



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.5>

УДК 004.942, 519.622, 517.977
ББК 22.19, 32.973-018

Дата поступления статьи: 10.01.2023
Дата принятия статьи: 01.02.2024

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОХОДКИ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ ПЯТИЗВЕННОЙ МОДЕЛИ АНТРОПОМОРФНОГО МЕХАНИЗМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Сергей Владимирович Сиволобов

Доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования,
Волгоградский государственный университет
sivolobov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-4007-3047>
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Рассматривается задача моделирования походки человека. Для описания движений шагающего человека используется плоская антропоморфная модель, с пятью весомыми звеньями, описывающими ноги и корпус человека. Влияние движения рук не учитывается. Управление носит импульсный характер и на интервале между началом и концом шага механизм движется по баллистической траектории. Модель описывает одноопорное движение, при котором конец опорной ноги связан с поверхностью. Состояние модели характеризуется пятью обобщенными координатами, определяющими углы отклонения от вертикали в суставах. Для моделирования реальной походки при определении вектора начальных угловых скоростей предлагается минимизировать невязку, гарантирующую прохождение механизма через все точки заданной траектории. Антропоморфный механизм характеризуется также массово-инерционными характеристиками, точные значения которых для моделирования человека неизвестны. Для повышения точности моделирования предлагается вычислять значения этих величин путем минимизации. Для подбора оптимальных значений использовались методы безусловной оптимизации и минимизации с ограничениями. При минимизации с ограничениями удалось получить движения, наиболее приближенные к реальным. Среднее отклонение от реальных углов составило $7,25^\circ$. При использовании безусловной оптимизации моделируемые движения получаются ближе к реальным (средняя ошибка составляет $3,3^\circ$).

Ключевые слова: моделирование походки, моделирование движений человека, антропоморфный механизм, модель одноопорного движения, оптимизация.

Введение

Походка является важным биометрическим показателем, характеризующим особенности ходьбы человека [6]. Во многих работах походка описывается как уникальная характеристика, пригодная для идентификации человека [45; 56; 75–78; 80] и обладающая рядом преимуществ по сравнению с более традиционными методами распознавания. Метод является бесконтактным, в отличие от отпечатков пальцев [28], и требует меньшей детализации видеоматериала, чем при распознавании по лицу [62]. Поскольку видеоматериалы часто являются единственным объективным источником информации о правонарушении, существует большой интерес к исследованиям походки в сфере обеспечения безопасности [5; 6]. Анализ походки имеет обширное применение для диагностики заболеваний опорно-двигательного аппарата в медицине [80]. В исследованиях [46; 64] описывалось влияние травм, врожденных и возрастных нарушений на изменения походки. В клинических условиях Питер Де Люка провел исследование походок 91 пациента с детским церебральным параличом и сравнил рекомендации, сделанные на основе их анализа, с рекомендациями, полученными с использованием кинематических, кинетических и электромиографических данных. Использование результатов анализа походки позволило в 52 % случаев снизить стоимость и потенциальные риски хирургических операций [37].

Моделирование походки представляет значительный интерес для идентификации людей по походке [20], а также для изучения патологий походки [57; 64]. Оно находит обширное применение при расчете конструкции и приводов экзоскелетов, а также для управления ими [33; 34; 41; 43; 59; 68]. Проблема оптимального управления человекоподобными роботами в квазистатических режимах рассматривается в работах [2; 9; 10; 15; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 69]. Важным направлением является синтез управляющих воздействий для перемещения робота-андроида в статически-неустойчивых режимах (например, с устойчивостью к опрокидыванию) [4; 8; 26; 63; 81; 82], в том числе с применением динамического уравнивания путем смещения центра тяжести [11], при расчете которых также используются технологии параллельных вычислений [70; 71], управление с прогнозирующими моделями (МРС) [47; 72] и машинное обучение [36; 58; 82].

Движение роботов осуществляется с помощью приводов, которые могут выходить из строя. Эта проблема рассмотрена в статье [83], где предложен способ управления, позволяющий сохранять устойчивость при одном неисправном приводе. Проблема поддержания равновесия человеком, стоящим на подвижной опоре, исследуется в работах [7; 12; 51; 55] на примере стабилизации двойного перевернутого маятника, установленного на качели-балансир. Для моделирования движений человека часто применяются многозвенные модели, уравнения движения для которых составляются с использованием уравнений Лагранжа второго рода. В частности, 2- и 3-звенные модели используются для моделирования человека, раскачивающегося на качелях [16; 30; 60; 61]. Подобные модели используются при моделировании плоских пантографических механизмов [18]. С помощью 3- и 4-звенников моделируются движения человека в вертикальном прыжке [39; 42].

Для моделирования походки человека предложены 5-ти [17; 54] и 7-звенные модели [49]. В работах [38; 40] рассматриваются 7-звенные модели для изучения влияния движений рук. В работе [49] описывается импульсное управление антропоморфным механизмом. Двухзвенник, описывающий ногу, состоящую из двух звеньев (бедро и голени),

может быть временно заменен одним пружинным звеном [44]. В работе [48] предложен метод управления ходьбой по неровной местности, основанный на модели пружинного перевернутого маятника с плавно изменяемой жесткостью со ступней конечного размера (CVSLIP-FF).

Значительный интерес также представляют модели одно- и многозвенного перевернутого маятника, шарнирно закрепленного на оси колеса [32; 50; 52; 53; 65; 66]. Стабилизация такого механизма в неустойчивом положении имеет прикладное значение к построению моноциклов, примерами которых являются такие средства индивидуальной мобильности, как «Segway», гироскутер и моноколесо. Моделирование ходьбы не ограничивается использованием двуногих антропоморфных механизмов. В исследовании [3] рассматривается походка четырехногого робота со спаренными передними и задними ногами. В работах [14; 24; 67] рассматривается управление роботом с комбинированным колесно-шагающим двигателем.

Во время ходьбы чередуются два сменяющих друг друга движения, называемые одноопорной и двухопорной фазой. При одноопорной фазе одна нога (опорная) опирается о поверхность, а другая (переносимая) перемещается над поверхностью [20; 31]. При двухопорной фазе обе ноги опираются о поверхность и происходит смена опоры с одной ноги на другую. Продолжительность двухопорной фазы в полном цикле движения не является постоянной и может изменяться. Во время бега ее длительность значительно сокращается [35], а у людей с заболеваниями опорно-двигательного аппарата ее продолжительность может значительно увеличиваться [46]. При ходьбе с костылями одноопорная фаза может практически полностью отсутствовать, заменяясь на двух-, трех- и четырехопорные фазы [13; 59]. В среднестатистической ходьбе двухопорная фаза занимает не более 20 % от полного цикла движения [17; 59], в связи с этим шаг может быть сведен к одноопорной фазе, которая исследуется наиболее активно [17; 20; 46]. В работах [73; 74] для моделирования движений, приближенных к походке реального человека, используется MPC-контроллер. В работе [20] предложен комбинированный подход с более точными результатами, в котором сначала на основе уравнений Лагранжа строятся траектории движения нижних конечностей в одноопорной фазе, проходящие через заданные точки начала и завершения движения, а затем, с помощью схемы на основе MPC-контроллера, рассчитываются траектории, приближенные к реальным.

Целью данной работы является разработка метода моделирования одноопорного движения на основе уравнений Лагранжа, посредством согласования моделируемых траекторий с реальными траекториями перемещения человека. Решение задач оптимизации производится с использованием различных методов условной и безусловной минимизации.

1. Математическая модель антропоморфного механизма

В данной работе для описания одноопорного движения используется плоский антропоморфный механизм из пяти шарнирно соединенных весомых звеньев, описанный в работе [31], показанный на рисунке 1. Все звенья перемещаются в сагиттальной плоскости.

Звено OC обозначает корпус, а двухзвенники OBA и ODE — ноги, которые считаются одинаковыми. Звенья OB и OD называются бедрами, BA и DE — голеньями, O — тазобедренным суставом. Все шарниры предполагаются идеальными, поскольку трение в суставах человека мало. В реальных суставах человека коэффициент трения очень

низок, и составляет величину, принимающую значение от 0,003 до 0,02 [1]. Опорная нога OBA шарнирно связана с поверхностью в точке A , а двухзвенник ODE обозначает переносимую ногу, не связанную с поверхностью. Стопы и руки в этой модели не рассматриваются. В качестве пяти обобщенных координат используются углы $\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Они обозначают углы, которые образуют корпус, бедра и голени с вертикалью соответственно. Неконсервативные силы, действующие на механизм, показаны на рисунке 1б. Моменты сил в коленных суставах обозначены как u_1 и u_2 , а моменты сил, действующих между корпусом и бедрами, q_1 и q_2 . R_2 обозначает внешнюю силу, приложенную к концу ноги E (далее R_{2x} и R_{2y} — ее горизонтальная и вертикальная составляющая), а Π_1 и Π_2 — моменты внешних сил, приложенных к голениам.

