www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.1

УДК 517.548+517.956
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 17.01.2023
Дата принятия статьи: 01.02.2024

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С ЗАДАННОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1614-0393
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В [4, с. 108, теорема 3] нами был установлен один результат о допустимой скорости стремления к нулю решений уравнения вида $\Delta u + c(x)u = 0$ на концах римановых многообразий с метриками специального вида. Нами определено, что в двумерном случае этот результат может быть полезен при решении задач несколько иного типа. А именно, нами предложена специальная версия теоремы единственности для уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$.

Ключевые слова: теоремы единственности, уравнение Бельтрами, комплексная дилатация, асимптотическое поведение, μ-гиперболическая область, кольцевидная область.

1. Предварительные факты

Основная цель данной работы посвящена установлению одной специальной теоремы единственности для уравнения Бельтрами (см. раздел 3), которое тесно связано с двумерными квазиконформными отображениями и теорией обобщенных аналитических функций [2]. Однако особенностью основного результата нашей работы является то, что получен он был на основе (двумерного) частного случая результата работы [4], касающегося асимптотического поведения решений эллиптического уравнения вида

$$\Delta u + c(x)u = 0, \tag{1}$$

заданного на некомпактном римановом многообразии $\mathcal{M}$, имеющем конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ специального вида. Эллиптические уравнения на некомпактных римановых многообразиях вызывали и вызывают интерес многих исследователей (см., например, [3; 5; 7–12; 17] и библиографию в них).

Приведем необходимый нам вышеупомянутый результат работы [4] в удобной для нас формулировке.

Пусть $\mathcal{M}$ — некомпактное многообразие класса C^∞, снабженное римановой метрикой g класса C^∞; $\dim \mathcal{M} = N \geq 2$. Допускается, что $\partial \mathcal{M} \neq \emptyset$ и $\mathcal{M}$ не предполагается полным. Обозначим Δ — оператор Лапласа — Бельтрами в метрике g.

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ — некоторое множество. Следуя [17, с. 212] (см. также [5]), будем называть $\mathcal{X}$ *концом* многообразия, если выполнены следующие условия:

1) замыкание $[\mathcal{X}]$ в топологии $\mathcal{M}$ не является компактным;
2) $\partial\mathcal{X}$ — компакт.

Пусть $F(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция и A произвольное вещественное число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$. В дальнейшем будем говорить, что $F(x)$ *стремится к A на конце $\mathcal{X}$* или имеет предел A, если для любой последовательности точек $x_n \in \mathcal{X}$, не имеющей точек накопления в $\mathcal{M}$, выполнено $F(x_n) \to A$ при $n \to \infty$. Записываем этот факт следующим образом: $\lim\limits_{\mathcal{X}} F(x) = A$.

Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$ конец многообразия $\mathcal{M}$ (см. [5]). Будем предполагать, что замыкание $[\mathcal{X}]$ изометрично многообразию с краем $R_+ \times S$, где $R_+ = [\rho_0, +\infty)$, S — компактное риманово многообразие без края ($\dim S = N - 1$), на котором задана метрика

$$dl^2 = h^2(\rho)d\rho^2 + q^2(\rho)d\theta^2. \tag{2}$$

Здесь $h(\rho), q(\rho)$ — положительные гладкие функции, заданные на R_+, а

$$d\theta^2 = \sum_{i,j=1}^{N-1} \omega_{ij}(\theta)d\theta_i d\theta_j \ -$$

риманова метрика класса C^∞, заданная на S. Здесь $\theta \in S$, а θ_i — обозначают локальные координаты на S. Через Δ_θ будем обозначать оператор Лапласа — Бельтрами в метрике $d\theta^2$.

Пусть на $\mathcal{M}$ определено дифференциальное уравнение (1). Решения уравнения (1) понимаются в классическом смысле, то есть это функции $u = f(x) \in C^\infty(\mathcal{M})$, дающие при подстановке в это уравнение верное равенство.

