www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.1

УДК 517.927.4
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 02.03.2024
Дата принятия статьи: 24.03.2024

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Гусен Эльдерханович Абдурагимов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Дагестанский государственный университет
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
ул. Дзержинского, 12, 367025 г. Махачкала, Российская Федерация

Аннотация. В статье рассматривается двухточечная краевая задача с симметричными граничными условиями в интегральной форме для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. С помощью известной теоремы Го — Красносельского получены достаточные условия существования положительного решения рассматриваемой задачи. Единственность решения устанавливается с привлечением принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, конус, неподвижная точка.

Введение

Краевые задачи для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка довольно часто встречаются в механике твердых материалов и достаточно подробно изучены. Однако результаты, посвященные указанным краевым задачам с интегральными граничными условиями, встречаются редко.

Например, в [5] с помощью теоремы о неподвижной точке в конусе доказано существование хотя бы одного положительного решения задачи

$$\begin{aligned} &u^{(4)}(t) + Au''(t) = \lambda f(t, u, u', u'', u'''), \quad 0 < t < 1, \\ &u(0) = u(1) = \int_0^1 p(s)u(s)ds, \\ &u''(0) = u''(1) = \int_0^1 q(s)u(s)ds, \end{aligned}$$

где f — неотрицательная непрерывная функция; $\lambda > 0, \quad 0 < A < \pi^2; \quad p, q \in L[0, 1]$, $p(s) \geq 0, \quad q(s) \geq 0$.

В [6] сформулированы достаточные условия существования вогнутых и монотонных положительных решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &x^{(4)}(t) = f(t, x, x', x''), \quad 0 < t < 1, \\ &x(0) = x'(1) = x'''(1) = 0, \\ &x''(0) = \int_0^1 g(s)x''(s)ds, \end{aligned}$$

где f и g — неотрицательные и непрерывные функции.

Кроме того, теорема о неподвижной точке в конусе была также использована в [7] для доказательства существования положительных решений сингулярной граничной задачи

$$\begin{aligned} &y^{(4)}(t) = \omega(t)F(t, y, y''), \quad 0 < t < 1, \\ &y(0) = y(1) = \int_0^1 h(s)y(s)ds, \\ &\alpha y''(0) - by'''(0) = \int_0^1 g(s)y''(s)ds, \\ &\alpha y''(1) + by'''(1) = \int_0^1 g(s)y''(s)ds, \end{aligned}$$

где a, $b > 0$; функция $F : [0, 1] \times R \times R \to R$ непрерывна.

Как следует из приведенного выше обзора работ, основным инструментом исследования здесь является теорема Красносельского о неподвижной точке в конусе. Кроме того, для доказательства существования положительных решений краевых задач часто применяют нелинейные альтернативы Лере-Шаудера, теорию индекса неподвижной точки и метод верхних и нижних решений. Наличие тривиального решения предлагаемой в статье краевой задачи, которая моделирует изгибное равновесие упругой балки, существенным образом усложняет процесс доказательства единственности положительного решения для подлинейной правой части f. Для этой цели соответственно были привлечены полученные ранее априорные оценки решения и использован принцип сжатых отображений. При этом заметим, что исследование существования положительных решений опирается на известную теорему Го — Красносельского с охватом в том числе надлинейного характера поведения функции f. Полученные результаты дополняют исследования автора в данном направлении (см., в частности, [1–3]).

1. Предварительные сведения и обозначения

Приведем некоторые определения, предложения и утверждения, необходимые в дальнейшем.

Определение 1 ([4, с. 256]). Замкнутое выпуклое множество K банахова пространства E назовем *конусом*, если из $x \in K$ и $x \neq 0$ следует, что $\alpha x \overline{\in} K$ при $\alpha < 0$.

Теорема 1 ([8]). *Пусть X — банахово пространство и $K \subset E$ — конус в X. Предположим, что Ω_1, Ω_2 являются открытыми подмножествами X с $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ и пусть $A : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$— вполне непрерывный оператор такой, что выполнено одно из двух условий:*

(*i*) $\|Au\| \leq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Au\| \geq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$,

(*ii*) $\|Au\| \geq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ *и* $\|Au\| \leq \|u\|$, $\forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Тогда A имеет неподвижную точку в $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{C}_{[0,1]}$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$,

$$\Omega_1 = \{u \in K : \|u\| < r\}, \quad \partial\Omega_1 = \{u \in K : \|u\| = r\},$$
$$\Omega_2 = \{u \in K : \|u\| < R\}, \quad \partial\Omega_2 = \{u \in K : \|u\| = R\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1,$$

где r и R — некоторые положительные числа, которые определим ниже.

2. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) = f(t, x(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x''(0) = \int_0^1 g(s) x''(s) ds, \tag{2}$$

$$x(1) = 0, \quad x''(1) = \int_0^1 g(s) x''(s) ds, \tag{3}$$

где $g(t)$ — неотрицательная и непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция такая, что

$$\int_0^1 s g(s) ds = 1, \quad 1 < \int_0^1 g(s) ds \leq 2.$$

Функция $f(t,u)$ предполагается неотрицательной и непрерывной на $[0,1] \times [0, \infty)$, причем $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение 2. *Под положительным решением задачи* (1)–(3) *будем подразумевать четырежды непрерывно дифференцируемую на отрезке* $[0,1]$ *функцию* $x(t)$, *положительную в интервале* $(0,1)$, *удовлетворяющую на указанном интервале уравнению* (1) *и граничным условиям* (2), (3).

Приведем без доказательства достаточно простую лемму, в основе которой классическая схема построения функции Грина $H(t,s)$ дифференциального оператора $\dfrac{d^2}{dt^2}$ с соответствующими интегральными граничными условиями.

Лемма 1. *Пусть* $h(t)$ *— неотрицательная и непрерывная на* $[0,1]$ *функция. Краевая задача*

$$u''(t) = h(t), \qquad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = \int_0^1 g(s)u(s)ds,$$
$$u(1) = \int_0^1 g(s)u(s)ds$$

имеет единственное положительное решение

$$u(t) = \int_0^1 H(t,s)h(s)\,ds, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

где

$$H(t,s) = \begin{cases} a(s)(t+\alpha), & 0 \le t \le s, \\ (a(s)+1)t, & s \le t \le 1, \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{1-\int_0^1 g(s)ds}, \quad a(s) = \left(1 - \int_0^1 g(s)ds\right)s.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial t} = \begin{cases} a(s), & 0 \le t \le s, \\ a(s)+1, & s \le t \le 1, \end{cases}$$

откуда вытекает, что $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t} \le 0$ при $t \in [0,s]$ и $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t} \ge 0$ при $t \in [s,1]$. Следовательно, функция $H(t,s)$ выпукла вниз по t и соответственно

$$\min_{0 \le t \le 1} H(t,s) = H(s,s) = a(s)(s+\alpha), \quad s \in [0,1],$$

$$\max_{0 \le t \le 1} H(t,s) = H(0,s) = \alpha a(s), \quad s \in [0,1].$$

Определим оператор $A : \mathbb{C}_{[0,1]} \to \mathbb{C}_{[0,1]}$ формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right]ds, \qquad 0 \le t \le 1,$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\dfrac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t, \\ t(1-s), & t \le s \le 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функция $G(t,s)$ неотрицательна и обладает свойством

$$\varphi(t)\varphi(s) \le G(t,s) \le \varphi(s), \tag{5}$$

где $\varphi(t) = \min(t, 1-t)$.

Заметим, что в силу леммы 1 функция $x(t)$ является решением краевой задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда $x(t)$ неподвижная точка оператора A.

Обозначим через K конус неотрицательных и непрерывных на $[0,1]$ функций, обладающих следующим свойством

$$x(t) \ge \varphi(t)\|x\|.$$

Лемма 2. *Оператор A инвариантен относительно конуса K.*

Доказательство. Для любых $x \in K$ в силу неравенств (5) соответственно имеем

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1}(Ax)(t) \le \int_0^1 \varphi(s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right] ds.$$

С другой стороны,

$$(Ax)(t) \ge \varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right] ds \ge \varphi(t)\|Ax\|.$$

Следовательно, $A(K) \subset K$.

Несложно проверить, что вполне непрерывность оператора A следует из теоремы Арцела-Асколи.

Теорема 2. *Предположим, что*

1) $\lim_{u\to 0^+} \min_{0\le t\le 1} \dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$;

2) $f(t,u) \le b(t)u^{\rho}$, $\quad 0<\rho<1, \quad t\in[0,1], \quad u \ge 0.$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. При выполнении условия 1 теоремы найдется положительное число L такое, что

$$f(t,x) \ge \delta x, \quad t\in[0,1], \quad 0 \le x \le L, \tag{6}$$

где $\delta \ge \dfrac{8}{\int_0^1 a(\tau)(\tau+\alpha)\varphi(\tau)d\tau}$.

В определении множества Ω_1, положив $r = L$ и воспользовавшись (5) и (6), при $x \in \partial\Omega_1$ имеем

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &\ge \varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right] ds \ \ge \\ &\ge \delta\varphi(t)\int_0^1 \varphi(s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)x(\tau)\,d\tau\right] ds \ge \delta\varphi(t)\int_0^1 H(\tau,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\int_0^1\varphi(s)\,ds\cdot\|x\| \ = \\ &= \frac{\delta}{4}\varphi(t)\int_0^1 a(\tau)(\tau+\alpha)\varphi(\tau)\,d\tau\cdot\|x\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Пронормировав теперь обе части неравенства с учетом ограничений на δ, окончательно получим $\|Ax\| \geq \|x\|$ для всех $x \in \partial\Omega_1$.

