DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.4

УДК 512.816, 303.732.4, 004.942
ББК 22.14, 32.973.2

Дата поступления статьи: 10.08.2024
Дата принятия статьи: 18.09.2024

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И КОМПЬЮТЕРНЫХ АЛГОРИТМОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОРБИТ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ [1]

Владислав Валерьевич Крутских

Воронежский государственный университет
krutskihvlad@mail.ru
пл. Университетская, 1, 394018 г. Воронеж, Российская Федерация

Александр Васильевич Лобода

Доктор физико-математических наук, Ведущий научный сотрудник,
Воронежский государственный технический университет
lobvgasu@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-0285-5841
просп. Московский, 14, 394000 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. Обсуждается системный подход к задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$, каждая из которых является орбитой некоторой вещественной алгебры Ли. При изучении семейства 7-мерных алгебр Ли, играющего важную роль в поставленной задаче и содержащего более тысячи различных типов алгебр, является естественным использование компьютерных алгоритмов. С участием авторов данной статьи ранее были получены классификационные результаты об орбитах нескольких больших блоков алгебр из этого семейства. Установлены связи между наличием и размерностями нильпотентных и абелевых подалгебр исходных алгебр Ли и такими свойствами их орбит в $\mathbb{C}^4$, как вырожденность по Леви и трубчатость.

В настоящей статье названные идеи и компьютерные алгоритмы применяются к семейству из 18 типов 7-мерных алгебр Ли, имеющих общий 6-мерный ниль-радикал. Построены голоморфные реализации в $\mathbb{C}^4$ этих алгебр и за счет их интегрирования получены все голоморфно однородные (в локальном смысле) невырожденные по Леви 7-мерные орбиты этого семейства. С использованием квадратичной замены переменных показано, что все эти орбиты голоморфно эквивалентны трубчатым гиперповерхностям.

Ключевые слова: однородное многообразие, алгебра Ли, ниль-радикал, абелева подалгебра, голоморфное преобразование, векторное поле, орбита алгебры, трубчатое многообразие, вещественная гиперповерхность.

Введение

Настоящая статья связана с изучением голоморфно однородных (в локальном смысле) вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$. С каждой такой гиперповерхностью M связана ее алгебра симметрий $g(M)$, то есть алгебра Ли голоморфных (вблизи фиксированной точки поверхности M) векторных полей, касательных в вещественном смысле к M.

Изучение однородных многообразий в связи со свойствами их алгебр симметрии позволило получить полные (с локальной точки зрения) описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей в пространствах $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}^3$ (см. [6; 13]). Поэтому представляется естественным применение идей и технических приемов, разработанных для малых размерностей объемлющих комплексных пространств, в обсуждаемой в статье более сложной ситуации.

Также естественным является и рост технических трудностей при переходе от 2-мерных и 3-мерных комплексных пространств к случаю $\mathbb{C}^4$. Например, (достигающаяся на сферах) верхняя оценка размерности алгебры симметрий невырожденной по Леви голоморфно однородной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^n$ квадратично зависит от n и в случае 4-мерного пространства равна 24. При этом классификации вещественных алгебр Ли даже для размерности 7 построены к настоящему времени лишь в отдельных фрагментах. Предварительная оценка авторами этой статьи количества таких алгебр (1325 «типов») основана на несложных комбинаторных дополнениях к известным классификационным результатам серии работ [14–16; 20]. Уточним, что отдельный «тип» — это, вообще говоря, семейство алгебр, зависящее от нескольких вещественных параметров.

Для задачи об однородности вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ 7-мерные алгебры важны потому, что размерность алгебры симметрий для любого однородного многообразия не может быть меньше размерности самого многообразия. В силу этого тривиального соображения число 7 является минимально возможной размерностью для алгебры симметрий любой однородной вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$. Этим оправдывается интерес статьи к 7-мерным алгебрам Ли и их 7-мерным орбитам, являющимся голоморфно однородными гиперповерхностями этого пространства.

1. Задача об однородности вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$

Известное определение многообразия M, однородного относительно действия некоторой группы Ли, заключается в транзитивности действия этой группы на M (см. [3]). С учетом локальных рассмотрений нашей статьи удобно переформулировать это определение в терминах алгебр векторных полей (см. [6]).