В случае $c(x) \leq 0$ на $\mathcal{M}$ уравнение (1) называется стационарным уравнением Шредингера, а в случае $c(x) \geq 0$ — уравнением Гельмгольца.

Предположим, что на конце $\mathcal{X}$ в координатах ρ, θ функция $c(x)$ имеет вид $c(x) = c(\rho)$. Тогда в этих координатах уравнение (1) выглядит следующим образом (см. [10]):

$$\frac{1}{h^2(\rho)}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{h^2(\rho)}\Big[(N-1)\frac{q'}{q} - \frac{h'}{h}\Big]\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{q^2(\rho)}\Delta_\theta u + c(\rho)u = 0. \tag{3}$$

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть задан конец $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}$, на котором метрика имеет вид* (2). *Предположим, что для некоторого $\alpha < 2$ выполнено*

$$\int_{\rho_0}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds < \infty, \tag{4}$$

$$\sup_{\rho \in [\rho_0, +\infty)} \Big(q^{2(N-2)}(\rho) + |c(\rho)| q^{2(N-1)}(\rho)\Big) \Big(\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds \Big)^{\alpha} < +\infty. \tag{5}$$

Тогда, если для некоторых решений $f_1(\rho, \theta)$, $f_2(\rho, \theta)$ уравнения (1)*, заданных на $\mathcal{M}$, на конце $\mathcal{X}$ имеет место асимптотика*

$$\int\limits_{S} |f_2(\rho, \theta) - f_1(\rho, \theta)| d\sigma = \mathrm{o}\Big(\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds \Big) \quad \textit{при} \quad \rho \to +\infty, \tag{6}$$

то $f_1(\rho, \theta) \equiv f_2(\rho, \theta)$ на $\mathcal{M}$.

2. Случай аналитических функций

Всюду далее будем использовать следующие обозначения для комплексных переменных и их вещественной и мнимой частей: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, считая, при этом, что каждая из этих комплексных переменных пробегает область, расположенную в отдельном экземпляре комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Далее используем следующие стандартные обозначения:

1) B_r $(r > 0)$ — единичный круг в комплексной плоскости с центром в нуле $0 \in \mathbb{C}$;
2) S_t — окружность в комплексной плоскости радиуса $t > 0$ с центром в нуле $0 \in \mathbb{C}$;
3) K_{t_1,t_2} — круговое кольцо в комплексной плоскости, ограниченное (концентрическими) окружностями S_{t_1}, S_{t_2}, причем такими, что $0 < t_1 < t_2$.

Здесь подразумевается, что B_r, K_{t_1,t_2} открытые множества, то есть области.

Доказательству основного результата (теорема 2) предпошлем следующее утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что в кольце $K_{R,1}$ $(0 < R < 1)$ задана голоморфная функция $w(z)$. Если*

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{1}{1-r} \int\limits_{S_r} |\mathrm{Re}\, w(z)| |dz| = 0, \quad z = r e^{i\varphi}, \tag{7}$$

тогда $w(z) = ia$, где $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В круге $B_1 = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 < 1\}$ с евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$ введем «обобщенные» полярные координаты (ρ, θ) $(\rho \geq 0,\ \theta \in [0, \pi))$, связанные с координатами x, y формулами $x = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \cos\theta$, $y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho \sin\theta$, а со стандартными полярными координатами (r, φ) формулами $r = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \rho$, $\varphi = \theta$. В этих координатах евклидова метрика приобретает вид

$$ds^2 = \frac{4}{\pi^2 (1 + \rho^2)^2} \Big[d\rho^2 + (1 + \rho^2)^2 (\operatorname{arctg} \rho)^2 d\theta^2 \Big]. \tag{8}$$

Тем самым круг B_1 можно рассматривать как случай двумерного риманова многообразия (M,g), описанного в разделе 1, а кольцо $K_{R,1}$ как конец на этом многообразии. В координатах (ρ,θ) ему соответствует область $\rho > \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}R)$. На этом конце метрика (8) имеет вид (2), причем

$$h(\rho) = \frac{2}{\pi(1+\rho^2)}, \quad q(\rho) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\rho = r. \tag{9}$$

Одномерным многообразием S выступает единичная окружность, которую мы отождествляем с промежутком $[0,\pi)$. Пусть $N=2$, $0 \le \alpha < 2$ задано произвольно, $c(\rho) \equiv 0$. Прямой проверкой нетрудно убедиться в выполнении условий (4), (5).

