DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.5

УДК 514.8
ББК 22.162

Дата поступления статьи: 06.08.2024
Дата принятия статьи: 23.08.2024

О ФУНКЦИОНАЛЕ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Евгений Александрович Щербаков

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций,
Кубанский государственный университет
echt@math.kubsu.ru
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Михаил Евгеньевич Щербаков

Преподаватель кафедры функционального анализа и алгебры,
Кубанский государственный университет
latiner@mail.ru
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Аннотация. В работе устанавливается вид функционала гауссовой кривизны, определенного на классе бесконечно дифференцируемых горизонтальных поверхностей положительной гауссовой кривизны. Относительно таких поверхностей предполагается, что они допускают глобальную полугеодезическую параметризацию. В работе доказывается, что первая вариация функционала на классе вариаций допустимых поверхностей, у которых возможны связи между коэффициентами первой квадратичной формы и их геодезическими линиями, аналогичные осесимметричному случаю, определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Ключевые слова: гауссова кривизна, функционал гауссовой кривизны, глобальная полугеодезическая параметризация, квазиконформные отображения, уравнение Монжа — Ампера, геодезическая линия, уравнение средней кривизны.

1. Постановка задачи

В работе Р. Финна [5] развита глубокая математическая теория равновесных поверхностей, разделяющих две различные среды двухфазной системы, например, жидкость — газ. Основным предметом изучения в ней является уравнение Лапласа средней кривизны

$$2\sigma H = P_1 - P_2, \tag{1}$$

полученное Гауссом с помощью вариационного принципа, основанного в частности на том, что первая вариация площади поверхности с естественными предположениями относительно ее гладкости определяется ее средней кривизной H.

Уравнение (1) означает, что в состоянии равновесия двухфазной системы силы давления P_1, P_2 уравновешиваются поверхностными силами, величина которых пропорциональна площади поверхности.

Описанная модель активно использовалась [6] для изучения физических и технологических процессов. Однако последние исследования в этом направлении указывают на то, что уравнение Лапласа средней кривизны перестает быть адекватным моделируемым им процессам в том случае, когда одна из главных кривизн поверхности раздела становится большой.

Анализ этой ситуации приводит к выводу о необходимости включения в рассмотрение промежуточного слоя, разделяющего фазы и состоящего из молекул обеих фаз. На необходимость рассмотрения такого слоя в свое время указывал Максвелл [7]. В работе [2] — что роль поверхности раздела в новой ситуации играет поверхность, средняя и гауссова кривизны которой удовлетворяют уравнению

$$2\sigma H + \theta K = \lambda, \tag{2}$$

где σ, θ, λ — некоторые константы, а H, K — средняя и гауссова кривизны поверхности.

Ясно, что при наличии функционала, заданного на определенном классе поверхностей, первая вариация которого на каждой из них определялась бы их гауссовой кривизной, естественно было бы, как и при выводе уравнения Лапласа, воспользоваться вариационным методом для вывода уравнения (2).

В работах [3] установлен вид функционала гауссовой кривизны, определенного на дважды непрерывно дифференцируемых поверхностях. В них были выведены дифференциальные уравнения для плотности функционала гауссовой кривизны интегрального типа. В работе [9] функционал гауссовой кривизны рассматривается на осесимметричных поверхностях, образующие которых обладают обобщенными производными второго порядка, интегрируемых с квадратом с весом.

Ключевую роль при выводе дифференциальных уравнений для плотностей функционалов сыграло то обстоятельство, что образующие линии осесимметричных поверхностей являются их геодезическими линиями. Поэтому вариация поверхности определяет вариацию их геодезических линий.

Из изложенного следует, что функционал гауссовой кривизны может быть определен и для поверхностей, допускающих определенные связи между геодезическими линиями основной и провариированной поверхностями, а также между коэффициентами их первых квадратичных форм, записанных в полугеодезических координатах.