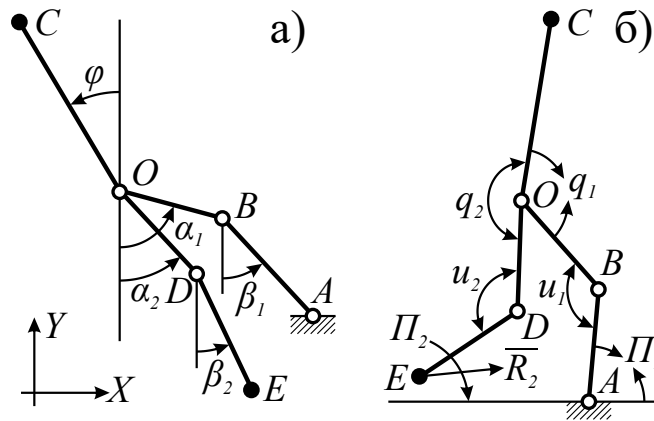


Рис. 1. Кинематическая схема модели пятизвенного антропоморфного механизма (а — углы между звеньями; б — неконсервативные силы, действующие на механизм)

Уравнения движения такого пятизвенника, составленные с использованием уравнений Лагранжа второго рода, в матричной форме имеют вид [79]:

$$B(z)\ddot{z} + gAf_1(z) + D(z)f_2(\dot{z}) = C(z)w, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения;

$$z = \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, f_1(z) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \\ \sin \beta_1 \\ \sin \beta_2 \end{pmatrix}, f_2(\dot{z}) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\beta}_1^2 \\ \dot{\beta}_2^2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q_1 \\ q_2 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Восьмимерная матрица-столбец w содержит силы и моменты сил. Матрицы $B(z), D(z), A, C(z)$ имеют вид:

$$B(z) =$$

$$\begin{pmatrix}
 J & L_a K_r \cdot & 0 & L_b K_r \cos(\varphi - \beta_1) & 0 \\
 \cdot \cos(\varphi - \alpha_1) & L_a K_r \cdot & J_a - 2L_a K_a + & -L_a K_a \cdot & (J_{ab} - L_a K_b - L_b K_a + & -L_a K_b \cdot \\
 & +L_a^2 M & \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & +L_a L_b M) \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cdot \cos(\alpha_1 - \beta_1) \\
 0 & -L_a K_a \cdot & J_a & -L_b K_a \cos(\alpha_2 - \beta_1) & J_{ab} \cdot \\
 \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & L_b K_r \cdot & (J_{ab} - L_a K_b - & -L_b K_a \cdot & J_b - 2L_b K_b + L_b^2 M & -L_b K_b \cdot \\
 & -L_b K_a + & \cdot \cos(\alpha_2 - \beta_1) & & \cdot \cos(\alpha_2 - \beta_2) \\
 & +L_a L_b M) \cdot & & & & \cdot \cos(\beta_1 - \beta_2) \\
 0 & \cdot \cos(\alpha_1 - \beta_1) & & & & \\
 & -L_a K_b \cdot & J_{ab} \cdot & -L_b K_b \cos(\beta_1 - \beta_2) & J_b & \\
 & \cdot \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \cdot \cos(\alpha_2 - \beta_2) & & &
 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$D(z) =$

$$\begin{pmatrix}
 0 & L_a K_r \cdot & 0 & L_b K_r \sin(\varphi - \alpha_1) & 0 \\
 \cdot \sin(\varphi - \alpha_1) & -L_a K_r \cdot & 0 & -L_a K_a \cdot & (J_{ab} - L_a K_b - L_b K_a + & -L_a K_b \cdot \\
 & 0 & \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & +L_a L_b M) \sin(\alpha_1 - \beta_1) & \cdot \sin(\alpha_1 - \beta_2) \\
 0 & L_a K_a \cdot & 0 & -L_b K_a \sin(\alpha_2 - \beta_1) & J_{ab} \cdot \\
 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & -L_b K_r \cdot & -(J_{ab} - L_a K_b - & L_b K_a \cdot & 0 & \sin(\alpha_2 - \beta_2) \\
 & -L_b K_a + & \cdot \sin(\alpha_2 - \beta_1) & & & -L_b K_b \cdot \\
 & +L_a L_b M) \cdot & & & & \cdot \sin(\beta_1 - \beta_2) \\
 0 & \cdot \sin(\alpha_1 - \beta_1) & & & & \\
 & L_a K_b \cdot & -J_{ab} \cdot & L_b K_b \sin(\beta_1 - \beta_2) & 0 & \\
 & \cdot \sin(\alpha_1 - \beta_2) & \cdot \sin(\alpha_2 - \beta_2) & & &
 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix}
 -K_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_a - L_a M & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_a & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_b - L_b M & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_b
 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$C(z) = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -L_a \cos \alpha_1 & -L_a \sin \alpha_1 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & L_a \cos \alpha_2 & L_a \sin \alpha_2 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -L_b \cos \beta_1 & -L_b \sin \beta_1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & L_b \cos \beta_2 & L_b \sin \beta_2
 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где матрица $B(z)$ является симметричной и положительно определенной как матрица кинетической энергии; диагональная матрица A определяет потенциальную энергию; $D(z)$ — матрица символов Кристоффеля первого рода для матрицы $B(z)$; L_a и L_b — длины бедра и голени соответственно; J — момент инерции корпуса относительно точки O ; $K_r = m_k r$, (m_k — масса корпуса); r — расстояние от тазобедренного сустава O до центра масс корпуса. Масса всего пятизвенника равна M . Поскольку ноги считаются одинаковыми, то выполняется $M = m_k + 2m_a + 2m_b$, где m_a и m_b — массы бедра и голени соответственно. J_b — момент инерции голени относительно коленного сустава

(B для голени BA). $K_b = m_b b$, где b — расстояние от коленного сустава до центра масс голени. J_a^o — момент инерции бедра относительно точки O . Параметры K_a , J_a и J_{ab} рассчитываются по формулам:

$$K_a = m_a a + m_b L_a, J_a = J_a^o + m_b L_a^2, J_{ab} = K_b L_a, \quad (7)$$

где a — расстояние от тазобедренного сустава до центра масс бедра.

Управление носит импульсный характер в начале ($t = 0$) и конце шага ($t = T$), и на интервале времени $0 < t < T$ механизм движется по баллистической траектории в отсутствие каких-либо управляющих воздействий ($w(t) = 0$). Многосвязный переходит из состояния $z(0)$ в $z(T)$, при которых переносимая нога находится на поверхности. Импульсное управление движением антропоморфного механизма предложено в [31] и экспериментально подтверждено в [33]. Таким образом, на интервале времени $0 < t < T$ решение $z(t)$ удовлетворяет однородной системе:

$$B(z)\ddot{z} + gAf_1(z) + D(z)f_2(\dot{z}) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8), разрешенное относительно вторых производных, имеет вид:

$$\ddot{z} = -gB^{-1}(z)Af_1(z) - B^{-1}(z)D(z)f_2(\dot{z}). \quad (9)$$

Для решения краевой задачи, предполагающей нахождение вектора начальных угловых скоростей $\dot{z}(0)$, при котором решение (8), исходящее из начального состояния $z(0)$, проходит через $z(T)$, в [31] предлагалось минимизировать функцию невязки:

$$I = \sum_{i=1}^5 k_i [\Delta z_i(T)]^2, \quad (10)$$

где $\Delta z_i(T)$ — разница между заданным и расчетным значением обобщенной координаты, а k_i — некоторые весовые коэффициенты. Получаемые траектории движения при таком решении уравнений (8) сильно отличаются от реальных траекторий, получаемых из данных о движении человека. Для приближения расчетных траекторий к реальным в [20] была предложена схема в среде MATLAB/Simulink, использующая MPC-контроллер. Авторами заявлено, что погрешность расчетных траекторий не превышала 5 %. В данной статье далее построен способ нахождения решения уравнений (8), при котором расчетные траектории движения близки к реальным.

2. Моделирование движений, приближенных к реальным

Минимизация невязки, рассчитанной по формуле (10), обеспечивает прохождение решения, исходящего из точки $z(0)$, только через точку $z(T)$. Однако положение механизма в промежуточные моменты $(0; T)$ может быть произвольным. Для моделирования реального движения заданного набором точек $\hat{z}_i(t)$ предложено минимизировать невязку временного ряда

$$I = \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^5 \left(z_i(t) - \hat{z}_i(t) \right)^2. \quad (11)$$

Равенство нулю невязки по формуле (11) обеспечивает полное совпадение траекторий заданного и моделируемого движения. В качестве источника реальных траекторий движения человека использовался Vired-файл для программы 3Ds Max, полученный из

открытых источников, созданный с использованием технологии захвата движений. Поскольку антропометрические данные человека в общем случае неизвестны, для моделирования использованы значения, указанные в [31]:

$$M = 75 \text{ кг}; m_a = 8,6 \text{ кг}; m_b = 4,6 \text{ кг}; J = 11,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; J_a^0 = 0,535 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad (12)$$

$$J_b = 1,02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; r = 0,386 \text{ м}; a = 0,18 \text{ м}; b = 0,324 \text{ м}; L_a = 0,41 \text{ м}; L_b = 0,497 \text{ м}.$$

Для минимизации невязки (11) применена функция *fminunc* (использующая квази-ньютоновский метод Бройдена — Флетчера — Голдфарба — Шэнно) из пакета MATLAB 7.11.0 (R2018b). Полученные в результате моделирования траектории показаны на рисунке 2. Траектория, смоделированная с использованием невязки (10), совпадает с заданной только в моменты $t = 0$ и $t = T$. Моделирование с использованием невязки (11) дает более точное решение. Средняя ошибка при этом составила $9,68^\circ$, что является достаточно большим значением, но, тем не менее, полученные траектории более близки к реальным, что наиболее заметно на левом нижнем графике (рис. 2).

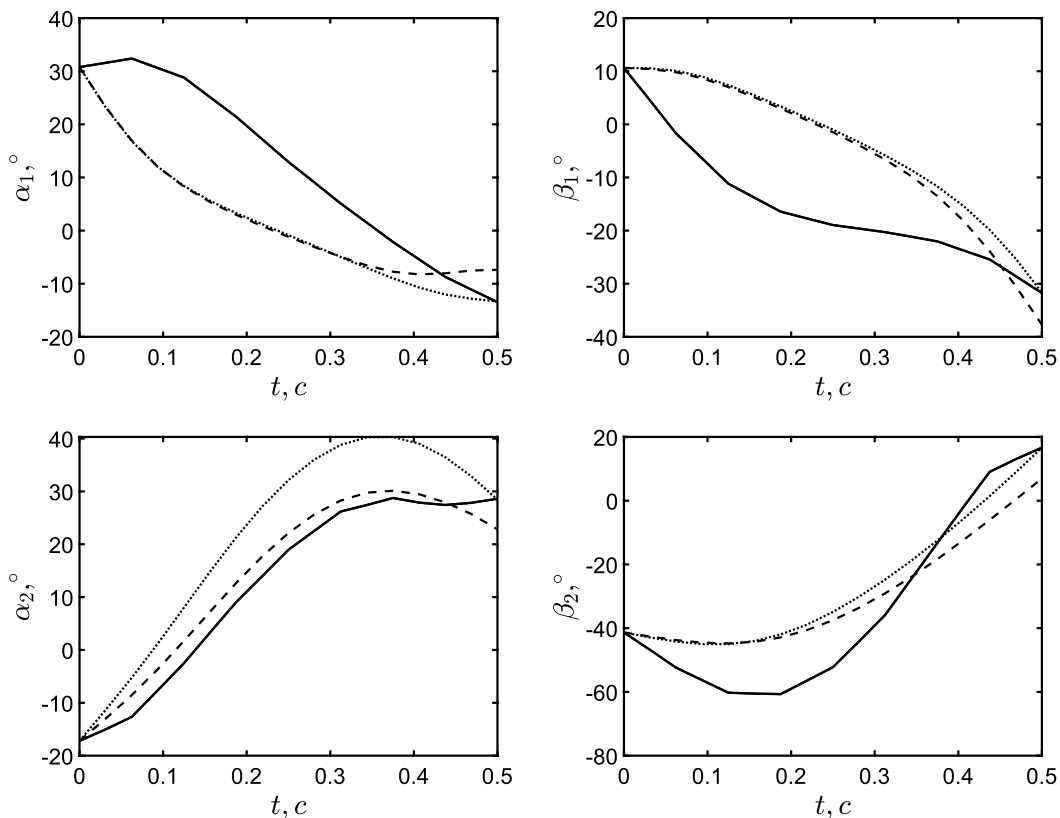


Рис. 2. Сравнение динамики движений (угловых) в суставах реального человека (черная сплошная линия) и смоделированных с использованием невязки, вычисляемой по формуле (10) (пунктирная линия) и по формуле (11) (штриховая линия)

