ w_k\,|_{\partial B_k} = 0. \end{cases}$$

Учитывая принцип максимума, для любого k имеем

$$|w_k| \leq \sup_{\partial(B_k \setminus B)} |\omega_k| = \sup_{\partial B} |\Phi|,$$

то есть последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $M \setminus B$ и, следовательно, компактна в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на любом компактном подмножестве в $M \setminus B$. Компактность влечет за собой существование предельной функции $w = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$, которая является решением уравнения (1) на $M \backslash B$. Ясно, что $w\,|_{\partial B} = \Phi(x)$.

Далее покажем, что $w \in [0]_\varphi$, то есть для некоторой константы $C > 0$ выполнено $|w(x)| \leq C \cdot \varphi(x)$, для любого $x \in M \setminus B$.

Пусть $U = \max_{\partial B} |\Phi|$. Очевидно, что

$$-(U+1) \leq \Phi \leq U+1, \quad -(U+1) \leq w|_{\partial B} \leq U+1$$

и для любого k

$$-(U+1) \leq w_k|_{\partial B} \leq U+1.$$

В условиях теоремы существует функция v, которая является L-потенциалом компакта B относительно многообразия M и $v \in [0]_\varphi$. Иначе говоря, существует решение уравнения (1) такое, что для некоторой константы $C > 0$ на $M \backslash B$ выполнено

$$0 < v \leq 1, \;\; v|_{\partial B} = 1, \;\; |v(x)| < C \cdot \varphi(x).$$

Рассмотрим на $M \backslash B$ функции $u_1 = -(U+1) \cdot v$ и $u_2 = (U+1) \cdot v$. Функции u_1 и u_2 являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют условиям

$$u_1|_{\partial B} = -(U+1), \quad -(U+1) \leq u_1 \leq 0, \quad u_1 \in [0]_\varphi,$$

$$u_2|_{\partial B} = U+1, \quad 0 \leq u_2 \leq U+1, \quad u_2 \in [0]_\varphi.$$

Тогда на $M \backslash B$ выполнено $u_1 \leq u_2$ и с учетом принципа сравнения для всех k на множестве $B_k \backslash B$

$$u_1 \leq w_k \leq u_2.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $u_1 \leq w \leq u_2$. Учитывая, что $u_1 \overset{\varphi}{\sim} 0$ и $u_2 \overset{\varphi}{\sim} 0$, имеем $\omega \in [0]_\varphi$.

Далее возьмем $u \in [f]_\varphi$ — решение краевой задачи для уравнения (1) на M и рассмотрим непрерывную на ∂B функцию $\Phi^* = u - \Phi$, где Φ — произвольная непрерывная на ∂B функция из определения краевой задачи. Как доказано выше, на $M \setminus B$ существует решение w уравнения (1) такое, что $w|_{\partial B} = \Phi^*$ и $w \in [0]_\varphi$. Тогда функция $u_0 = u - w$ будет искомым решением внешней краевой задачи на $M \setminus B$ с граничными условиями из класса $[f]_\varphi$. Действительно,

$$L(u-w) = 0, \quad (u-w)|_{\partial B} = u|_{\partial B} - (u - \Phi)|_{\partial B} = \Phi.$$

Кроме того, на $M \setminus B$ выполнено неравенство

$$|u_0 - f| = |u - w - f| \leq |u - f| + |w| \leq (C + C^*) \cdot \varphi,$$

где C и C^* — некоторые положительные константы. Следовательно, по определению $u_0 \in [f]_\varphi$. Теорема доказана.

Замечание 4. Результаты теорем 1 и 2 обобщают для стационарного уравнения Шредингера результаты работ [1] и [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Близнюк, К. А. Краевые и внешние краевые задачи для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях / К. А. Близнюк, Е. А. Мазепа // Итоги науки и техники. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзор. — 2022. — Т. 207. — С. 3–9.
2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.
3. Григорьян, А. А. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи / А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили // Изв. вузов. Математика. — 1987. — Т. 31, № 5. — С. 25–33.
4. Гущин, А. К. Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гельдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка / А. К. Гущин // Теоретическая и математическая физика. — 2008. — Т. 157, № 3. — С. 345–363.
5. Корольков, С. А. О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 726–732.
6. Ландис, Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
7. Лосев, А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1643–1652.
8. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 445, № 6. — С. 41–49.
9. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.
10. Лосев, А. Г. Ограниченные решения стационарного уравнения Шредингера с конечным интегралом энергии на модельных многообразиях / А. Г. Лосев, В. В. Филатов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2021. — Т. 24, № 3. — С. 5–17. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.3.1
11. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журнал. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.
12. Мазепа, Е. А. О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 136–147. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.10
13. Anderson, M. T. The Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds with Negative Curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 6. — P. 701–722.
14. Grigor'yan, A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.
15. Korolkov, S. A. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Mathematische Zeitshrift. — 2012. — Vol. 272, № 1-2. — P. 459–472.
16. Losev, A. G. On Solvability of the Boundary Value Problems for Harmonic Function on Noncompact Riemannian Manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa // Probl. Anal. Issues Anal. — 2019. — Vol. 8 (26), № 3. — P. 73–82.
17. Losev, A. Eigenfunctions of the Laplace Operator and Harmonic Functions on Model Riemannian Manifolds / A. Losev, E. Mazepa, I. Romanova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 13, № 1. — P. 2190–2197.
18. Losev, A. Unbounded Solutions of the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds / A. Losev, E. Mazepa, V. Chebanenko // Computational Methods and Function Theory. — 2003. — Vol. 3, № 2. — P. 443–451.