В следующем разделе будет построен функционал в классе поверхностей положительной гауссовой кривизны, а также семейство вариаций для каждой допустимой поверхности, на котором первая вариация этого функционала определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

2. Построение функционала и вариаций допустимых поверхностей

2.1. Класс допустимых поверхностей

В дальнейшем нами будут рассматриваться так называемые горизонтальные поверхности, представимые в виде

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in S = \left\{x^2+y^2 \leqslant 1\right\}, \quad z \geqslant 0.$$

Для простоты будем считать функции $z = z(x,y)$ бесконечно дифференцируемыми положительными внутри S, непрерывными в S и равными нулю на границе.

Мы также будем считать, что допустимые поверхности обладают глобальной полугеодезической параметризацией и представляют собой дизъюнктные объединения их геодезических линий, параметрические представления которых заполняют выпуклую область Ω,

$$\Omega = \bigcup_{t \in pr_\tau \Omega} \Omega_t, \quad \Omega_t = \{s + i\tau \in \Omega \,|\, \tau = t\}.$$

Кроме того, требуется, чтобы первая квадратичная форма

$$ds^2 + G(w)\,d\tau^2, \quad w = s + i\tau \tag{3}$$

поверхности была бы положительно определенной и выполнялось условие

$$\left|\grave{\sqrt{G}}(s,\tau)\right| \leqslant 1, \quad \grave{\sqrt{G}}(s,\tau) = \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial s}(s,\tau), \quad w = s + i\tau \in \Omega.$$

Теорема 2.1.1. Семейство допустимых поверхностей не пусто.

Доказательство. Пусть Ω — произвольная конечная выпуклая область с бесконечно дифференцируемой границей $G : \Omega \to R$ — бесконечно дифференцируемая функция, ограниченная снизу положительной константой.

Рассмотрим квазиконформное отображение $\zeta = \zeta(w)$ области Ω на круг $\{|\varsigma| < 1\}$, являющееся решением уравнения

$$\zeta_{\bar{w}} = \frac{1-\sqrt{G(w)}}{1+\sqrt{G(w)}}\zeta_w, \quad w = s + i\tau.$$

Пусть

$$\Lambda(\varsigma) = \frac{\sqrt{G(w(\varsigma))}}{J_\varsigma(w(\varsigma))}, \quad \varsigma = x + iy.$$

Здесь J_ζ — якобиан отображения $\zeta = \zeta(w)$. Известно [1], что с помощью отображения $\zeta = \zeta(w)$ квадратичная форма

$$\Lambda(\varsigma)\left(dx^2 + dy^2\right)$$

приводится к виду (3).

Решая задачу Дирихле для уравнения Монжа — Ампера [4; 8], построим поверхность

$$\sigma = \sigma\,(s, \tau)\,,$$

первая квадратичная форма которой имеет вид (3).

Теорема доказана.

Замечание. Части осесимметричных поверхностей, расположенные по одну сторону от экваториальной плоскости, дают простые примеры допустимых поверхностей.

2.2. Функционал гауссовой кривизны, вариации допустимых поверхностей

На классе допустимых поверхностей рассмотрим функционал вида

$$K(S) = \iint\limits_{\Omega} f\left(\sqrt{\grave{G}}\right)\sqrt{G}\, ds\, d\tau. \tag{4}$$

Функционал (4), определенный с помощью полугеодезической параметризации, имеет физический смысл энергии, необходимой для формирования промежуточного слоя.

Относительно функции $f : [-1, 1] \to R$, $f = f(\theta)$ предположим, что она является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2}\sqrt{(1-\theta^2)} - \frac{df}{d\theta}\frac{\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)}} + f\frac{1}{\sqrt{(1-\theta^2)}} = -1.$$

В качестве решения мы можем выбрать, например, функцию

$$f\,(\theta) = \frac{\sqrt{(1-\theta^2)}}{2}\left\{E_0 - \int\limits_0^{\theta}\left(\arcsin\sigma + \sigma\sqrt{(1-\sigma^2)} - \frac{\pi}{2}\right)\left(1-\sigma^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\sigma\right\}.$$

Покажем теперь, что существуют согласованные вариации первой квадратичной формы допустимой поверхности и ее геодезических линий, определяющих новую допустимую поверхность, такие что первая вариация функционала (4) определяется гауссовой кривизной варьируемой поверхности.