3. Повышение точности моделирования движений путем варьирования параметров модели без ограничений на их значения

Одной из возможных причин отличия смоделированных траекторий от реальных может являться неточность используемых значений антропометрических характеристик. Длины сегментов тела с некоторой погрешностью могут быть определены по видеоизображению, однако определить значения массово-инерционных характеристик (МИХ) в этом случае затруднительно. К массово-инерционным характеристикам в описанной модели относятся: массы M, m_a, m_b ; моменты инерции J, J_a^0, J_b ; расстояния до центров масс сегментов тела r, a, b . Для повышения точности моделирования предлагается при минимизации невязки (11), помимо $\dot{z}(0)$, варьировать значения МИХ. Для минимизации использовались функции безусловной минимизации `fminunc` и `fminsearch`. В таблице 1 приведены результаты минимизации с различными наборами изменяемых параметров.

Таблица 1

Результаты минимизации невязки без ограничений на значения параметров

№ набора	Варьируемые параметры	Результат минимизации (средняя ошибка)	
		<code>fminunc</code>	<code>fminsearch</code>
1	$\dot{z}(0), J$	9,69°	9,71°
2	$\dot{z}(0), J, J_a^0$	8,35°	8,89°
3	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b$	4,64°	6,3°
4	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M$	3,52°	6,02°
5	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a$	3,3°	3,71°
6	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a, m_b$	3,3°	6,24°
7	$\dot{z}(0), J, J_a^0, M, m_a$	5,13°	4,65°
8	$\dot{z}(0), J, M, m_a$	4,35°	10,16°
9	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a, r$	3,39°	18,02°
10	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a, m_b, r$	3,54°	10,67°
11	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a, m_b, r, a$	21,63°	4,68°
12	$\dot{z}(0), J, J_a^0, J_b, M, m_a, m_b, r, a, b$	16,11°	28,46°

Наилучшее решение со средней ошибкой 3,3° получено с набором варьируемых параметров № 5. Как видно из таблицы, увеличение количества варьируемых параметров не всегда приводило к уменьшению значения невязки, хотя очевидно, что решение, полученное с использованием набора № 5, должно присутствовать среди решений, найденных с использованием наборов № 9–12. Данный факт свидетельствует о наличии большого количества локальных минимумов целевой функции. В связи с этим можно предположить, что с использованием средств глобальной многокритериальной оптимизации можно найти более точное решение.

В таблице 2 приведены значения характеристик (в системе СИ), полученные в результате безусловной оптимизации с помощью функции `fminunc`. Как видно, многие из параметров принимают некорректные значения, в связи с этим необходимо применять методы условной оптимизации.

Таблица 2

**Значения параметров, найденные в результате безусловной оптимизации
(прочерк означает, что значение параметра не изменялось)**

№ набора	Массы сегментов, кг			Моменты инерции, кг · м ²			Расстояния до центра масс, м		
	<i>M</i>	<i>m_a</i>	<i>m_b</i>	<i>J</i>	<i>J_a⁰</i>	<i>J_b</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1	—	—	—	12,56	—	—	—	—	—
2	—	—	—	1,7 · 10 ⁵	5,5 · 10 ⁶	—	—	—	—
3	—	—	—	1,3 · 10 ⁵	4,2 · 10 ⁶	0,36	—	—	—
4	9,80	—	—	4,4 · 10 ⁵	2,3 · 10 ⁶	0,48	—	—	—
5	9,40	-5,98	—	381,47	2561,08	0,53	—	—	—
6	3,27	-2,15	1,59	77,87	1292,09	0,18	—	—	—
7	4,44	-1,95	—	24,85	327,80	—	—	—	—
8	5,03	-10,12	—	2,9 · 10 ⁶	—	—	—	—	—
9	22,02	-69,01	—	62,44	666,32	0,52	0,20	—	—
10	62,97	6,96	25,70	14,77	290,25	2,61	3,41	—	—
11	74,99	8,59	4,69	11,34	1,09	0,71	-0,19	-1,05	—
12	74,99	8,59	4,58	11,34	1,41	1,24	-0,13	-2,03	0,04

4. Оптимизация значений параметров модели с ограничениями

Минимизация с ограничениями осуществлялась с помощью функции *fmincon* из пакета MATLAB. Вектор переменных минимизируемой функции имеет вид:

$$X = (\dot{\varphi}(0), \dot{\alpha}_1(0), \dot{\alpha}_2(0), \dot{\beta}_1(0), \dot{\beta}_2(0), M, m_a, m_b, J, J_a^0, J_b, r, a, b). \quad (13)$$

В соответствии с биометрическими данными из [22], масса ног не должна быть больше половины от общей массы тела, а масса голени не должна превышать массу бедра. Моменты инерции сегментов тела не должны превышать максимально возможные. Данные условия записаны в виде матрицы линейных ограничений A_{iq} и вектора свободных членов b_{iq} :

$$A_{iq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2L_k^2 & 2L_k^2 & 2L_k^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_a^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_b^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$b_{iq} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) . \quad (15)$$

Границы значений переменных заданы векторами lb и ub :

$$lb = (-10; -10; -10; -10; -10; 10; 1; 0, 5; 0, 01; 0, 01; 0, 01; 0; 0; 0) , \quad (16)$$

$$ub = (10; 10; 10; 10; 10; 200; 50; 30; (200 - 2 - 1)L_k^2; 50L_a^2; 30L_b^2; L_k; L_a; L_b) . \quad (17)$$

Масса тела ограничена значениями от 10 до 200 кг, бедра — от 1 до 50 кг, голени — от 0,5 до 30 кг, в соответствии с данными взятыми из [22]. Результаты минимизации функцией $fmincon$ с применением различных алгоритмов оптимизации приведены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты минимизации с ограничениями

Алгоритм оптимизации	Средняя ошибка
Метод внутренней точки	7,97°
Последовательное квадратичное программирование	7,25°
Метод активного набора	7,27°

Результаты моделирования с ограничениями дают менее точные решения, что обусловлено наличием нескольких локальных минимумов у целевой функции. Рисунок 3 показывает результаты вычислений невязки (11) для различных пар свободных параметров в 14-мерном пространстве. Имеются как несколько локальных минимумов, так и протяженные зоны овражного типа у функции I , что существенно затрудняет оптимизацию. На рисунке 4 показаны траектории, полученные с использованием минимизации с ограничениями на значения параметров и без них. На правом верхнем графике отчетливо видно, что построенная с использованием моделирования без ограничений траектория значительно ближе к заданной, чем при моделировании с ограничениями. На остальных графиках отличия менее существенны.

Заключение

В статье предложен метод моделирования движения, приближенного к походке реального человека. Для моделирования используется математическая модель плоского пятизвенного антропоморфного механизма, располагающегося в сагиттальной плоскости, совершающего одноопорное движение. Управление движением механизма носит импульсный характер и в промежутке между началом и завершением движения механизм движется без каких-либо управляющих воздействий по баллистической траектории. Метод, описанный в работе [20], позволял моделировать движение механизма, положение которого совпадало бы с заданным только в начале и конце интервала движения. В данной работе предложен метод, позволяющий моделировать движение, совпадающее с заданным на всем интервале одноопорного движения.