Пусть $u(z) = u(\rho,\theta) = \operatorname{Re} w(z)$. Эта функция является гармонической в евклидовой метрике. Пусть в теореме 1 $f_2(\rho,\theta) = u(\rho,\theta)$, $f_1(\rho,\theta) \equiv 0$. Тогда интеграл из левой части условия (6) равен

$$\int\limits_S |u(\rho,\theta)|d\theta = \frac{1}{r}\int\limits_S |u(r,\varphi)|rd\varphi = \frac{1}{r}\int\limits_{S_r} |u(z)||dz|, \quad r = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\rho. \tag{10}$$

Интеграл из правой части (6), с учетом $N=2$ и (9), равен

$$\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)}ds = \int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)\operatorname{arctg}s} = \ln\frac{\pi}{2\operatorname{arctg}\rho} = \ln\frac{1}{r}. \tag{11}$$

Из (10), (11) имеем

$$\left(\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)}ds\right)^{-1} \int\limits_S |u(\rho,\theta)|d\theta = \frac{1}{r\ln\frac{1}{r}}\int\limits_{S_r}|u(z)||dz| = \frac{1-r}{r\ln\frac{1}{r}}\frac{1}{1-r}\int\limits_{S_r}|u(z)||dz|. \tag{12}$$

Учитывая, что r и ρ связаны соотношением $r = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\rho$, видим что $r \to 1-0 \Leftrightarrow \rho \to \infty$. Так как $\frac{1-r}{r\ln\frac{1}{r}} \to 1$ при $r \to 1-0$, то из (12) и условия леммы (7) вытекает, что

$$\left(\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{h(s)}{q(s)}ds\right)^{-1} \int\limits_S |u(\rho,\theta)|d\theta \to 0$$

при $\rho \to \infty$. По теореме 1 заключаем, что $u(x) \equiv 0$ в $K_{R,1}$. Но тогда в силу аналитичности функции $w(z) = u(z) + iv(z)$ заключаем, что $v(z)$ — вещественная постоянная. Пусть $v(z) = a$, тогда $w(z) = ia$. Лемма доказана.

3. Основной результат

Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ задано дифференциальное уравнение Бельтрами

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z), \tag{13}$$

где $\mu(z)$ — измеримая комплекснозначная функция, причем $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в D.

Коэффициент $\mu(z) = f_{\overline{z}}(z)/f_z(z)$, напомним [1, с. 7], называется *комплексной дилатацией* отображения $f(z)$, а условие (14) эквивалентно его локальной квазиконформности. В последние десятилетия уравнению Бельтрами было посвящено довольно много работ (см., например, [23; 24] и библиографию там). Это обусловлено тем, что уравнение Бельтрами (13) является одним из средств описания квазиконформных отображений и, кроме того, оно играет ключевую роль в задаче построения изотермических координат на двумерной поверхности (см. [2]).

Известно (см. [2, гл. 2]), что при условии

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ во всякой подобласти } D' \Subset D, \tag{14}$$

уравнение (13) имеет гомеоморфное решение $w = f(z)$, принадлежащее классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ вместе с обратным. Это решение единственно с точностью до суперпозиции с конформным отображением. Из данного факта и классической теоремы Римана вытекает, что для $\mu(z)$, удовлетворяющего условию (14), либо существует решение $f(z)$ класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ (вместе с обратным f^{-1}), гомеоморфно отображающее D на круг B_1, либо на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. В первом случае будем называть область D μ-гиперболической, а во втором μ-параболической. Всюду далее предполагается, что область D является μ-гиперболической.