Определение 1. *Росток M_ξ вещественно-аналитической гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^n$ (с центром в точке $\xi \in M$) называется голоморфно однородным, если алгебра Ли $g(M)$ касательных к M ростков голоморфных векторных полей (определенных в точке ξ) накрывает своими значениями всю касательную плоскость $T_\xi M$.*

Для упрощения обсуждений везде ниже мы будем говорить о локально заданных поверхностях и голоморфных векторных полях, подразумевая под ними ростки поверхностей и векторных полей (в обсуждаемой точке, которая будет однозначно определяться контекстом).

Мы обсуждаем только 7-мерные алгебры Ли. Орбита или интегральная поверхность 7-мерной алгебры голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$ представляет собой вещественную гиперповерхность (однородную относительно голоморфных преобразований), если вещественный ранг совокупности базисных полей такой алгебры является полным, то есть равен 7. Ясно, что любая такая орбита M является регулярной гиперповерхностью, то есть вещественный градиент определяющей функции орбиты $M = \{\Phi(z, \bar{z}) = 0\}$ отличен от нуля во всех точках этой гиперповерхности.

Условие касания вещественной гиперповерхности M голоморфным векторным полем X имеет вид

$$Re\,(X(\Phi)|_M) \equiv 0. \tag{1}$$

Задача описания голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 7-мерные алгебры симметрий, может быть представлена с учетом условия (1) как система 7 уравнений относительно неизвестной функции $\Phi(z, \bar{z})$ и 7 базисных полей неизвестной алгебры. При этом опыт исследования аналогичной задачи в пространстве $\mathbb{C}^3$ показывает (см. [6]), что значительная часть абстрактных алгебр Ли требуемой (минимальной возможной) размерности не допускает невырожденных по Леви орбит. Полученные авторами настоящей статьи некоторые результаты об однородности в $\mathbb{C}^4$ (см. [5; 7–10; 19]) имеют аналогичное идейное содержание. Выделяя большие блоки алгебр Ли, часто удается получить достаточно содержательные утверждения о вещественных (Леви-невырожденных) гиперповерхностях, являющихся орбитами таких алгебр.

Получению описаний таких орбит помогает использование дополнительных свойств этих поверхностей, например, (не-)возможность их сведения к трубчатым многообразиям.

После таких предварительных пояснений перейдем к конкретным обсуждениям.

В работах [14–16; 20] составляющих полное описание разрешимых неразложимых 7-мерных алгебр, представлены 939 типов алгебр Ли. В частности, большое семейство, содержащее 594 типа 7-мерных алгебр, описано в [20]. Уточним, что следуя стилю и обозначениям работы [15], под типом мы имеем в виду семейство алгебр, описываемых единообразными коммутационными соотношениями, содержащими некоторое количество вещественных параметров (в частности, параметры могут отсутствовать, в этом случае тип соответствует отдельной алгебре).

Ясно, что построение таких обширных списков и дальнейшая работа с ними являются весьма сложными задачами. При их решении используются не только математические методы, но и подходы системного анализа, а также компьютерные алгоритмы. В рамках изучения общей задачи об однородных многообразиях в работе [10] была поставлена задача описания Леви-невырожденных голоморфно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ с использованием информации об абстрактных 7-мерных алгебрах Ли. Обозначим суть результатов, связанных с идеями этой статьи.

Оказалось, что значительная часть абстрактных 7-мерных алгебр Ли вообще не допускает реализаций в виде алгебр голоморфных векторных полей на Леви-невырожденных гиперповерхностях в $\mathbb{C}^4$. Одним из условий, гарантирующих вырожденность по Леви всех 7-мерных орбит в $\mathbb{C}^4$ конкретной 7-мерной алгебры, является наличие у этой алгебры 5-мерной абелевой подалгебры (см. [12]). С другой стороны отметим, что наличие в 7-мерной алгебре трех различных абелевых подалгебр размерности 4 (при отсутствии в ней 5-мерных абелевых подалгебр) является достаточным для сводимости любой орбиты исходной алгебры к трубчатым многообразиям (см. [8]).

Изучение последних является более простой задачей в рамках общего описания однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, а кроме того, многие трубчатые орбиты из [8] также оказываются Леви-вырожденными. В связи с этим отдельным достаточно важным фрагментом описания однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$ можно считать изучение Леви-невырожденных поверхностей, не сводимых к трубкам.

Для 7-мерных алгебр Ли из работы [20] рассмотрение такой задачи сводится к изучению лишь 122 (из 594) типов алгебр Ли, поскольку остальные алгебры имеют либо 5-мерные, либо три различные 4-мерные абелевы подалгебры. Ясно, что и для рассмотрения этих 122 типов требуются системные подходы, позволяющие сделать решение такой задачи обозримым. В [10] такой подход предложен, а в настоящей работе он реализуется в рамках использования компьютерных алгоритмов и символьных вычислений в пакете Maple на примере семейства из 18 типов 7-мерных алгебр Ли из работы [20].