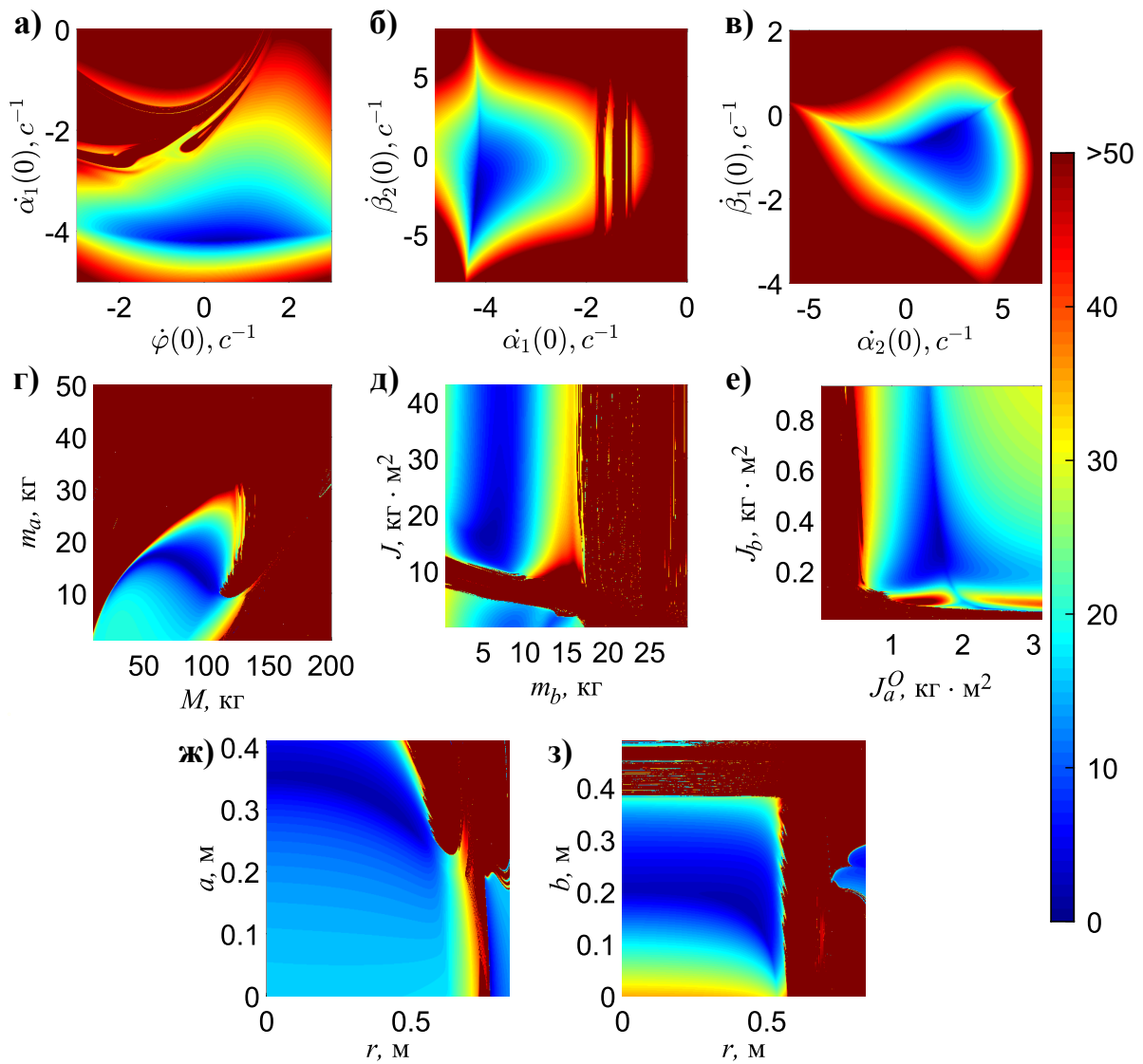


Рис. 3. Значения невязки при различных значениях переменных

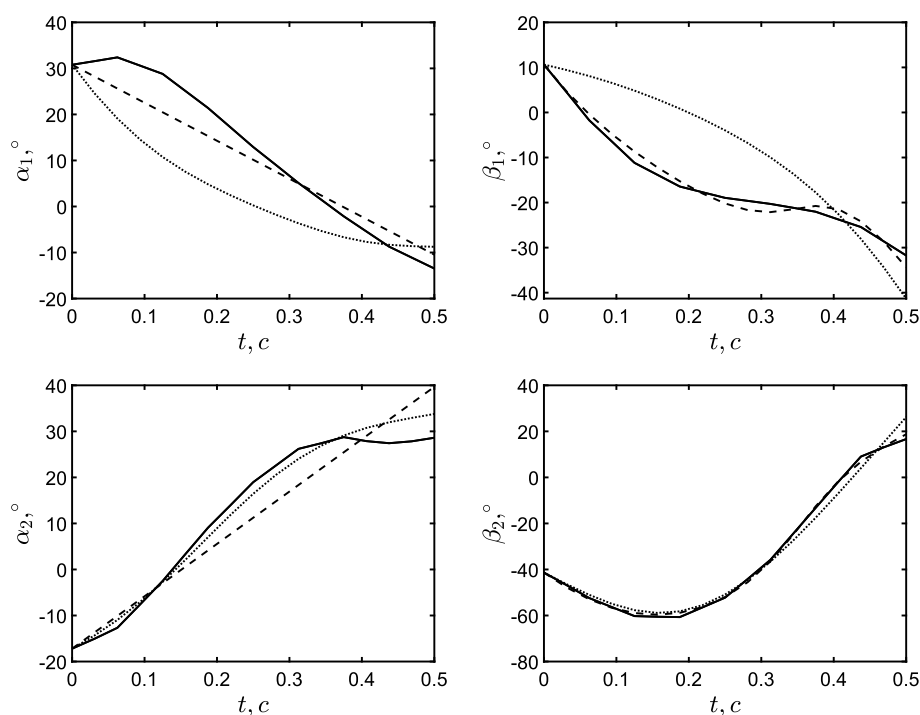


Рис. 4. Сравнение динамики движений (угловых) в суставах реального человека (черная линия) и смоделированных с использованием минимизации с ограничениями (пунктирная линия) и без ограничений (штриховая линия)

Модель содержит параметры, соответствующие массово-инерционным характеристикам человека. Поскольку их точные значения для моделируемого человека не известны, были использованы значения, указанные в [17], однако при этом получить движения, достаточно близкие к заданным, не удалось. В связи с этим, в работе предложено повысить точность моделирования путем варьирования значений массово-инерционных характеристик. Для поиска подходящих значений использовались методы безусловной минимизации из пакета MATLAB, позволившие смоделировать движения, близкие к заданным (в среднем отклонение от движений в суставах реального человека составило $3,3^\circ$), однако при этом значения характеристик часто становились некорректными. Для решения этой проблемы использована минимизация с ограничениями, что позволило найти решения, которые в среднем находятся в пределах $7,25^\circ$ от точных. Показано, что минимизируемая функция содержит большое количество локальных минимумов. Это указывает, что более точное решение может быть найдено при использовании других методов глобальной минимизации, основанных, например, на генетических алгоритмах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адашевский, В. М. Теоретические основы механики биосистем / В. М. Адашевский. — Харьков : НТУ «ХПИ», 2001. — 258 с.
2. Актуальные задачи управления в динамике связанных систем тел / А. С. Горобцов, П. С. Тарасов, А. В. Скориков, А. Е. Марков, С. Е. Терехов // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2019. — С. 451–452.

3. Аустен, Я. Виртуальный четырехногий робот: конструкция, управление, моделирование, эксперименты / Я. Аустен, А. М. Формальский, К. Шевалльро // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 2005. — Т. 11, № 8. — С. 1–28.

4. Борина, А. П. Система управления статически неустойчивым шагающим аппаратом / А. П. Борина // *Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 4–12. — DOI: <http://dx.doi.org/10.22213/2413-1172-2023-4-4-12>

5. Булгаков, В. Г. Специфика получения образцов для сравнительного исследования динамических признаков человека по материалам видеозаписи / В. Г. Булгаков // *Вестник Владимирского юридического института*. — 2010. — № 4 (17). — С. 64–67.

6. Булгаков, В. Г. Экспертный программный модуль для исследования динамических признаков ходьбы человека / В. Г. Булгаков, В. В. Бумагин // *Судебная экспертиза*. — 2011. — № 3 (27). — С. 36–46.

7. Войцицкая, К. Л. О модели тазобедренной стратегии при удержании человеком равновесия на качелях «сисо» / К. Л. Войцицкая, П. А. Кручинин, А. М. Формальский // *Биомеханика-2020*. — Пермь : Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, 2020. — С. 79–83.

8. Горобцов, А. С. Глава 13. Новые механизмы двуногих и многоногих шагающих роботов / А. С. Горобцов // *Новые механизмы в современной робототехнике*. — М. : РИЦ Техносфера, 2018. — С. 295–315.

9. Горобцов, А. С. Локомоция робота-андроида в квазистатических режимах / А. С. Горобцов // *Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины*. — Курск : Юго-Запад. гос. ун-т, 2016. — С. 135–137.

10. Горобцов, А. С. Теоретическая и экспериментальная отработка методов управления шаганием робота-андроида AP-600 / А. С. Горобцов, А. А. Мохов, А. А. Островский // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. — Казань : Казан. (Приволж.) федер. ун-т, 2015. — С. 1021–1023.

11. Горобцов, А. С. Обобщенная задача динамического уравнивания и перспективные направления ее применения / А. С. Горобцов // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. — 2023. — № 3 (756). — С. 14–24. — DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-3-14-24>

12. Гугаев, К. В. О моделировании удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье / К. В. Гугаев, П. А. Кручинин, А. М. Формальский // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. — Казань : Казан. (Приволж.) федер. ун-т, 2015. — С. 1095–1097.

13. Иванов, А. В. Моделирование ходьбы человека с костылями / А. В. Иванов, А. М. Формальский // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. — Казань : Казан. (Приволж.) федер. ун-т, 2015. — С. 1545–1547.

14. Исследование управляемого движения шагающих роботов методами компьютерного моделирования динамики связанных систем тел / А. С. Горобцов, Н. В. Чигиринская, М. И. Андреева, Е. А. Смирнов, А. М. Бочкин // *Современные наукоемкие технологии*. — 2019. — № 12-2. — С. 282–286. — DOI: <http://dx.doi.org/10.17513/snt.37872>

15. Квазиоптимальное управление движением роботов как «greedy» управление в машинном обучении / А. С. Горобцов, П. С. Тарасов, А. Е. Марков, А. В. Дианский // *Робототехника и искусственный интеллект*. — Красноярск : ЛИТЕРА-принт, 2022. — С. 5–8.

16. Климина, Л. А. Управление раскачиванием качелей / Л. А. Климина, А. М. Формальский // *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)*. — М. : Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2022. — С. 238–241.

17. Колесникова, Г. П. Об одном способе моделирования походки человека / Г. П. Колесникова, А. М. Формальский // *Инженерный журнал: наука и инновации*. — 2014. — № 1 (25). — Article ID: 11.

18. Меркурьев, И. В. Разработка математической модели робототехнического комплек-

са для неразрушающего контроля стальных тросов / И. В. Меркурьев, Г. Р. Сайпулаев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 1. — С. 49–58. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.1.4>

19. Метод синтеза программного движения роботов с учетом заданных ограничений реакций в связях / А. С. Горобцов, А. В. Скориков, П. С. Тарасов, А. Е. Марков, А. В. Дианский // Робототехника и искусственный интеллект. — Красноярск : ЛИТЕРА-принт, 2021. — С. 199–202.

20. Овчинников, И. А. Моделирование походки человека в среде MatLab/Simulink / И. А. Овчинников, П. П. Коваленко, Т. М. Ву // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2016. — Т. 59, № 8. — С. 690–694.

21. Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов / А. С. Горобцов, А. Е. Андреев, А. Е. Марков, А. В. Скориков, П. С. Тарасов // Тр. СПИИРАН. — 2019. — Т. 18, № 1. — С. 85–122. — DOI: <http://dx.doi.org/10.15622/sp.18.1.85-122>

22. Попов, Г. И. Биомеханика двигательной деятельности / Г. И. Попов, А. В. Самсонова. — М. : Академия, 2011. — 320 с.