Зафиксируем $\zeta = \omega(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ — произвольное решение (13), гомеоморфно отображающее D на единичный круг $B_1 = \{\zeta | \zeta \in \mathbb{C}, \ \ |\zeta| < 1\}$.

Пусть $E \subset D$ — компактное подмножество и $F = D \setminus E$ кольцевидная область, внешняя часть границы которого совпадает с границей ∂D. Введем обозначения $\Sigma_t = \omega^{-1}(|\omega| = t) = \{z | z \in F, \ |\omega(z)| = 1\}$, $H_1(dz)$ — 1-мера Хаусдорфа в D.

Теорема 2. *Пусть в F определено решение w уравнения (13). Если*

$$\lim_{t\to 1} \frac{1}{1-t} \int\limits_{\Sigma_t} |\operatorname{Re} w(z)||\omega_z(z)| H_1(dz) = 0, \tag{15}$$

то $w(z) = ia$, где $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $E' = \omega(E) \Subset B_1$. Зафиксируем произвольно $0 < R < 1$, так чтобы E' лежало в круге $B_R = \{\zeta \mid \zeta \in B_1, \ \ |\zeta| < R\}$. Для любых t_1, t_2, таких что $R \le t_1 < t_2 \le 1$, через K_{t_1,t_2} будем обозначать кольцо $K_{t_1,t_2} = \{\zeta \mid t_1 < |\zeta| < t_2\}$, а через $D_{t_1,t_2} = \omega^{-1}(K_{t_1,t_2})$ его прообраз в D.

Положим $W(\zeta) = w(\omega^{-1}(\zeta))$; пусть $w(z) = u(z) + iv(z)$, $W(\zeta) = U(\zeta) + iV(\zeta)$. Функция $W(\zeta)$ аналитическая в $B_1 \setminus E'$, а значит и в $K_{R,1}$. Обозначим $I_{\zeta,z}(z)$ якобиан отображения $\zeta = \omega(z)$, то есть определитель

$$I_{\zeta,z}(z) = \begin{vmatrix} \alpha_x(z) & \alpha_y(z) \\ \beta_x(z) & \beta_y(z) \end{vmatrix} = \alpha_x(z)\beta_y(z) - \alpha_y(z)\beta_x(z).$$

Пусть $t_0, t_1 \in (R, 1)$ $(t_0 < t_1)$ — произвольны. Пользуясь формулой замены переменной в интеграле (см. [21]), имеем

$$\int\limits_{K_{t_0 t_1}} |U(\zeta)| d\xi d\eta = \int\limits_{D_{t_0 t_1}} |u(z)| I_{\zeta,z}(z) dxdy. \tag{16}$$

Далее, по формуле Кронрода — Федерера (см., например, [18; 20; 22]), имеем

$$\int\limits_{K_{t_0t_1}} |U(\zeta)| d\xi d\eta \;=\; \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{S_t} |U(\zeta)||d\zeta|, \tag{17}$$

$$\int\limits_{D_{t_0t_1}} |u(z)| I_{\zeta,z}(z) dxdy \;=\; \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz). \tag{18}$$

Вычитая из равенства (18) равенство (17) и деля на $t_1 - t_0$, а также учитывая (16), приходим к соотношению

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \left(\int\limits_{S_t} |U(\zeta)||d\zeta| - \int\limits_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz) \right) = 0. \tag{19}$$

Устремляя $t_1 \to t_0 + 0$ и пользуясь известными свойствами интеграла Лебега, получаем при почти всех $t_0 \in (R, 1)$ равенство

$$\int\limits_{S_t} |U(\zeta)||d\zeta| = \int\limits_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz). \tag{20}$$

Из (20) следует, что если

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{1}{1-t} \int\limits_{\Sigma_t} |u(z)| \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||} H_1(dz) = 0, \tag{21}$$

то для функции $W(\zeta)$ выполнено условие (7) леммы 1 и значит $W(\zeta) = ia$, a — вещественная постоянная. Отсюда будет следовать утверждение теоремы. Покажем, что из условия (15) теоремы 2 вытекает (21).