Место этого семейства в общем списке 7-мерных алгебр, детализация для него идей работы [10] и конкретные утверждения об орбитах в $\mathbb{C}^4$ этого семейства алгебр Ли обсуждаются в следующих разделах статьи. А здесь мы упомянем альтернативные подходы других авторов к задаче об однородных гиперповерхностях. Так, в работах [17] и [18] изучаются Леви-вырожденные, но обладающие свойством k-невырожденности однородные гиперповерхности комплексных пространств и, в частности, пространства $\mathbb{C}^4$. Отметим также работу [Можей], в которой построены частичные классификации аффинно однородных и проективно однородных гиперповерхностей 4-мерного вещественного пространства.

2. Алгоритм изучения больших семейств алгебр Ли

В [10] предложена схема поиска Леви-невырожденных орбит в $\mathbb{C}^4$ для 7-мерных алгебр Ли, содержащих две 4-мерные абелевы подалгебры. В обсуждаемой статье эта схема применена к алгебрам из списка [20], важным свойством которых является наличие у каждой из них 6-мерного ниль-радикала.

Напомним, что всего в списке [20] содержится 594 различных типа 7-мерных алгебр Ли, но только 82 типа из них имеют в точности две 4-мерные абелевы подалгебры. Даже выделение таких интересующих нас подалгебр из обширного общего списка [20] потребовало разработки отдельных компьютерных программ. Эти программы (см. [4]), реализованные первым автором настоящей статьи, позволили уточнить информацию, полученную на этапе предварительного изучения списка [20].

Так, в статье [10] предложенная схема обсуждается на примере 59 типов (семейств) 7-мерных алгебр. Упомянутое выше точное количество алгебр Ли размерности 7, имеющих две 4-мерные абелевы подалгебры и входящих в список [20], было установлено в ходе проверок с использованием компьютерных программ.

Замечание 1. Интересующие нас 82 типа 7-мерных алгебр Ли получаются как продолжения лишь 10 различных 6-мерных нильпотентных алгебр Ли (являющихся нильрадикалами обсуждаемых 7-мерных алгебр). Приведем здесь список этих 6-мерных алгебр, используя их коды из работы [20] в качестве индексов:

$$N_{[6,1]}, N_{[6,9]}, N_{[6,13]}, N_{[6,18]}, N_{[6,21]}, N_{[6,22]}, N_{[6,23]}, N_{[6,24]}, N_{[6,26]}, N_{[6,29]}. \qquad (2)$$

В общих обсуждениях мы будем обозначать 6-мерные ниль-радикалы рассматриваемых 7-мерных алгебр через N_6.

Это замечание позволяет существенно упростить общий подход к описанию орбит интересующих нас алгебр Ли. Первым этапом задачи реализации в виде голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$ базиса любой 7-мерной алгебры является в этом случае реализация 6 базисных полей для 10 различных 6-мерных нильпотентных алгебр.

Отметим, что в силу относительной простоты коммутационных соотношений в алгебрах из списка (2) большинство этих алгебр реализованы в [10] в виде алгебр векторных полей, причем без использования компьютерной поддержки вычислений («в ручном режиме»). Но и алгоритмическая реализация этого этапа задачи, направленная, например, на изучение других больших массивов алгебр Ли, также возможна и целесообразна.

Без внимания в работе [10] остались две 6-мерные нильпотентные алгебры $N_{[6,21]}$ и $N_{[6,29]}$. В настоящее время завершается работа над статьей, посвященной полному описанию Леви-невырожденных 7-мерных орбит для нескольких 7-мерных алгебр из [20] и, в частности, для 7-мерных продолжений 6-мерной алгебры $N_{[6,21]}$.

А изучение голоморфных реализаций 7-мерных алгебр Ли, имеющих своим 6-мерным ниль-радикалом алгебру $N_{[6,29]}$, является одной из главных целей настоящей статьи. Такой отдельный интерес к алгебре $N_{[6,29]}$ объясняется, например, тем, что она имеет самое большое (среди всех представителей списка (2)) количество 7-мерных продолжений, а именно 18 типов 7-мерных алгебр Ли. С другой стороны, имеет место следующее утверждение, также заметно выделяющее алгебру $N_{[6,29]}$ из списка (2).