23. Программно-аппаратный комплекс для создания и исследования систем управления локомоцией и автономным движением мобильных роботов / А. С. Горобцов, А. Е. Марков, П. С. Тарасов, А. В. Скориков, А. В. Дианский, Д. А. Степаненко // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2021. — № 9 (256). — С. 21–25. — DOI: <http://dx.doi.org/10.35211/1990-5297-2021-9-256-21-25>

24. Робот с комбинированным колесно-шагающим движителем / А. С. Горобцов, А. В. Скориков, П. С. Тарасов, О. К. Чесноков // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2020. — № 9 (244). — С. 26–30. — DOI: <http://dx.doi.org/10.35211/1990-5297-2020-9-244-26-30>

25. Синтез локомоции шагания антропоморфного робота / А. С. Горобцов, А. Е. Андреев, А. С. Мохов, П. С. Тарасов // Робототехника и искусственный интеллект. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. — С. 8–12.

26. Синтез управления роботом-андроидом в статически неустойчивых режимах / А. С. Горобцов, А. Д. Мохов, О. Г. Мохова, А. А. Островский // Теория управления и математическое моделирование. — Ижевск : Удмурт. гос. ун-т, 2015. — С. 156–157.

27. Синтез устойчивых квазистатических режимов шагания антропоморфного робота / А. С. Горобцов, А. Е. Андреев, П. С. Тарасов, А. В. Скориков, С. К. Карцов // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2016. — № 6 (185). — С. 75–76.

28. Соколова, А. И. Методы идентификации человека по походке в видео / А. И. Соколова, А. С. Конушин // Труды института системного программирования РАН. — 2019. — Т. 31, № 1. — С. 69–82. — DOI: [http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31\(1\)-5](http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-5)

29. Управление локомоцией антропоморфного робота в квазистатическом режиме / А. С. Горобцов, А. Е. Андреев, А. В. Скориков, П. С. Тарасов // Робототехника и искусственный интеллект. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. — С. 24–28.

30. Формальский, А. М. Математическое моделирование поведения человека на качелях / А. М. Формальский, Л. А. Климина // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2019. — С. 407–409.

31. Формальский, А. М. Перемещение антропоморфных механизмов / А. М. Формальский. — М. : Наука, 1982. — 368 с.

32. Формальский, А. М. Управление движением неустойчивых объектов / А. М. Формальский. — М. : Физматлит, 2012. — 232 с.

33. Чигарев, А. В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Российский журнал биомеханики. — 2010. — Т. 15, № 1 (51). — С. 74–88.

34. Экзоскелет: конструкция, управление / Г. Е. Аведиков, С. И. Жмакин, В. С. Иб-

рагимов, А. В. Иванов, А. И. Кобрин, П. А. Комаров, А. А. Костенко, А. С. Кузнецов, Ю. Г. Мартыненко, А. В. Кузмичев, Э. К. Лавровский, И. Е. Митрофанов, Е. В. Письменная, А. М. Формальский // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. — М. : Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 84–90.

35. A Reliable Gait Phase Detection System / I. P. Pappas, M. R. Popovic, T. Keller, V. Dietz, M. Morari // IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering: a Publication of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. — 2001. — Vol. 9, № 2. — P. 113–125. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/7333.928571>

36. Alem, T. T. A Deep Learning Approach for Biped Robot Locomotion Interface Using a Single Inertial Sensor / T. T. Alem, J. H. Lee, Sh. Okamoto // Sensors. — 2023. — Vol. 23. — Article ID: 9841. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/s23249841>

37. Alterations in Surgical Decision Making in Patients with Cerebral Palsy Based on Three-Dimensional Gait Analysis / P. A. DeLuca, R. B. Davis, S. Ounpuu, S. Rose, R. Sirkin // Journal of Pediatric Orthopaedics. — 1997. — Vol. 17, iss. 5. — P. 608–614. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1097/00004694-199709000-00007>

38. Aoustin, Y. 3D Walking Biped: Optimal Swing of the Arms / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // Multibody System Dynamics. — 2014. — Vol. 32, № 1. — P. 55–66. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-013-9378-3>

39. Aoustin, Y. Modeling, Control and Simulation of Upward Jump of a Biped / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // Multibody System Dynamics. — 2013. — Vol. 29, № 4. — P. 425–445. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-012-9319-6>

40. Aoustin, Y. On Optimal Swinging of the Biped Arms / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). — Nice : IEEE, 2008. — P. 2922–2927. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/IROS.2008.4650725>

41. Aoustin, Y. Strategy to Lock the Knee of Exoskeleton Stance Leg: Study in the Framework of Ballistic Walking Model / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // Mechanisms and Machine Science. — 2016. — Vol. 39. — P. 179–195. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-30674-2_14

42. Aoustin, Y. Upward Jump of a Biped / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // International Journal of Humanoid Robotics. — 2013. — Vol. 10, № 4. — Article ID: 1350032. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219843613500321>

43. Aoustin, Y. Walking of Biped with Passive Exoskeleton: Evaluation of Energy Consumption / Y. Aoustin, A. M. Formalskii // Multibody System Dynamics. — 2018. — Vol. 43, № 1. — P. 71–96. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-017-9602-7>

44. Bae, H. Biped Robot State Estimation Using Compliant Inverted Pendulum Model / H. Bae, J.-H. Oh // Robotics and Autonomous Systems. — 2018. — Vol. 108. — P. 38–50. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2018.06.004>

45. Bashir, K. Gait Recognition Using Gait Entropy Image / K. Bashir, T. Xiang, S. Gong // Proceedings of 3rd International Conference on Imaging for Crime Detection and Prevention (ICDP 2009). — London : IET, 2010. — P. 1–6. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1049/ic.2009.0230>

46. Chambers, H. G. A Practical Guide to Gait Analysis / H. G. Chambers, D. H. Sutherland // The Journal of the American Academy of Orthopaedic Surgeons. — 2002. — Vol. 10, № 3. — P. 222–231. — DOI: <http://dx.doi.org/10.5435/00124635-200205000-00009>

47. Cho, J. Model Predictive Control of Running Biped Robot / J. Cho, J. H. Park // Applied Sciences. — 2022. — Vol. 12. — Article ID: 11183. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/app122111183>

48. Compliant Gait Control Method Based on CVSLIP-FF Model for Biped Robot Walking Over Uneven Terrain / Sicheng Xie, Xinyu Li, Shengyu Lu, Jingyuan Li, Chenghao Hu, Liang Gao // ISA Transactions. — January 2024. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2023.12.042>

49. Formalskii, A. M. Ballistic Walking Design Via Impulsive Control / A. M. Formalskii // Journal of Aerospace Engineering. — 2010. — Vol. 23, № 2. — P. 129–138. — DOI:

[http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000017](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000017)

50. Formalskii, A. M. Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects / A. M. Formalskii. — Berlin : Walter de Gruyter GmbH, 2015. — 250 p.

51. Formalskii, A. M. Stabilization of a Double Inverted Pendulum Installed on a Seesaw / A. M. Formalskii, P. A. Kruchinin, K. L. Voitsitskaya // *Mechanics of Solids*. — 2021. — Vol. 56, № 8. — P. 1599–1610. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654421080070>

52. Formalskii, A. M. Stabilization of Unstable Mechanical Systems / A. M. Formalskii // *Journal of Optimization Theory and Applications*. — 2010. — Vol. 144, № 2. — P. 227–253. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10957-009-9600-x>

53. Formalskii, A. M. Unstable Mechanical Objects: Motion Control, Stabilization / A. M. Formalskii // *Universal Journal of Mechanical Engineering*. — 2017. — Vol. 5, № 5. — P. 150–169. — DOI: <http://dx.doi.org/10.13189/ujme.2017.050503>

54. Gismelseed, S. A Biped Model to Predict a Wide Range of Gait and Posture Results / S. Gismelseed, A. Al Yahmedi, R. Zaier // *Franklin Open*. — May 2023. — Vol. 3. — Article ID: 100020. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.fraope.2023.100020>

55. Gugayev, K. V. A Model of Maintaining Balance by a Person on the Seesaw / K. V. Gugayev, P. A. Kruchinin, A. M. Formalskii // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — 2016. — Vol. 80, № 4. — P. 316–323. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.09.006>

56. Han, J. Individual Recognition Using Gait Energy Image / J. Han, B. Bhanu // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2006. — Vol. 28, № 2. — P. 316–322. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.2006.38>

57. Hicks, J. L. Modeling and Simulation of Normal and Pathological Gait / J. L. Hicks, M. H. Schwartz, S. L. Delp // *The Identification and Treatment of Gait Problems in Cerebral Palsy*. — London, UK : Mac Keith Press, 2009. — P. 285–307. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11832-010-0244-z>

58. Huan, T. T. Advanced Biped Gait Generator Using NARX-MLP Neural Model Optimized by Enhanced Evolutionary Algorithm / T. T. Huan, H. P. H. Anh // *Vietnam Journal of Mechanics*. — 2022. — Vol. 44, № 3. — P. 249–265. — DOI: <http://dx.doi.org/10.15625/0866-7136/17230>

59. Ivanov, A. V. Mathematical Modeling of Crutch Walking / A. V. Ivanov, A. M. Formalskii // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2015. — Vol. 54, № 2. — P. 315–329. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230715020082>

60. Klimina, L. A. On the Optimal Swinging of a Swing by a Person Standing on It / L. A. Klimina, A. M. Formalskii // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2022. — Vol. 61, № 6. — P. 944–953. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654421080070>

61. Klimina, L. A. Three-Link Mechanism as a Model of a Person on a Swing / L. A. Klimina, A. M. Formalskii // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2020. — Vol. 59, № 5. — P. 728–744. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230720050081>

62. Lee, L. Gait Analysis for Recognition and Classification / L. Lee, W. E. L. Grimson // *Proceedings of Fifth IEEE International Conference on Automatic Face Gesture Recognition*. — Washington, DC, USA : IEEE, 2002. — P. 155–162. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/AFGR.2002.1004148>

63. Leg Configuration Analysis and Prototype Design of Biped Robot Based on Spring Mass Model / J. Che, Y. Pan, W. Yan, J. Yu // *Actuators*. — 2022. — Vol. 11. — Article ID: 75. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/act11030075>