Имеем $|\omega(z)| = \sqrt{(\alpha(z))^2 + (\beta(z))^2}$ и почти всюду в $D_{R,1}$

$$\nabla|\omega(z)| = \frac{\alpha(z)\nabla\alpha(z) + \beta(z)\nabla\beta(z)}{|\omega(z)|^2}.$$

Отсюда

$$|\nabla|\omega(z)||^2 = \frac{(\alpha(z))^2|\nabla\alpha(z)|^2 + 2\alpha(z)\beta(z)\langle\nabla\alpha(z), \nabla\beta(z)\rangle + (\beta(z))^2|\nabla\beta(z)|^2}{(\alpha(z))^2 + (\beta(z))^2}. \tag{22}$$

Для произвольной точки дифференцируемости z функции $\omega(z)$ рассмотрим следующую неотрицательно определенную квадратичную форму

$$B(X,Y) = |\nabla\alpha(z)|^2 X^2 + 2\langle\nabla\alpha(z), \nabla\beta(z)\rangle XY + |\nabla\beta(z)|^2 Y^2.$$

В силу известных свойств квадратичных форм имеет место неравенство

$$\lambda_{\min} \le \frac{B(X,Y)}{X^2 + Y^2} \le \lambda_{\max}, \tag{23}$$

где $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы квадратичной формы $B(X,Y)$. Эти числа являются решениями следующего квадратного уравнения:

$$\begin{vmatrix} |\nabla\alpha(z)|^2-\lambda & \langle\alpha(z),\beta(z)\rangle \\ \langle\alpha(z),\beta(z)\rangle & |\nabla\beta(z)|^2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - S(z)\lambda + (\delta(z))^2 = 0, \tag{24}$$

где $S(z) = |\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2$, $(\delta(z))^2 = |\nabla\alpha(z)|^2|\nabla\beta(z)|^2 - \langle\alpha(z),\beta(z)\rangle^2$. С помощью простых выкладок нетрудно установить равенство

$$(\delta(z))^2 = (\alpha_x(z)\beta_y(z) - \alpha_y(z)\beta_x(z))^2 = (I_{\zeta,z}(z))^2,$$

то есть $\delta(z) = I_{\zeta,z}(z)$. Решая квадратное уравнение (24), находим

$$\lambda_{\min}(z) = \frac{S(z) - \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2}, \quad \lambda_{\max}(z) = \frac{S(z) + \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(z) &= \frac{S(z) - \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2}}{2} = \frac{(\delta(z))^2}{2(S(z) + \sqrt{(S(z))^2 - (\delta(z))^2})} \geq \\ &\geq \frac{(\delta(z))^2}{4S(z)} = \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{4(|\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Используя соотношение

$$|\nabla\alpha(z)|^2 + |\nabla\beta(z)|^2 = 2(|\omega_z(z)|^2 + |\omega_{\overline{z}}(z)|^2),$$

из (25), получаем оценку

$$\lambda_{\min}(z) \geq \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{8(|\omega_z(z)|^2 + |\omega_{\overline{z}}(z)|^2)} = \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{8|\omega_z(z)|^2(1 + |\mu(z)|^2)} \geq \frac{(I_{\zeta,z}(z))^2}{16|\omega_z(z)|^2}. \tag{26}$$

Полагая в (23) $X = \alpha(z)$, $Y = \beta(z)$, получим (22), следовательно, из (26) вытекает, что

$$|\nabla|\omega(z)|| \geq \lambda_{\min}(z) \geq \frac{I_{\zeta,z}(z)}{4|\omega_z(z)|} \quad \Leftrightarrow \quad I_{\zeta,z}(z) \leq 4|\nabla|\omega(z)|||\omega_z(z)|. \tag{27}$$