Теорема 1. *Если разрешимая неразложимая 7-мерная алгебра Ли имеет своим 6-мерным ниль-радикалом алгебру $N_{[6,29]}$, то любая ее 7-мерная Леви-невырожденная орбита в пространстве $\mathbb{C}^4$ голоморфно эквивалентна трубчатой гиперповерхности.*

Замечание 2. Утверждение этой теоремы является иллюстрацией того, что невырожденные по Леви голоморфно однородные орбиты (в пространствах $\mathbb{C}^n$ произвольных размерностей) «часто» оказываются сводимыми к трубчатым многообразиям. В полной общности вопросы о такой сводимости пока не изучены, проверка (не-)сводимости для конкретных гиперповерхностей является, вообще говоря, достаточно трудной задачей.

В то же время за счет одного простого приема доказательство теоремы 1, которому посвящены разделы 3 и 4 настоящей статьи, оказалось свободным от идейных сложностей. А в силу обширности семейства 7-мерных алгебр с ниль-радикалом $N_{[6,29]}$ это доказательство можно считать показателем возможностей и целесообразности применения компьютерных алгоритмов и технологий в «чисто математической» задаче. Детали этих алгоритмов применительно к продолжениям алгебры $N_{[6,29]}$ будут описаны в следующих разделах. Здесь же мы продолжим обсуждение общих моментов задачи описания орбит 7-мерных алгебр Ли в пространстве $\mathbb{C}^4$.

Напомним (см. [19]), что при наличии у такой алгебры 4-мерной абелевой подалгебры, все возможности реализации базиса такой подалгебры в виде голоморфных векторных полей, касательных к Леви-невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$, распадаются на три подслучая. При этом один из случаев может приводить только к трубчатым орбитам, которыми мы в этой статье не интересуемся.

Наличие двух различных 4-мерных абелевых подалгебр (с 3-мерным пересечением) приводит к трубчатости орбит в двух из трех упомянутых случаев. Поэтому, интересуясь только не сводимыми к трубкам Леви-невырожденными однородными гиперповерхностями, мы получаем, по существу, единственную возможность реализации базиса 4-мерной абелевой подалгебры. В рамках этой возможности три базисных поля одной из таких подалгебр выпрямляются голоморфной заменой координат до состояния дифференцирований по трем комплексным переменным пространства $\mathbb{C}^4$.

В целом, при наличии у 7-мерной алгебры двух 4-мерных абелевых подалгебр (и при условии существования у нее невырожденной 7-мерной орбиты в $\mathbb{C}^4$) базис одной из этих подалгебр принимает вид

$$e_1 = (0,0,0,1), \ e_2 = (0,0,1,0), \ e_3 = (0,1,0,0), \ e_4 = (0,0,c_4(z_1),d_4(z_1)) \qquad (3)$$

с некоторыми голоморфными функциями c_4, d_4 одной комплексной переменной.

В описаниях (3) мы использовали краткий (покомпонентный) способ записи векторных полей, так что в традиционных обозначениях, например, поле e_4 имеет, в соответствии с (3), вид

$$e_4 = c_4(z_1)\frac{\partial}{\partial z_3} + d_4(z_1)\frac{\partial}{\partial z_4}.$$

Учитывая коммутационные соотношения тройки e_1, e_2, e_3 выпрямленных базисных полей абелевой подалгебры $I_4 \subset N_6$ с двумя оставшимися базисными элементами e_5, e_6 идеала N_6, легко получить относительно просто устроенные формулы для компонент полей e_5, e_6. Например, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть M — невырожденная по Леви (вблизи некоторой точки $Q \in M$) вещественно аналитическая гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^4$, не сводимая голоморфными преобразованиями к трубчатым многообразиям. Если алгебра голоморфных (вблизи Q) векторных полей, касательных к M, содержит 6-мерную подалгебру h_6 из списка (2), то существует голоморфная замена координат, после которой три базисных поля этой подалгебры оказываются выпрямленными, а остальные элементы h_6 являются полиномиальными полями степени не выше 3.*

Уточним, что явные полиномиальные формулы (удовлетворяющие этому предложению) для шести базисных полей реализованных в $\mathbb{C}^4$ восьми алгебр из списка (2), отличных от $N_{[6,21]}$ и $N_{[6,29]}$, содержатся в теоремах 1 и 2 работы [10]. Подробному обсуждению реализаций (и, в частности, требуемому полиномиальному характеру базисных полей) алгебры $N_{[6,29]}$ посвящен следующий раздел настоящей статьи, а базис голоморфной реализации алгебры $N_{[6,21]}$ приведем здесь в качестве примера.