64. Martinez, F. Simulation of Normal and Pathological Gaits Using a Fusion Knowledge Strategy / F. Martinez, C. Cifuentes, E. Romero // *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. — 2013. — Vol. 10. — Article ID: 73. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1186/1743-0003-10-73>

65. Martynenko, Y. G. Controlled Pendulum on a Movable Base / Y. G. Martynenko, A. M. Formalskii // *Mechanics of Solids*. — 2013. — Vol. 48, № 1. — P. 6–18. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654413010020>

66. Martynenko, Y. G. Pendulum on a Movable Base / Y. G. Martynenko, A. M. Formalskii // *Doklady Mathematics*. — 2011. — Vol. 84, № 1. — P. 594–599. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064562411050115>
67. Methods of Increasing Service Minibots Functional Capabilities / A. Gorobtsov, A. Skorikov, P. Tarasov, A. Markov, A. Andreev // *Communications in Computer and Information Science*. — 2019. — Vol. 1084. — P. 191–202. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-29750-3_15
68. Neural Networks Trained via Reinforcement Learning Stabilize Walking of a Three-Dimensional Biped Model with Exoskeleton Applications / Ch. Liu, M. L. Adu, R. J. Triolo, R. D. Quinn // *Frontiers in Robotics and AI*. — 2021. — Vol. 8. — Article ID: 710999. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3389/frobt.2021.710999>
69. Optimal Greedy Control in Reinforcement Learning / A. S. Gorobtsov, O. A. Sychev, Yu. A. Orlova, E. A. Smirnov, O. E. Grigoryeva, A. M. Bochkin, M. I. Andreeva // *Sensors*. — 2022. — Vol. 22, № 22. — Article ID: 8920. — DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/s22228920>
70. Parallel Computing Technologies in the Stability Problem of Humanoid Robot Dynamic Modes / A. S. Gorobtsov, A. V. Skorikov, P. S. Tarasov, A. E. Andreev // *Parallel Computational Technologies (PCT'2021)*. — Chelyabinsk : South Ural State University Publ., 2021. — P. 50–54.
71. Parametric Optimization of Machine Designs Based on Mathematical Models of the Inverse Problem / A. S. Gorobtsov, A. V. Skorikov, P. S. Tarasov, A. E. Andreev // *Parallel Computational Technologies (PCT'2021)*. — Chelyabinsk : South Ural State University Publ., 2021. — P. 55–66.
72. Real-Time Footprint Planning and Model Predictive Control Based Method for Stable Biped Walking / S. Wang, S. Piao, X. Leng, Zh. He, X. Bai, L. Huazhong // *Computational Intelligence and Neuroscience*. — 2022. — Vol. 2022 (6). — Article ID: 4781747. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2022/4781747>
73. Ren, L. Computational Models to Synthesize Human Walking / L. Ren, D. Howard, L. Kenney // *Journal of Bionic Engineering*. — 2006. — Vol. 3, № 3. — P. 127–138. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S1672-6529\(06\)60016-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1672-6529(06)60016-4)
74. Ren, L. Predictive Modelling of Human Walking Over a Complete Gait Cycle / L. Ren, R. K. Jones, D. Howard // *Journal of Biomechanics*. — 2007. — Vol. 40, № 7. — P. 1567–1574. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2006.07.017>
75. Silhouette Analysis-Based Gait Recognition for Human Identification / L. Wang, T. Tan, H. Ning, W. Hu // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. — 2003. — Vol. 25, № 12. — P. 1505–1518. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.2003.1251144>
76. Sivolobov, S. V. Deep Neural Network Gait Recognition in Habitscopy Learning Process / S. V. Sivolobov // 2022 2nd International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE), IEEE Xplore. — 2022. — P. 58–61. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TELE55498.2022.9801064>
77. Sivolobov, S. V. Human Gait Feature Extraction Method / S. V. Sivolobov // *Procedia Computer Science*. — 2021. — Vol. 193. — P. 220–227. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.procs.2021.10.022>
78. Sivolobov, S. V. Human Gait Model Optimization for Person Identification / S. V. Sivolobov // 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), IEEE Xplore. — 2022. — P. 381–384. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SUMMA57301.2022.9973857>
79. Sivolobov, S. V. Human Gait Modeling Method / S. V. Sivolobov, A. V. Khoperskov, V. V. Bumagin // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. — 2020. — Vol. 823. — Article ID: 012024. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/828/1/012024>
80. Surer, E. Methods and Technologies for Gait Analysis / E. Surer, A. Kose // *Computer Analysis of Human Behavior*. — London : Springer, 2011. — P. 105–123. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-85729-994-9_5
81. The Control System Structure for the Stable Biped Robot Motion / A. S. Gorobtsov,

E. N. Ryzhov, A. E. Andreev, N. I. Kohtashvili, A. S. Polyanina // Communications in Computer and Information Science. — 2017. — Vol. 754. — P. 231–241. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-65551-2_17

82. Walking Stability of Biped Robot Based on Machine Learning Algorithm / J. Zhang, Y. Sun, Q. Jing, Y. Lu, N. Mi, X. Lian, Sh. Dong, J. Bian // Recent Advances in Materials and Manufacturing Technology. — Singapore: Springer, 2023. — P. 635–644. — DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-981-99-2921-4_58

83. Yadav, K. Model Analysis and Control of Biped Dynamic Walker with Fault Steps in a Gait Cycle / K. Yadav. — Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Mechanical Engineering Science. — Electronic text data. — Mode of access: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/09544062231214701>. — Title from screen. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1177/09544062231214701>

REFERENCES

1. Adashevskiy V.M. *Teoreticheskie osnovy mekhaniki biosistem* [Theoretical Basis of the Biosystems Mechanics]. Kharkov, NTU “KhPI” Publ., 2001. 258 p.

2. Gorobtsov A.S., Tarasov P.S., Skorikov A.V., Markov A.E., Terekhov S.E. Aktualnye zadachi upravleniya v dinamike svyazannykh sistem tel [Actual Control Problems in the Dynamics of Bodies Coupled Systems]. *XII Vserossiyskiy syezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [The 12th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Ufa, Bashkir State University Publ., 2019, pp. 451-452.

3. Austen Ya., Formalskiy A.M., Shevallro K. Virtualnyy chetyryokhnogiy robot: konstruktsiya, upravlenie, modelirovanie, eksperimenty [Virtual Quadruped: Mechanical Design, Control, Simulation, and Experimentation]. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2005, vol. 11, no. 8, pp. 1-28.

4. Borina A.P. Sistema upravleniya staticheskimi neustoychivymi shagayushchim apparatom [Control of Dynamic Biped Walking Robot]. *Vestnik IzhGTU im. M.T. Kalashnikova*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 4-12. DOI: <http://dx.doi.org/10.22213/2413-1172-2023-4-4-12>

5. Bulgakov V.G. Spetsifika polucheniya obraztsov dlya sravnitel'nogo issledovaniya dinamicheskikh priznakov cheloveka po materialam videozapisi [Specificity of Obtaining Samples for Comparative Examination of Dynamic Features of a Man on Video Materials]. *Vestnik Vladimirovskogo yuridicheskogo instituta*, 2010, no. 4 (17), pp. 64-67.

6. Bulgakov V.G., Bumagin V.V. Ekspertnyy programmnyy modul dlya issledovaniya dinamicheskikh priznakov khodby cheloveka [Expert Software for the Research of Dynamic Features of Human Walking]. *Sudebnaya ekspertiza* [Forensic Examination], 2011, no. 3 (27), pp. 36-46.

7. Voytitskaya K.L., Kruchinin P.A., Formalskiy A.M. O modeli tazobedrennoy strategii pri uderzhanii chelovekom ravnovesiya na kachelyakh «siso» [About the Hip Strategy Model When a Person Maintains Balance on a Seesaw]. *Biomekhanika-2020*. Perm, Perm. nats. issled. politekhn. un-t Publ., 2020, pp. 79-83.

8. Gorobtsov A.S. Glava 13. Novye mekhanizmy dvunogikh i mnogonogikh shagayushchikh robotov [Chapter 13. New Mechanisms of Bipedal and Multi-Legged Walking Robots]. *Novye mekhanizmy v sovremennoy robototekhnike* [New Mechanisms in Modern Robotics]. Moscow, Technosphaera Publ., 2018, pp. 295-315.

9. Gorobtsov A.S. Lokomotsiya robota-androida v kvazistaticheskikh rezhimakh [Locomotion of the Robot Android in the Quasistatic Modes]. *Vibratsionnye tekhnologii, mekhatronika i upravlyаемые mashiny* [Vibration Technologies, Mechatronics and Cars]. Kursk, Yugo-Zapad. gos. un-t Publ., 2016, pp. 135-137.

10. Gorobtsov A.S., Mokhov A.A., Ostrovskiy A.A. Teoreticheskaya i eksperimentalnaya otrabotka metodov upravleniya shaganiem robota-androida AR-600 [Theoretical and Experimental Development of Methods for Locomotion Controlling of the AR-600 Android Robot]. *XI Vserossiyskiy syezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy*

mekhaniki [The 12th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan, Kazan. (Privolzh.) feder. un-t Publ., 2015, pp. 1021-1023.

11. Gorobtsov A.S. Obobshchennaya zadacha dinamicheskogo uravnoveshivaniya i perspektivnye napravleniya ee primeneniya [Dynamic Balance Generalized Problem and the Promising Areas of Its Application]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 3 (756), pp. 14-24. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-3-14-24>

12. Gugaev K.V., Kruchinin P.A., Formalskiy A.M. O modelirovanii uderzhaniya chelovekom ravnovesiya na podvizhnoy opore v vide press-pape [About the Modelling of Maintaining Balance by a Person on the Seesaw]. *XI Vserossiyskiy syezhd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [The 12th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan, Kazan. (Privolzh.) feder. un-t Publ., 2015, pp. 1095-1097.

13. Ivanov A.V., Formalskiy A.M. Modelirovanie khodby cheloveka s kostilyami [Modeling of Crutch Walking]. *XI Vserossiyskiy syezhd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan, Kazan. (Privolzh.) feder. un-t Publ., 2015, pp. 1545-1547.