Снова возьмем произвольно $t_0, t_1 \in (R,1)$, $t_0 < t_1$ и, воспользовавшись формулой Кронрода — Федерера и оценкой (27), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{t_1 - t_0} \int\limits_{D_{t_0 t_1}} |u(z)|\big(4|\nabla|\omega(z)|||\omega_z(z)| - I_{\zeta,z}(z)\big)dxdy = \\ &= \frac{1}{t_1 - t_0} \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{\Sigma_t} |u(z)| \left(4|\omega_z(z)| - \frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||}\right) H_1(dz). \end{aligned}$$

Устремляя в этом неравенстве $t_1 \to t_0 + 0$, получаем неравенство верное при почти всех $t_0 \in (R,1)$

$$4\int\limits_{\Sigma_{t_0}} |u(z)||\omega_z(z)|H_1(dz) \geq \int\limits_{\Sigma_{t_0}} |u(z)|\frac{I_{\zeta,z}(z)}{|\nabla|\omega(z)||}H_1(dz).$$

Из этого неравенства следует, что, если выполнено условие теоремы (15), то выполнено и условие (21), что и доказывает теорему. Теорема доказана.

Нетрудно показать (см. [13, с. 235—236]), что вещественная и мнимая части решения $w(z) = u(z) + iv(z)$ являются решениями дивергентного локально равномерно эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}(z)f_x(z) + a_{12}(z)f_y(z)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}(z)f_x(z) + a_{22}(z)f_y(z)\right) = 0,$$
$$a_{11}(z) = \frac{(1-\mu_1)^2+\mu_2^2}{1-|\mu|^2}, \quad a_{22}(z) = \frac{(1+\mu_1)^2+\mu_2^2}{1-|\mu|^2},$$
$$a_{12}(z) = a_{21}(z) = -\frac{2\mu_2}{1-|\mu|^2}$$

класса $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, понимаемые в обобщенном смысле. Поэтому, по сути результат теоремы 2 касается обобщенных решений уравнений такого вида. Теоремам единственности для уравнений второго порядка эллиптического типа посвящена обширная литература, подробнее с этим можно познакомиться в [14; 19]. К этому же кругу вопросов примыкают теоремы о допустимой скорости стремления к нулю на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка [15; 16].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность всем участникам семинара «Геометрический анализ и вычислительная геометрия» за обсуждение работы, полезные замечания и ценные рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1974. — 100 с.

2. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

3. Зубанкова, К. А. Об асимптотическом поведении решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа, Н. М. Полубоярова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 18–30. — DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

4. Кондрашов, А. Н. Об асимптотике решений эллиптических уравнений на концах некомпактных римановых многообразий с метриками специального вида / А. Н. Кондрашов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 97–125. — DOI: https://doi.org/10.1070/IM8720

5. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.

6. Ландис, Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.

7. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

8. Лосев, А. Г. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, № 1. — С. 87–93.

9. Лосев, А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1643–1652.

10. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа

// Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6. — С. 41–49.

11. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.

12. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. матем. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

13. Миклюков, В. М. Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 304 с.

14. Мешков, В. З. Теорема единственности для эллиптических уравнений второго порядка / В. З. Мешков // Матем. сб. — 1986. — Т. 129 (171), № 3. — С. 386–396. — DOI: https://doi.org/10.1070/SM1987v057n02ABEH003075

15. Мешков, В. З. О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка / В. З. Мешков // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 3. — С. 364–383. — DOI: https://doi.org/10.1070/SM1992v072n02ABEH001414

16. Шифрин, М. А. О возможной скорости убывания решений эллиптических уравнений / М. А. Шифрин // Матем. сб. — 1972. — Т. 89 (131), № 4 (12). — С. 616–629. — DOI: https://doi.org/10.1070/SM1972v018n04ABEH001867

17. Grigor'yan, A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). — 1999. — Vol. 36, № 2. — P. 135–249.

18. Hajlasz, P. Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics / P. Hajlasz // Proceedings on Analysis and Geometry. — Novosibirsk Akademgorodok : Sobolev Institute Press, 2000. — P. 227–254.