Теорема 2.2.1. Пусть S_ε — поверхность, первая квадратичная форма которой в полугеодезических координатах (s_ε, τ),

$$s_\varepsilon = s + \varepsilon\int\limits_0^{s} f\left(\grave{\sqrt{G_\varepsilon\,(s_\varepsilon, \tau)}}\right)\grave{\lambda}\,(u, \tau)\; du + \circ\,(\varepsilon)\,, \quad \varepsilon \to 0$$

определяется функцией G_ε,

$$\sqrt{G_\varepsilon\,(s_\varepsilon, \tau)} = \sqrt{G\,(s, \tau)} + \varepsilon\lambda\,(s, \tau) + \circ\,(\varepsilon)\,, \quad \varepsilon \to 0.$$

Здесь $\lambda = \lambda\,(s, \tau)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой находится в окрестности произвольной фиксированной точки варьируемой допустимой поверхности S с полугеодезическими координатами (s, τ) и первой квадратичной формой, определяемой функцией $G\,(s, \tau)$.

Тогда

$$K\left(S_{\varepsilon}\right)-K\left(S\right)=\varepsilon\iint\limits_{S}K\left(P\right)dS+\circ\left(\varepsilon\right),\quad \varepsilon\to 0. \tag{5}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя

$$\sqrt{\grave{G}_{\varepsilon}\left(s_{\varepsilon},\tau\right)}ds_{\varepsilon},\quad f\left(\sqrt{\grave{G}_{\varepsilon}\left(s_{\varepsilon},\tau\right)}\right),\quad f\left(\sqrt{\grave{G}_{\varepsilon}\left(s_{\varepsilon},\tau\right)}\right)-f\left(\sqrt{\grave{G}}\right),$$

получим

$$f\left(\sqrt{\grave{G}_{\varepsilon}\left(s_{\varepsilon},\tau\right)}\right)ds_{\varepsilon}-f\left(\sqrt{\grave{G}}\right)ds=$$
$$=\left\{\varepsilon f_{\theta}\left(\sqrt{\grave{G}}\right)\left[1-\left(\sqrt{\grave{G}}\right)^{2}\right]\grave{\lambda}+f\left(\sqrt{\grave{G}}\right)\sqrt{\grave{G}}\grave{\lambda}\right\}ds+\circ\left(\varepsilon\right),\quad \varepsilon\to 0. \tag{6}$$

Интегрируя по частям (5) по области Ω, получим (6).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 509 с.

2. Коровкин, В. П. Анализ связи капиллярного и расклинивающего давления / В. П. Коровкин, Г. В. Секриеру, Ф. М. Сажин // Математические исследования. — 1989. — Т. 108. — С. 27–32.

3. Щербаков, М. Е. О союзном функционале гауссовой кривизны и равновесных формах жидких капель / М. Е. Щербаков // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2019. — Т. 16, № 1. — С. 6–12. — DOI: 10.31429/vestnik-16-1-6-12

4. Figalli, A. The Monge-Ampère Equation and Its Applications / A. Figalli. — Zürich : EMS Press, 2017. — 200 p. — DOI: 10.4171/170

5. Finn, R. Equilibrium Capillary Surfaces / R. Finn. — New York : Springer, 1986. — 310 p.

6. Klyachin, A. A. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium Capillary Surface / A. A. Klyachin, V. A. Klyachin, E. G. Grigorieva // Scientific Visualization. — 2016. — Vol. 8, № 2. — P. 37–52.

7. Maxwell, J. C. Capillary Action / J. C. Maxwell, J. W. Strutt // Encyclopedia Britannica. — New York, 1876. — Vol. 8. — P. 56–71.

8. Nirenberg, L. Lectures on Differential Equations and Differential Geometry / L. Nirenberg. — Beijing : Higher Education Press, 2018. — 174 p.