Пример 1. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^4$ задана 6-мерная алгебра h_6 голоморфных векторных полей со структурой $N_{[6,21]}$. Если все поля алгебры являются касательными к некоторой невырожденной вещественно-аналитической гиперповерхности M, то голоморфной заменой координат базис h_6 можно привести к виду

$$\begin{array}{l} e_1 = (0,0,0,1), \\ e_2 = (0,1,0,0), \\ e_3 = (0,0,1,0), \\ e_4 = (0,-z_1+B_4, C_4, z_2+C_4z_1+D_4), \\ e_5 = (0,0,-z_1,(-1/2)z_1^2+C_5z_1+D_5), \\ e_6 = (1,0,0,z_3). \end{array} \qquad (4)$$

На этапе реализации в $\mathbb{C}^4$ 6-мерных нильпотентных алгебр можно легко обойтись без привлечения компьютера. Но следующий этап, на котором устанавливается явный вид последнего базисного поля e_7 исходной 7-мерной алгебры, связан с большим количеством достаточно громоздких вычислений. Здесь используются однотипные, по сути, действия, связанные с решением систем дифференциальных уравнений. При этом вычисления повторяются столько раз, сколько 7-мерных продолжений имеет конкретная 6-мерная нильпотентная алгебра.

Такие вычисления заложены в компьютерную программу, реализованную авторами в пакете Maple. Уточним, что одно из базисных полей обсуждаемой 6-мерной алгебры (для определенности мы везде в этом разделе говорим о поле e_6, но для некоторых алгебр из (2) нужную роль играет поле e_5) принимает после процедур первого этапа вид

$$e_6 = (1, b_6(z), c_6(z), d_6(z)) \tag{5}$$

с некоторыми многочленами $b_6(z), c_6(z), d_6(z)$, зависящими, вообще говоря, от всех четырех координат $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ пространства $\mathbb{C}^4$.

Итак, записывая поле e_7 в общем виде

$$e_7 = (a_7(z), b_7(z), c_7(z), d_7(z))$$

с неизвестными голоморфными функциями в качестве компонент, рассмотрим коммутационные соотношения четверки e_1, e_2, e_3, e_6 с этим полем.

В силу вида (3) полей e_1, e_2, e_3 первые три таких соотношения имеют вид векторных дифференциальных уравнений, левые части которых равны

$$[e_k, e_7] = \frac{\partial}{\partial z_{5-k}}(e_7) = \frac{\partial}{\partial z_{5-k}}(a_7(z), b_7(z), c_7(z), d_7(z)),\ \ k = 1, 2, 3.$$

Правые части этих уравнений определяются из таблицы коммутационных соотношений. В силу того, что первая шестерка базисных полей обсуждаемой 7-мерной алгебры g_7 является базисом идеала N_6, все такие правые части являются линейными комбинациями известных полиномиальных полей из предложения 1.

Это означает, что с точностью до голоморфных функций, зависящих только от переменной z_1, все 4 компоненты поля e_7 являются полиномиальными функциями не более чем 4-й степени. А учитывая еще табличное значение коммутатора $[e_6, e_7]$, содержащего, в частности, производные

$$\frac{\partial}{\partial z_1}(a_7),\ \frac{\partial}{\partial z_1}(b_7),\ \frac{\partial}{\partial z_1}(c_7),\ \frac{\partial}{\partial z_1}(d_7),$$

получаем «явный» вид всех компонент поля e_7, определенный с точностью до нескольких произвольных констант. В частности, имеет место следующее общее утверждение о реализациях 7-мерных алгебр, получаемое на базе предложения 1.

Предложение 2. *Пусть M — невырожденная по Леви (вблизи некоторой точки $Q \in M$) гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^4$, не сводимая голоморфными преобразованиями к трубчатым многообразиям и являющаяся орбитой некоторой 7-мерной алгебры Ли голоморфных (вблизи Q) векторных полей g_7. Если g_7 является разрешимой неразложимой алгеброй и имеет 6-мерный ниль-радикал из списка (2), то в некоторой голоморфной системе координат все элементы этой алгебры являются полиномиальными полями степени не выше 7.*

Замечание 3. С качественной точки зрения основной интерес в предложении 2 представляет утверждение о полиномиальном характере всех полей в изучаемых алгебрах. Сама же оценка степени полиномиальных полей получена из общих соображений, а потому для конкретных алгебр является сильно завышенной. В то же время для реализации компьютерных алгоритмов наличие такой конкретной (пусть даже завышенной) оценки играет важную практическую роль.