19. Hörmander, L. Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations / L. Hörmander // Comm. Partial Differ. Equat. — 1983. — Vol. 8, № 1. — P. 21–64. — DOI: https://doi.org/10.1080/03605308308820262

20. Malý, J. Absolutely Continuous Functions of Several Variables / J. Malý // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1999. — Vol. 231, № 2. — P. 492–508. — DOI: https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6246

21. Malý, J. Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral / J. Malý // Proceedings on Analysis and Geometry. — Novosibirsk : Akademgorodok : Sobolev Institute Press, 2000. — P. 370–386.

22. Malý, J. The Co-Area Formula for Sobolev Mappings / J. Malý, D. Swanson, W. P. Ziemer // Trans. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 355, № 2. — P. 477–492. — DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03091-X

23. Martio, O. On Existence and Uniqueness of Degenerate Beltrami Equations / O. Martio, V. M. Miklyukov // Complex Variables. — 2004. — Vol. 49, № 7-9. — P. 647–656.

24. The Beltrami Equations: A Geometric Approach / V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. — New York : Springer, 2012. — xiv+301 p.

REFERENCES

1. Belinskiy P.P. *Obshchie svoystva kvazikonformnykh otobrazheniy* [General Properties of Quasiconformal Mappings]. Novosibirsk, Nauka, Sib. otd-nie Publ., 1974. 100 p.

2. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

3. Zubankova K.A., Mazepa E.A., Poluboyarova N.M. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy statsionarnogo uravneniya Shredingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of the Stationary Schrödinger Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe*

modelirovanie [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 4, pp. 18-30. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.2

4. Kondrashov A.N. Ob asimptotike resheniy ellipticheskikh uravneniy na kontsakh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy s metrikami spetsialnogo vida [On the Asymptotics of Solutions of Elliptic Equations at the Ends of Non-Compact Riemannian Manifolds with Metrics of a Special Form]. *Izv. RAN. Ser. matem.* [Izv. Math.], 2019, vol. 83, no. 2, pp. 97-125. DOI: https://doi.org/10.1070/IM8720

5. Korolkov S.A. Garmonicheskie funktsii na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Harmonic Functions on Riemannian Manifolds with Ends]. *Sib. matem. zhurn.*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1319-1332.

6. Landis E.M. *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 288 p.

7. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [Some Liouville Theorems on Riemannian Manifolds of a Special Type]. *Izv. vuzov. Matematika*, 1991, no. 12, pp. 15-24.

8. Losev A.G. O nekotorykh liuvillevykh teoremakh na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Some Liouville Theorems on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Sib. matem. zhurn.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 87-93.

9. Losev A.G. O razreshimosti zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona na nekotorykh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Solvability of the Dirichlet Problem for the Poisson Equation on Some Noncompact Riemannian Manifolds]. *Differents. uravneniya* [Diff. Eq.], 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1643-1652.

10. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On the Asymptotic Behavior of Solutions of Some Elliptic-Type Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 6, pp. 41-49.

11. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolichnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsialnogo vida [On the Hyperbolicity Criterion for Noncompact Riemannian Manifolds of Special Type]. *Matem. zametki*, 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558-564.

12. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shryodingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Value Problems for the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Sib. matem. zhurn.*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591-599.

13. Miklyukov V.M. *Funktsii vesovykh klassov Soboleva, anizotropnye metriki i vyrozhdayushchiesya kvazikonformnye otobrazheniya* [Functions of Sobolev Weight Classes, Anisotropic Metrics, and Degenerate Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2010. 304 p.

14. Meshkov V.Z. Teorema edinstvennosti dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka [A uniqueness Theorem for Second Order Elliptic Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1986, vol. 129 (171), no. 3, pp. 386-396. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1987v057n02ABEH003075

15. Meshkov V.Z. O vozmozhnoy skorosti ubyvaniya na beskonechnosti resheniy uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka [On the Possible Decay of Solutions of Second Order Partial Differential Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1991, vol. 182, no. 3, pp. 364-383. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1992v072n02ABEH001414

16. Shifrin M.A. O vozmozhnoy skorosti ubyvaniya resheniy ellipticheskikh uravneniy [The Rate of Decrease of Solutions of Elliptic Equations]. *Matem. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1972, vol. 89 (131), no. 4 (12), pp. 616-629. DOI: https://doi.org/10.1070/SM1972v018n04ABEH001867

17. Grigor'yan A. Analytic and Geometric Background of Recurrence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135-249.