9. Shcherbakov, E. A. Equilibrium State of a Pending Drop with Inter-Phase Layer / E. A. Shcherbakov // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 2012. — Vol. 31. — P. 1–15.

10. Shcherbakov, E. A. On Equilibrium of the Pendant Drop Taking into Account the Flexural Rigidity of Intermediate Layer / E. A. Shcherbakov, M. E. Shcherbakov // Doklady Physics. — 2012. — Vol. 53, № 6. — P. 243–244.

REFERENCES

1. Vekua I.N. *Obobshchyonnye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 509 p.

2. Korovkin V.P., Sekrieru G.V., Sazhin F.M. Analiz svyazi kapillyarnogo i rasklinivayushchego davleniya [Analysis of the Relationship Between Capillary and Disjoining Pressure]. *Matematicheskie issledovaniya* [Mathematical Research], 1989, vol. 108, pp. 27-32.

3. Shcherbakov M.E. O soyuznom funktsionale gaussovoy krivizny i ravnovesnykh formakh zhidkikh kapel [Conjugate Functional of Gauss Curvature and Equilibrium Forms of Liquid Drop]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2019, vol. 16, no. 1, pp. 6-12. DOI: 10.31429/vestnik-16-1-6-12

4. Figalli A. *The Monge-Ampère Equation and Its Applications*. Zürich, EMS Press, 2017. 200 p. DOI: 10.4171/170

5. Finn R. *Equilibrium Capillary Surfaces*. New York, Springer, 1986. 310 p.

6. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigorieva E.G. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium Capillary Surface. *Scientific Visualization*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 37-52.

7. Maxwell J.C., Strutt J.W. Capillary Action. *Encyclopedia Britannica*. New York, 1876, vol. 8, pp. 56-71.

8. Nirenberg L. *Lectures on Differential Equations and Differential Geometry*. Beijing, Higher Education Press, 2018. 174 p.

9. Shcherbakov E.A. Equilibrium State of a Pending Drop with Inter-Phase Layer. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2012, vol. 31, pp. 1-15.

10. Shcherbakov E.A., Shcherbakov M.E. On Equilibrium of the Pendant Drop Taking Into Account the Flexural Rigidity of Intermediate Layer. *Doklady Physics*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 243-244.

ON THE GAUSSIAN CURVATURE FUNCTIONAL IN THE CLASS OF SURFACES OF POSITIVE GAUSSIAN CURVATURE

Eugeniy A. Shcherbakov

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor,
Department of Theory of Functions,
Kuban State University
echt@math.kubsu.ru
Stavropolskaya St, 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Mikhail E. Shcherbakov

Lecturer, Department of Functional Analysis and Algebra,
Kuban State University
latiner@mail.ru
Stavropolskaya St, 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Abstract. The paper establishes the form of the Gaussian curvature functional defined on the class of infinitely differentiable horizontal surfaces of positive Gaussian curvature. With respect to admissible surfaces, it is assumed that they admit a global semi-geodetic parametrization. The paper proves that the first variation of the functional on the class of variations of admissible surfaces admitting connections between the coefficients of the first quadratic form and their geodesic lines similar to the axisymmetric case is determined by the Gaussian curvature of the varied surface. The considerations of the type are closely connected with the problems of the study of the equilibrium forms having one of the main curvatures sufficiently small. In this case, the classical Laplace formula fails. Thus, there appear a necessity to take into account more subtle processes leading to the adequate description of the equilibrium state of the two-phased system. In particular, it is quite natural to introduce into the study an intermediate layer consisting of the molecules of the two different phases, one of the Maxwell's ideas. The calculations of the work spended by the pressure forces for the formation of intermediate layer leads us to the necessity to introduce Gauss functional into consideration. Linear combination of mean curvature and gaussian curvature functionals gives possibility to construct variational solution of generalized Laplace equation.

Key words: Gaussian curvature, Gaussian curvature functional, global semi-geodesic parametrization, quasiconformal mappings, Monge — Ampere equation, geodesic line, mean curvature equation.