19. Murata, M. Positive Harmonic Functions on Rotationary Symmetric Riemannian Manifolds / M. Murata // Potential Theory (Proc. Intern. Conf. Nagoya/Japan, 1990). — 1992. — P. 251–259.

20. Sullivan, D. The Dirichlet Problem at Infinity for a Negatively Curved Manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 723–732.

REFERENCES

1. Bliznyuk K.A., Mazepa E.A. Kraevye i vneshnie kraevye zadachi dlya uravneniya Puassona na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary and External Boundary Value Problems for the Poisson Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obzor*, 2022, vol. 207, pp. 3-9.

2. Gilbarg D., Trudinger M. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p.

3. Grigoryan A.A., Nadirashvili N.S. Liuvillevy teoremy i vneshnie kraevye zadachi [Liouville Theorems and External Boundary Value Problems]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Math. (Iz. VUZ)], 1987, vol. 31, no. 5, pp. 25-33.

4. Gushchin A.K. Nekotoroe usilenie svoystva vnutrenney nepreryvnosti po Gelderu resheniy zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka [A Strengthening of the Interior Hölder Continuity Property for Solutions of the Dirichlet Problem for a Second-Order Elliptic Equation]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoret. and Math. Phys.], 2008, vol. 157, no. 3, pp. 345-363.

5. Korolkov C.A. O razreshimosti kraevykh zadach dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [On Solvability of Boundary Value Problems for the Stationary Schrödinger Equation in Unbounded Domains of Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differ. Equ.], 2015, vol. 51, no. 6, pp. 726-732.

6. Landis E.M. *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [The Equation of Second Order of Elliptic and Parabolic Type]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p.

7. Losev A.G. O razreshimosti zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona na nekotorykh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On Solvability of the Dirichlet Problem for Poisson Equation on Some Noncompact Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differ. Equ.], 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1643-1652.

8. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On Asymptotic Behavior of Solutions for Some Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, vol. 445, no. 6, pp. 41-49.

9. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded Solutions of the Schrëdinger Equation on Riemannian Products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Math. J.], 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84-110.

10. Losev A.G., Filatov V.V. Ogranichennye resheniya statsionarnogo uravneniya Shredingera s konechnym integralom energii na modelnykh mnogoobraziyakh [Bounded Solutions of the Stationary Schrödinger Equation with Finite Energy Integral on Model Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2021, vol. 24, no. 3, pp. 5-17. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.3.1

11. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Problems for the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Sib. mat. zhurnal* [Siberian Math. J.], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591-599.

12. Mazepa E.A. O razreshimosti kraevykh zadach dlya uravneniya Puassona na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On Solvability of Boundary Value Problems of the Poisson Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i*

kompyuternoe modelirovanie [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 3, pp. 136-147. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.10

13. Anderson M.T. The Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds with Negative Curvature. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 6, pp. 701-722.
14. Grigor'yan A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135-249.
15. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized Harmonic Functions of Riemannian Manifolds with Ends. *Mathematische Zeitshrift*, 2012, vol. 272, no. 1-2, pp. 459-472.
16. Losev A.G., Mazepa E.A. On Solvability of the Boundary Value Problems for Harmonic Function on Noncompact Riemannian Manifolds. *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2019, vol. 8 (26), no. 3, pp. 73-82.
17. Losev A., Mazepa E., Romanova I. Eigenfunctions of the Laplace Operator and Harmonic Functions on Model Riemannian Manifolds. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 13, no. 1, pp. 2190-2197.
18. Losev A., Mazepa E., Chebanenko V. Unbounded Solutions of the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds. *Computational Methods and Function Theory*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 443-451.
19. Murata M. Positive Harmonic Functions on Rotationary Symmetric Riemannian Manifolds. *Potential Theory (Proc. Intern. Conf. Nagoya/Japan, 1990)*, 1992, pp. 251-259.
20. Sullivan D. The Dirichlet Problem at Infinity for a Negatively Curved Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723-732.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION ON NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