В силу (5) и условия 2 теоремы при $x \in \partial\Omega_2$ имеем

$$\|Ax\| = \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)\left[\int_0^1 H(s,\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\right]ds \leq \int_0^1 H(0,\tau)b(\tau)x^{\rho}(\tau)d\tau \int_0^1 \varphi(s)ds \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{4}\int_0^1 a(\tau)b(\tau)d\tau \cdot \|x\|^{\rho} = R^{\rho-1}\frac{\alpha}{4}\int_0^1 a(\tau)b(\tau)d\tau \cdot \|x\|. \quad (8)$$

Взяв теперь $R = \left(\dfrac{4}{\alpha\int_0^1 a(\tau)b(\tau)d\tau}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$, при $x \in \partial\Omega_2$ придем к искомому соотношению $\|Ax\| \leq \|x\|$.

Таким образом, при соответствующем выборе r и R в силу теоремы 1 вполне непрерывный оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в Ω, что равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1)–(3).

Лемма 3. *При выполнении условий теоремы 2 оператор A отображает замкнутое множество Ω в себя.*

Доказательство. Для $x \in K$, $\|x\| \leq R$, где

$$R = \left(\frac{4}{\alpha\int_0^1 a(\tau)b(\tau)d\tau}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

на основании (8) имеем

$$\|Ax\| \leq R.$$

С другой стороны, взяв в качестве r число, границы которого определены в процессе доказательства теоремы 2, для $x \in K$, $\|x\| \geq r$ из неравенства (7) получим

$$\|Ax\| \geq r.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Кроме того, предположим, что функция $f(t,u)$ дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно убывает по u и*

$$\int_0^1 \varphi(s)|f'_u(s,r)|ds < 1. \quad (9)$$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Для любых x_1, $x_2 \in \Omega$ ввиду монотонности функции $f'_u(t,u)$ по u и в силу формулы конечных приращений Лагранжа и неравенства Гельдера имеем

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \int_0^1 G(t,s)|f'_u(s,\tilde{x}(s))||y(s)|\,ds \leq \int_0^1 \varphi(s)|f'_u(s,r)|\,ds \cdot \|y\|,$$

где через $y(t)$ обозначена разность $x_1(t) - x_2(t)$, функция $\tilde{x}(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Из принципа сжатых отображений с учетом леммы 2 и условия (9) теоремы следует, что краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Приведем пример, иллюстрирующий применение вышеприведенных теорем.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$x^{(4)}(t) = e^t\sqrt{x(t)}, \qquad 0 < t < 1, \tag{10}$$

$$x(0) = 0, \quad x''(0) = \int_0^1 s\left(s + \frac{4}{3}\right) x''(s)ds, \tag{11}$$

$$x(1) = 0, \quad x''(1) = \int_0^1 s\left(s + \frac{4}{3}\right) x''(s)ds. \tag{12}$$

Здесь $g(t) = t + \frac{4}{3}$ и $f(t,u) = e^t u^{\frac{1}{2}}$. Легко видеть выполнение условий теоремы 2, гарантирующих наличие хотя бы одного положительного решения задачи (10)–(12).

Докажем теперь единственность положительного решения исследуемой задачи. Путем несложных вычислений устанавливаем, что $\alpha = -\frac{6}{5}$ и $a(s) = -\frac{5}{6}s$. Заметим, что неравенство (6) в данном случае можно записать так

$$x^{\frac{1}{2}} \geq \delta x, \quad t \in [0,1], \quad 0 \leq x \leq L, \tag{13}$$

где $\delta \geq \frac{37}{576}$. Нетрудно убедиться, что неравенство (13) выполняется при $L = \frac{1}{\delta^2}$. Выберем теперь $r = L \approx 242$. С другой стороны, взяв в условии 2 теоремы 2, например, $b(t) = e^{10t}$, несложно проверить, что $R = \left(\frac{9e^{10}+1}{400}\right)^2 \gg r$.

В рассматриваемой задаче, очевидно, производная $f'_u(t,u) = \frac{e^t}{2\sqrt{u}}$ монотонно убывает по u. Тогда неравенство (9) соответственно примет вид

$$\frac{1}{2\sqrt{r}} \int_0^1 e^s \varphi(s)ds < 1.$$

Справедливость этого неравенства очевидна. Следовательно, в силу теоремы 3 краевая задача (10)–(12) имеет единственное положительное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Математические заметки СВФУ. — 2022. — Т. 29, № 4. — С. 3–10.

2. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 4n-го порядка / Г. Э. Абдурагимов // Изв. вузов. Математика. — 2023. — Т. 9. — С. 20–26.

3. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 3. — С. 5–14. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.1

4. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

5. Guo, Y. Positive Solutions for Nonlocal Fourth-Order Boundary Value Problems with All Order Derivatives / Y. Guo, F. Yang, Y. Liang // Bound. Value Probl. — 2012. — Vol. 29. — P. 1–12.

6. Lv, X. Monotone Positive Solution of a Fourth-Order BVP with Integral Boundary Conditions / X. Lv, L. Wang, M. Pei // Bound. Value Probl. — 2015. — Vol. 2015, iss. 172. — P. 1–12.

7. Zhang, X. Positive Solutions of Singular Beam Equations with the Bending Term / X. Zhang, M. Feng // Bound. Value Probl. — 2015. — Vol. 2015, iss. 84. — P. 1–12.

8. Zhou, W.-X. Existence of Multiple Positive Solutions for Singular Boundary Value Problems of Nonlinear Ffractional Differential Equations / W.-X. Zhou // Adv. Differ. Equ. — 2014. — Vol. 97. — P. 1–16.

REFERENCES

1. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitelnogo resheniya kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo obyknovennogo differentsialnogo uravneniya chetvertogo poryadka [On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation]. *Matematicheskie zametki SVFU*, 2022, vol. 29, no. 4, pp. 3-10.

2. Abduragimov G.E. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitelnogo resheniya kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo obyknovennogo differentsialnogo uravneniya 4n-go poryadka [On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Ordinary Differential Equation of $4n^{th}$ Order]. *Izv. vuzov. Matematika*, 2023, vol. 9, pp. 20-26.

3. Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitelnogo resheniya kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo obyknovennogo differentsialnogo uravneniya chetvertogo poryadka [On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for One Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2023, vol. 26, no. 3, pp. 5-14. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.3.1

4. Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* [Geometric Methods of Nonlinear Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 512 p.

5. Guo Y., Yang F., Liang Y. Positive Solutions for Nonlocal Fourth-Order Boundary Value Problems with All Order Derivatives. *Bound. Value Probl.*, 2012, vol. 29, pp. 1-12.

6. Lv X., Wang L., Pei M. Monotone Positive Solution of a Fourth-Order BVP with Integral Boundary Conditions. *Bound. Value Probl.*, 2015, vol. 2015, iss. 172, pp. 1-12.

7. Zhang X., Feng M. Positive Solutions of Singular Beam Equations with the Bending Term. *Bound. Value Probl.*, 2015, vol. 2015, iss. 84, pp. 1-12.

8. Zhou W.-X. Existence of Multiple Positive Solutions for Singular Boundary Value Problems of Nonlinear Ffractional Differential Equations. *Adv. Differ. Equ.*, 2014, vol. 97, pp. 1-16.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SYMMETRIC BOUNDARY CONDITIONS FOR ONE NONLINEAR FOURTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Gusen E. Abduragimov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Dagestan State University
gusen_e@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-7095-932X
Dzerzhinskogo St, 12, 367025 Makhachkala, Russian Federation

Abstract. The article deals with the boundary value problem

$$\begin{aligned} &x^{(4)}(t) = f(t, x(t)), \qquad 0 < t < 1, \\ &x(0) = 0, \quad x''(0) = \int_0^1 g(s)x''(s)ds, \\ &x(1) = 0, \quad x''(1) = \int_0^1 g(s)x''(s)ds, \end{aligned}$$

where $g(t)$ is a non-negative and continuous function on the interval $[0, 1]$ such that

$$\int_0^1 sg(s)ds = 1, \quad 1 < \int_0^1 g(s)ds \le 2.$$

The function $f(t, u)$ is assumed to be non-negative and continuous on $[0, 1] \times \times [0, \infty)$, and $f(\cdot, 0) \equiv 0$. Using the Green's function, this problem is reduced to an equivalent integral equation and, based on some properties of the Green's function, a cone with respect to which the corresponding integral operator is invariant is selected in a special way. Further, under power-law restrictions on the function f, using the well-known Go-Krasnoselsky theorem, the presence of at least one fixed point of the specified operator is established. The last circumstance is equivalent to the existence of at least one positive solution to the boundary value problem under consideration. Sufficient conditions for the uniqueness of a positive solution were obtained only in the sublinear case. For this purpose, the principle of compressed mappings was used. The paper concludes with an example illustrating the results obtained.

Key words: boundary value problem, positive solution, Green's function, cone, fixed point.