14. Gorobtsov A.S., Chigirinskaya N.V., Andreeva M.I., Smirnov E.A., Bochkin A.M. Issledovanie upravlyаемого dvizheniya shagayushchikh robotov metodami kompyuternogo modelirovaniya dinamiki svyazannykh sistem tel [Studying of Controlled Movement of Stepping Robots by Methods of Computer Simulation of the Dynamics of Related Body Systems]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern High Technologies], 2019, no. 12-2, pp. 282-286. DOI: <http://dx.doi.org/10.17513/snt.37872>

15. Gorobtsov A.S., Tarasov P.S., Markov A.E., Dianskiy A.V. Kvazioptimalnoe upravlenie dvizheniem robotov kak «greedy» upravlenie v mashinnom obuchenii [Quasi-Optimal Robot Motion Control as “Greedy” Control in Machine Learning]. *Robototekhnika i iskusstvennyy intellekt* [Robotics and Artificial Intelligence]. Krasnoyarsk, LITERA-print Publ., 2022, pp. 5-8.

16. Klimina L.A., Formalskiy A.M. Upravlenie raskachivaniem kacheley [Control to Pump a Swing]. *Ustoychivost i kolebaniya nelineynykh sistem upravleniya (konferentsiya Pyatnitskogo)* [Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitsky conference)]. Moscow, In-t problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN Publ., 2022, pp. 238-241.

17. Kolesnikova G.P., Formalskiy A.M. Ob odnom sposobe modelirovaniya pokhodki cheloveka [A Way of Human Gait Modeling]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2014, no. 1 (25), article ID: 11.

18. Merkur'yev I.V., Saypulaev G.R. Razrabotka matematicheskoy modeli robototekhnicheskogo kompleksa dlya nerazrushayushchego kontrolya stalnykh trosov [Development of a Mathematical Model of a Robotic Complex for Non-Destructive Testing of Steel Cables]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 1, pp. 49-58. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.1.4>

19. Gorobtsov A.S., Skorikov A.V., Tarasov P.S., Markov A.E., Dianskiy A.V. Metod sinteza programmnogo dvizheniya robotov s uchetom zadannykh ogranicheniy reaktsiy v svyazyakh [Method of Synthesis of Robots Programmed Motion Taking Into Account Constrained Reactions in Links]. *Robototekhnika i iskusstvennyy intellekt* [Robotics and Artificial Intelligence]. Krasnoyarsk, LITERA-print Publ., 2021, pp. 199-202.

20. Ovchinnikov I.A., Kovalenko P.P., Vu T.M. Modelirovanie pokhodki cheloveka v srede MatLab/Simulink [Human Gait Modeling in MatLab/Simulink]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [Journal of Instrument Engineering], 2016, vol. 59, no. 8, pp. 690-694.

21. Gorobtsov A.S., Andreev A.E., Markov A.E., Skorikov A.V., Tarasov P.S. Osobennosti resheniya uravneniy metoda obratnoy zadachi dlya sinteza ustoychivogo upravlyаемого dvizheniya shagayushchikh robotov [Features of Solving the Inverse Dynamic Method Equations for the Synthesis of Stable Walking Robots Controlled Motion]. *Tr. SPIIRAN* [SPIIRAS

Proceedings], 2019, vol. 18, no. 1, pp. 85-122. DOI: <http://dx.doi.org/10.15622/sp.18.1.85-122>

22. Popov G.I., Samsonova A.V. *Biomekhanika dvigatel'noy deyatel'nosti* [Biomechanics of Motion Activity]. Moscow, Academia Publ., 2011. 320 p.

23. Gorobtsov A.S., Markov A.E., Tarasov P.S., Skorikov A.V., Dianskiy A.V., Stepanenko D.A. Programmno-apparatnyy kompleks dlya sozdaniya i issledovaniya sistem upravleniya lokomotsiyey i avtonomnym dvizheniem mobilnykh robotov [Hardware and Software Complex for Creation and Research of Locomotion and Autonomous Motion Control Systems for Mobile Robots]. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Izvestia VSTU], 2021, no. 9 (256), pp. 21-25. DOI: <http://dx.doi.org/10.35211/1990-5297-2021-9-256-21-25>

24. Gorobtsov A.S., Skorikov A.V., Tarasov P.S., Chesnokov O.K. Robot s kombinirovannym kolesno-shagayushchim dvizhitelem [Robot with Combined Wheel-Stepping Mover]. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Izvestia VSTU], 2020, no. 9 (244), pp. 26-30. DOI: <http://dx.doi.org/10.35211/1990-5297-2020-9-244-26-30>

25. Gorobtsov A.S., Andreev A.E., Mokhov A.S., Tarasov P.S. Sintez lokomotsii shaganiya antropomorf'nogo robota [Synthesis of Locomotion Stepping an Anthropomorphic Robotic Systems]. *Robototekhnika i iskusstvennyy intellekt* [Robotics and Artificial Intelligence]. Krasnoyarsk, Sib. feder. un-t Publ., 2016, pp. 8-12.

26. Gorobtsov A.S., Mokhov A.D., Mokhova O.G., Ostrovskiy A.A. Sintez upravleniya robotom-androidom v staticheski neustoychivykh rezhimakh [Synthesis of Control Movement of Robot-Android in Statically Unstable Modes]. *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie* [Control Theory and Mathematical Modelling]. Izhevsk, Udmurt. gos. un-t Publ., 2015, pp. 156-157.

27. Gorobtsov A.S., Andreev A.E., Tarasov P.S., Skorikov A.V., Kartsov S.K. Sintez ustoychivykh kvazistaticheskikh rezhimov shaganiya antropomorf'nogo robota [Synthesis of Stable Quasistatic Stepping Modes of Anthropomorphic Robot]. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Izvestia VSTU], 2016, no. 6 (185), pp. 75-76.

28. Sokolova A.I., Konushin A.S. Metody identifikatsii cheloveka po pokhodke v video [Methods for Identifying a Person by Gait in a Video]. *Trudy instituta sistemnogo programmirovaniya RAN* [Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS], 2019, vol. 31, no. 1, pp. 69-82. DOI: [http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31\(1\)-5](http://dx.doi.org/10.15514/ISPRAS-2019-31(1)-5)

29. Gorobtsov A.S., Andreev A.E., Skorikov A.V., Tarasov P.S. Upravlenie lokomotsiyey antropomorf'nogo robota v kvazistaticheskom rezhime [Synthesis of Locomotion Stepping an Anthropomorphic Robotic Systems]. *Robototekhnika i iskusstvennyy intellekt* [Robotics and Artificial Intelligence]. Krasnoyarsk, Sib. feder. un-t Publ., 2016, pp. 24-28.

30. Formalskiy A.M., Klimina L.A. Matematicheskoe modelirovanie povedeniya cheloveka na kachelyakh [Mathematical Modeling of Human Movements on a Swing]. *XII Vserossiyskiy syezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [The 12th All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Ufa, Bashkir State University Publ., 2019, pp. 407-409.

31. Formalskiy A.M. *Peremeshchenie antropomorfnykh mekhanizmov* [Locomotion of Anthropomorphic Mechanisms]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 368 p.

32. Formalskiy A.M. *Upravlenie dvizheniem neustoychivykh obyektov* [Motion Control of Unstable Objects]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 232 p.

33. Chigarev A.V., Borisov A.V. Modelirovanie upravlyаемого dvizheniya dvnugogo antropomorf'nogo mekhanizma [Modeling the Controlled Movement of a Bipedal Anthropomorphic Mechanism]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics], 2010, vol. 15, no. 1 (51), pp. 74-88.

34. Avedikov G.E., Zhmakin S.I., Ibragimov V.S., Ivanov A.V., Kobrin A.I., Komarov P.A., Kostenko A.A., Kuznetsov A.S., Martynenko Yu.G., Kuzmichev A.V., Lavrovskiy E.K., Mitrofanov I.E., Pismennaya E.V., Formalskiy A.M. Ekzoskelet: konstruktsiya, upravlenie [Exoskeleton: Design and Control]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014* [The 12th All-Russian Congress on Control Problems RCCP-2014]. Moscow, In-t

problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN Publ., 2014, pp. 84-90.

35. Pappas I.P., Popovic M.R., Keller T., Dietz V., Morari M. A Reliable Gait Phase Detection System. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering: a Publication of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2001, vol. 9, no. 2, pp. 113-125. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/7333.928571>

36. Alem T.T., Lee J.H., Okamoto Sh. A Deep Learning Approach for Biped Robot Locomotion Interface Using a Single Inertial Sensor. *Sensors*, 2023, vol. 23, article ID: 9841. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/s23249841>

37. DeLuca P.A., Davis R.B., Ounpuu S., Rose S., Sirkin R. Alterations in Surgical Decision Making in Patients with Cerebral Palsy Based on Three-Dimensional Gait Analysis. *Journal of Pediatric Orthopaedics*, 1997, vol. 17, iss. 5, pp. 608-614. DOI: <http://dx.doi.org/10.1097/00004694-199709000-00007>

38. Aoustin Y., Formalskii A.M. 3D Walking Biped: Optimal Swing of the Arms. *Multibody System Dynamics*, 2014, vol. 32, no. 1, pp. 55-66. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-013-9378-3>

39. Aoustin Y., Formalskii A.M. Modeling, Control and Simulation of Upward Jump of a Biped. *Multibody System Dynamics*, 2013, vol. 29, no. 4, pp. 425-445. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-012-9319-6>

40. Aoustin Y., Formalskii A.M. On Optimal Swinging of the Biped Arms. *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Nice, IEEE, 2008, pp. 2922-2927. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/IROS.2008.4650725>

41. Aoustin Y., Formalskii A.M. Strategy to Lock the Knee of Exoskeleton Stance Leg: Study in the Framework of Ballistic Walking Model. *Mechanisms and Machine Science*, 2016, vol. 39, pp. 179-195. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-30674-2_14

42. Aoustin Y., Formalskii A.M. Upward Jump of a Biped. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2013, vol. 10, no. 4, article ID: 1350032. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219843613500321>

43. Aoustin Y., Formalskii A.M. Walking of Biped with Passive Exoskeleton: Evaluation of Energy Consumption. *Multibody System Dynamics*, 2018, vol. 43, no. 1, pp. 71-96. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11044-017-9602-7>

44. Bae H., Oh J.-H. Biped Robot State Estimation Using Compliant Inverted Pendulum Model. *Robotics and Autonomous Systems*, 2018, vol. 108, pp. 38-50. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2018.06.004>

45. Bashir K., Xiang T., Gong S. Gait Recognition Using Gait Entropy Image. *Proceedings of 3rd International Conference on Imaging for Crime Detection and Prevention (ICDP 2009)*. London, IET, 2010, pp. 1-6. DOI: <http://dx.doi.org/10.1049/ic.2009.0230>

46. Chambers H.G., Sutherland D.H. A Practical Guide to Gait Analysis. *The Journal of the American Academy of Orthopaedic Surgeons*, 2002, vol. 10, no. 3, pp. 222-231. DOI: <http://dx.doi.org/10.5435/00124635-200205000-00009>

47. Cho J., Park J.H. Model Predictive Control of Running Biped Robot. *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, article ID: 11183. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/app122111183>

48. Xie Sicheng, Li Xinyu, Lu Shengyu, Li Jingyuan, Hu Chenghao, Gao Liang Compliant Gait Control Method Based on CVSLIP-FF Model for Biped Robot Walking Over Uneven Terrain. *ISA Transactions*, January 2024 DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2023.12.042>

49. Formalskii A.M. Ballistic Walking Design Via Impulsive Control. *Journal of Aerospace Engineering*, 2010, vol. 23, no. 2, pp. 129-138. DOI: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0000017](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000017)

50. Formalskii A.M. *Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects*. Berlin, Walter de Gruyter GmbH, 2015. 250 p.