Kristina A. Zubankova

Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
bliznjukka@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Elena A. Mazepa

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
elena.mazepa@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-7603-4133
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Natalya M. Poluboyarova

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
natasha_medvedeva@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-3973-7574
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. We study the problem of asymptotic behavior and belonging to given functional class of solutions of the Schrödinger equation on a noncompact

Riemannian manifold M without boundary. In the present work we suggest concept of equivalence in the classes of continuous functions on a non-compact Riemannian manifold with respect to certain norms in this spaces. Also we establish the interrelation between problems of existence of solutions of the Schrödinger equation on M and off some compact in a given class of equivalent functions. We study questions of existence and belonging to given functional class of solutions of the Schrödinger equation

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

where $c(x) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $c(x) \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, on a noncompact Riemannian manifold M without boundary. In the present paper we suggest concept of ϕ-equivalency in the class of continuous functions on a non-compact Riemannian manifold with respect to certain norms in this spaces. Also we establish the interrelation between problems of existence of solutions of the Schrödinger equation on M and off some compact $B \subset M$ with the same growth «at infinity». A new conception of ϕ-equivalence classes of functions on M develops and generalizes the concept of equivalence of function on M and allows us to more accurately estimate the rate of convergence of the solution to boundary conditions. Let M be an arbitrary smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and let $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an exhaustion of M, i.e., a sequence of precompact open subsets of M such that $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ and $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Throughout the sequel, we assume that boundaries ∂B_k are C^1-smooth submanifolds. Also let $B \subset M$ be an arbitrary connected compact subset and the boundary of B is a C^1-smooth submanifold. Assume that the interior of B is non-empty and $B \subset B_k$ for all k. Let $\phi > 0$ be continuous function on M such that

$$\lim_{k\to\infty} ||\phi||_{C(M\setminus B_k)} = 0,$$

where $||\phi||_{C(G)} = \sup_G |\phi(x)|$. Let f_1 and f_2 be arbitrary bounded continuous functions on M.

Definition (see also [1; 16]). Say that f_1 and f_2 are ϕ-*equivalent on* M and write $f_1 \overset{\phi}{\sim} f_2$ if for some constant $C > 0$ and for all $x \in M \setminus B$ we have

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq C \cdot \phi(x).$$

It is easy to verify that the relation " $\overset{\phi}{\sim}$ " is an equivalence and so partitions the set of all bounded continuous functions on M into equivalence classes. Denote the ϕ-equivalence class of a function f by $[f]_\phi$. The concept of ϕ-equivalence establishes not only inclusion into the class but also determines approach rate of function f_1 and f_2. Denote by v_k the solution of the equation (1) in $B_k \setminus B$, satisfying the conditions

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

In [11], it is shown that the sequence v_k is uniformly bounded on $M \setminus B$ and therefore the sequence is compact in the class $C^2(G)$ for every compact subset

$G \subset M \setminus B$. Moreover, as $k \to \infty$ this sequence increases monotonically and converges on $M \setminus B$ to a solution of equation (1):

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \quad 0 < v \leq 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

Note also that the function v does not depend on the choice of exhaustion $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. We call v the *L-potential* of the compact set B relative to M.

Definition (see also [11]). Call the manifold M *L-strict* if for some compact set $B \subset M$ there is an L-potential v of B such that

$$\lim_{k\to\infty} ||v||_{C(M\setminus B_k)} = 0.$$

Definition (see also [1; 16]). We say that on M the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$, if there is a solution of equation (1) $u(x)$ on M such that $u \in [f]_\phi$.

Definition (see also [1; 16]). Let $B \subset M$ be an arbitrary connected compact subset and $\Phi(x) \in C(\partial B)$ be any function continuous on ∂B. We say that on $M \setminus B$ the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$ if for any function $\Phi(x) \in C(\partial B)$ there is a solution of equation (1) $u(x)$ on $M \setminus B$ such that $u \in [f]_\phi$ and $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Theorem 1. *Suppose that on $M\setminus B$ the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$. Then on M the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$ too.*

Theorem 2. *Let the manifold M be L-strict and for some compact $B \subset M$ its L-potential be $v \in [0]_\phi$. Suppose that on M the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$. Then for any continuous function Φ on ∂B on $M \setminus B$ the boundary-value problem for equation (1) is solvable with boundary data from the class $[f]_\phi$ too.*

Remark. The connections between solvability of boundary-value and exterior boundary-value problems for Laplace-Beltrami and Poisson equations in terms of ϕ-equivalent functions is investigated in details for example in [1; 16].

Key words: Schrödinger equation, non-compact Riemannian manifold, asymptotic behavior, classes of equivalent functions, boundary value problems.