18. Hajlasz P. Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics. *Proceedings on Analysis and Geometry*. Novosibirsk Akademgorodok, Sobolev Institute Press, 2000, pp. 227-254.

19. Hörmander L. Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential

Equations. *Comm. Partial Differ. Equat.*, 1983, vol. 8, no. 1, pp. 21-64. DOI: https://doi.org/10.1080/03605308308820262

20. Malý J. Absolutely Continuous Functions of Several Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, vol. 231, no. 2, pp. 492-508. DOI: https://doi.org/10.1006/jmaa.1998.6246

21. Malý J. Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral. *Proceedings on Analysis and Geometry*. Novosibirsk, Akademgorodok, Sobolev Institute Press, 2000, pp. 370-386.

22. Malý J., Swanson D., Ziemer W. P. The Co-Area Formula for Sobolev Mappings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, no. 2, pp. 477-492. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03091-X

23. Martio O., Miklyukov V.M. On Existence and Uniqueness of Degenerate Beltrami Equations. *Complex Variables*, 2004, vol. 49, no. 7-9, pp. 647-656.

24. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equations: A Geometric Approach*. New York, Springer, 2012. xiv+301 p.

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE BELTRAMI EQUATION WITH A GIVEN REAL PART ON A BOUNDARY

Alexander N. Kondrashov

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1614-0393
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Previously (2019), we established one result on the admissible rate of tending to zero of solutions of an equation of the form $\Delta u + c(x)u = 0$ at the ends of Riemannian manifolds with a metric of a special form. In this paper we show that in the two-dimensional case this result can be useful in solving problems of a slightly different type. Namely, for problems in the theory of functions of a complex variable. We have established a special version of the uniqueness theorem for the Beltrami equation

$$w_{\overline{z}} = \mu(z) w_z.$$

Let us present this result. It is known that if

$$\operatorname{ess\,sup}_{D'} |\mu(z)| < 1 \text{ in each subarea } D' \Subset D,$$

then the Beltrami equation has a homeomorphic solution $w = f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$. Moreover, $w = f(z)$ also belongs to the class $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$. This solution is unique up to superposition with a conformal mapping. There are two possible cases of $f(D) = \mathbb{C}$ or $f(D) = G$, where G is a simply connected domain whose boundary ∂G has more than two points. In the first case, the domain D is called μ-parabolic, and in the second case it is called μ-hyperbolic. We are only interested in μ-hyperbolic domains. If the domain D is μ-hyperbolic, then it can be map homeomorphic onto the unit disk $B_1 = \{\zeta \mid \zeta \in \mathbb{C}, \ \ |\zeta| < 1\}$ using some

solution the Beltrami equation. Let us arbitrarily fix $\zeta = \omega(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ such a solution. Let $E \subset D$ be a compact subset and $F = D \setminus E$ be a ring-shaped domain whose outer part of the boundary coincides with the boundary of ∂D. Let's introduce the notation $\Sigma_t = \omega^{-1}(|\omega| = t) = \{z \mid z \in F, \ |\omega(z)| = 1\}$, $H_1(dz)$ — 1-Hausdorff measure in D. The following theorem is true.

Theorem. *Let the solution w of the Beltrami equation be given in the domain F. If*

$$\lim_{t \to 1} \frac{1}{1-t} \int\limits_{\Sigma_t} |\mathrm{Re}\, w(z)||\omega_z(z)| H_1(dz) = 0,$$

then $w(z) = ia$, where $a \in \mathbb{R}$.

Key words: uniqueness theorems, Beltrami equation, complex dilatation, asymptotic behavior, μ-hyperbolic domain, ring-shaped domain.