51. Formalskii A.M., Kruchinin P.A., Voitsitskaya K.L. Stabilization of a Double Inverted Pendulum Installed on a Seesaw. *Mechanics of Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1599-1610. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654421080070>

52. Formalskii A.M. Stabilization of Unstable Mechanical Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, vol. 144, no. 2, pp. 227-253. DOI:

<http://dx.doi.org/10.1007/s10957-009-9600-x>

53. Formalskii A.M. Unstable Mechanical Objects: Motion Control, Stabilization. *Universal Journal of Mechanical Engineering*, 2017, vol. 5, no. 5, pp. 150-169. DOI: <http://dx.doi.org/10.13189/ujme.2017.050503>

54. Gismelseed S., Al Yahmedi A., Zaier R. A Biped Model to Predict a Wide Range of Gait and Posture Results. *Franklin Open*, May 2023, vol. 3, article ID: 100020. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.fraope.2023.100020>

55. Gugayev K.V., Kruchinin P.A., Formalskii A.M. A Model of Maintaining Balance by a Person on the Seesaw. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, no. 4, pp. 316-323. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.09.006>

56. Han J., Bhanu B. Individual Recognition Using Gait Energy Image. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, vol. 28, no. 2, pp. 316-322. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.2006.38>

57. Hicks J.L., Schwartz M.H., Delp S.L. Modeling and Simulation of Normal and Pathological Gait. *The Identification and Treatment of Gait Problems in Cerebral Palsy*. London, UK, Mac Keith Press, 2009, pp. 285-307. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11832-010-0244-z>

58. Huan T.T., Anh H.P.H. Advanced Biped Gait Generator Using NARX-MLP Neural Model Optimized by Enhanced Evolutionary Algorithm. *Vietnam Journal of Mechanics*, 2022, vol. 44, no. 3, pp. 249-265. DOI: <http://dx.doi.org/10.15625/0866-7136/17230>

59. Ivanov A.V., Formalskii A.M. Mathematical Modeling of Crutch Walking. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 2, pp. 315-329. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230715020082>

60. Klimina L.A., Formalskii A.M. On the Optimal Swinging of a Swing by a Person Standing on It. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2022, vol. 61, no. 6, pp. 944-953. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654421080070>

61. Klimina L.A., Formalskii A.M. Three-Link Mechanism as a Model of a Person on a Swing. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, no. 5, pp. 728-744. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230720050081>

62. Lee L., Grimson W.E.L. Gait Analysis for Recognition and Classification. *Proceedings of Fifth IEEE International Conference on Automatic Face Gesture Recognition*. Washington, DC, USA, IEEE, 2002, pp. 155-162. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/AFGR.2002.1004148>

63. Che J., Pan Y., Yan W., Yu J. Leg Configuration Analysis and Prototype Design of Biped Robot Based on Spring Mass Model. *Actuators*, 2022, vol. 11, article ID: 75. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/act11030075>

64. Martinez F., Cifuentes C., Romero E. Simulation of Normal and Pathological Gaits Using a Fusion Knowledge Strategy. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 2013, vol. 10, article ID: 73. DOI: <http://dx.doi.org/10.1186/1743-0003-10-73>

65. Martynenko Y.G., Formalskii A.M. Controlled Pendulum on a Movable Base. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 6-18. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654413010020>

66. Martynenko Y.G., Formalskii A.M. Pendulum on a Movable Base. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 594-599. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064562411050115>

67. Gorobtsov A., Skorikov A., Tarasov P., Markov A., Andreev A. Methods of Increasing Service Minibots Functional Capabilities. *Communications in Computer and Information Science*, 2019, vol. 1084, pp. 191-202. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-29750-3_15

68. Liu Ch., Audu M.L., Triolo R.J., Quinn R.D. Neural Networks Trained Via Reinforcement Learning Stabilize Walking of a Three-Dimensional Biped Model with Exoskeleton Applications. *Frontiers in Robotics and AI*, 2021, vol. 8, article ID: 710999. DOI: <http://dx.doi.org/10.3389/frobt.2021.710999>

69. Gorobtsov A.S., Sychev O.A., Orlova Yu.A., Smirnov E.A., Grigoryeva O.E., Bochkin A.M., Andreeva M.I. Optimal Greedy Control in Reinforcement Learning. *Sensors*, 2022, vol. 22, no. 22, article ID: 8920. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/s22228920>

70. Gorobtsov A.S., Skorikov A.V., Tarasov P.S., Andreev A.E. Parallel Computing

Technologies in the Stability Problem of Humanoid Robot Dynamic Modes. *Parallel Computational Technologies (PCT'2021)*. Chelyabinsk, South Ural State University Publ., 2021, pp. 50-54.

71. Gorobtsov A.S., Skorikov A.V., Tarasov P.S., Andreev A.E. Parametric Optimization of Machine Designs Based on Mathematical Models of the Inverse Problem. *Parallel Computational Technologies (PCT'2021)*. Chelyabinsk, South Ural State University Publ., 2021, pp. 55-66.

72. Wang S., Piao S., Leng X., He Zh., Bai X., Huazhong L. Real-Time Footprint Planning and Model Predictive Control Based Method for Stable Biped Walking. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2022, vol. 2022 (6), article ID: 4781747. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2022/4781747>

73. Ren L., Howard D., Kenney L. Computational Models to Synthesize Human Walking. *Journal of Bionic Engineering*, 2006, vol. 3, no. 3, pp. 127-138. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S1672-6529\(06\)60016-4](http://dx.doi.org/10.1016/S1672-6529(06)60016-4)

74. Ren L., Jones R.K., Howard D. Predictive Modelling of Human Walking Over a Complete Gait Cycle. *Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 40, no. 7, pp. 1567-1574. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2006.07.017>

75. Wang L., Tan T., Ning H., Hu W. Silhouette Analysis-Based Gait Recognition for Human Identification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, vol. 25, no. 12, pp. 1505-1518. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.2003.1251144>

76. Sivolobov S.V. Deep Neural Network Gait Recognition in Habitoscapy Learning Process. *2022 2nd International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE), IEEE Xplore*, 2022, pp. 58-61. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TELE55498.2022.9801064>

77. Sivolobov S.V. Human Gait Feature Extraction Method. *Procedia Computer Science*, 2021, vol. 193, pp. 220-227. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.procs.2021.10.022>

78. Sivolobov S.V. Human Gait Model Optimization for Person Identification. *2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), IEEE Xplore*, 2022, pp. 381-384. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/SUMMA57301.2022.9973857>

79. Sivolobov S.V., Khoperskov A.V., Bumagin V.V. Human Gait Modeling Method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 823, article ID: 012024. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/828/1/012024>

80. Surer E., Kose A. Methods and Technologies for Gait Analysis. *Computer Analysis of Human Behavior*. London, Springer, 2011, pp. 105-123. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-0-85729-994-9_5

81. Gorobtsov A.S., Ryzhov E.N., Andreev A.E., Kohtashvili N.I., Polyanina A.S. The Control System Structure for the Stable Biped Robot Motion. *Communications in Computer and Information Science*, 2017, vol. 754, pp. 231-241. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-65551-2_17

82. Zhang J., Sun Y., Jing Q., Lu Y., Mi N., Lian X., Dong Sh., Bian J. Walking Stability of Biped Robot Based on Machine Learning Algorithm. *Recent Advances in Materials and Manufacturing Technology*. Singapore, Springer, 2023, pp. 635-644. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-981-99-2921-4_58

83. Yadav K. Model Analysis and Control of Biped Dynamic Walker with Fault Steps in a Gait Cycle. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Mechanical Engineering Science*. URL: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/09544062231214701>. DOI: <http://dx.doi.org/10.1177/09544062231214701>

**MATHEMATICAL MODELING OF HUMAN GAIT
BASED ON A FIVE-LINK ANTHROPOMORPHIC MECHANISM
USING OPTIMIZATION METHODS**

Sergey V. Sivolobov

Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Modeling,
Volgograd State University
sivolobov@volsu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-4007-3047>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The problem of human gait modeling is considered. A flat anthropomorphic mechanism with five weighty links describing person's legs and body is used to describe human locomotion. The hands movements are not considered. The control is impulse, and the mechanism moves along a ballistic trajectory from the beginning to the end of the interval. A single-support motion with ground linked support leg is described by the model. The five generalized coordinates that describe the angles deviation in a joints from the vertical characterize the mechanism position. To model a real gait, when calculating the initial angular velocities vector, it is proposed to minimize the residual that guarantees the mechanism passage through all points of a given trajectory. Also, mass-inertial characteristics determine the anthropomorphic mechanism, but the modeled person's exact values are unknown. To improve the modeling accuracy, it is proposed to calculate the values of these quantities by minimization. With constrained minimization the average deviation from real angles is 7.25° . With unconstrained minimization the average error is 3.3° , but the mass-inertial characteristics may take incorrect values.

Key words: gait modeling, human motion modeling, anthropomorphic mechanism, single-limb support model, optimization.