Достаточно большое количество реализаций 7-мерных алгебр Ли, содержащих ниль-радикалы из списка (2), имеется в статье [10]. Приведем здесь еще пример пары алгебр с ниль-радикалом $N_{[6,21]}$, а именно, алгебр $[7,[6,21],1,3]$ (в достаточно громоздкой авторской кодировке работы [20]) с дискретным параметром $\varepsilon = \pm 1$. Базисные поля этих реализаций являются полиномиальными, и максимальная степень компонент, равная 3, достигается у поля e_7.

Пример 2. Дополнение полем e_7 базиса 6-мерной алгебры из примера 1 возможно и (с точностью до голоморфных преобразований) имеет вид ($D_6 \in \mathbb{C}$):

$$e_1 = (0,0,0,1), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &e_4 = (0,-z_1,0,z_2),\\ &e_5 = (0,0,-z_1,(-1/2)z_1^2),\\ &e_6 = (1,0,0,z_3+D_6),\\ &e_7 = (z_1, 2z_2, 2z_3-(\varepsilon/2)z_1^2, 3z_4-(\varepsilon/3)z_1^3-2D_6z_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Полученный в приведенных общих обсуждениях полиномиальный вид с необходимостью обязаны иметь компоненты поля e_7, если вся обсуждаемая 7-мерная алгебра Ли g_7 допускает желаемую реализацию в качестве алгебры векторных полей, касательных к невырожденной орбите. Однако на этом этапе остаются еще два неучтенных соотношения, связанные с коммутаторами $[e_4,e_7]$ и $[e_5,e_7]$. Каждое из таких соотношений можно представить как равенство нулю двух полиномиальных вектор-функций в $\mathbb{C}^4$ с известным ограничением на степени обсуждаемых полиномов.

Результатом компьютерного выделения всех коэффициентов таких вектор-функций для отдельной алгебры является система нелинейных уравнений относительно произвольных констант, появившихся на предыдущих этапах изучения задачи. При этом достаточно сложно проконтролировать общий вид такой системы и решить ее программным образом **для всех** 7-мерных алгебр Ли из какого-либо обширного семейства. Однако конкретный вид таких систем для 7-мерных алгебр, являющихся продолжениями алгебр из списка (2), оказывается достаточно простым. Примеры таких систем для нескольких 7-мерных алгебр приведены ниже в разделе 3 статьи.

Отметим, что непосредственное изучение таких систем часто приводит к противоречиям. Однако в небольшом количестве разобранных случаев системы оказываются совместными и даже допускающими семейства решений, зависящие от нескольких параметров. Это означает, что соответствующие абстрактные 7-мерные алгебры Ли допускают реализации в виде алгебр голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$.

Полученные реализации удовлетворяют **двум необходимым условиям**, интересующим нас в этой статье: такой вид имеют алгебры голоморфных векторных полей, допускающие Леви-невырожденные не сводимые к трубкам орбиты. Однако утверждать, что все полученные реализации обладают орбитами с желаемыми свойствами, разумеется, нельзя.

Так, одним из свойств базисов, получаемых в рамках описанной процедуры, может оказаться тождественное равенство нулю первых компонент шести базисных полей изучаемой 7-мерной алгебры. Любая орбита такой алгебры оказывается вырожденной (см. [9], условие 3 и замечание 1), а сама алгебра выпадает из круга интересов данной статьи.

Замечание 4. Проверка возможного одновременного тождественного обращения в нуль шестерки компонент a_k (а также аналогичные проверки для наборов b_k, c_k и d_k) семи получаемых базисных полей заложена в программу. Однако возможные модификации этого свойства, а также другие более тонкие соображения, приводящие к утверждениям о вырожденности орбит полученных реализаций, пока остаются вне разработанных компьютерных программ.

Еще одним моментом, не учтенным в таких программах, остается интегрирование полученных (и проверенных на простейшие условия невырожденности) алгебр векторных полей. Каждому базисному полю реализованной в $\mathbb{C}^4$ 7-мерной алгебры отвечает уравнение в частных производных $Re\,(e_k(\Phi)|_M) \equiv 0$.

В пакете Maple имеется команда pdsolve, позволяющая находить решения систем дифференциальных уравнений с частными производными. Однако ее непосредственное применение не гарантирует получения хотя бы каких-то решений изучаемых систем, и, тем более, полных наборов решений (см., например, [1]).

По этой причине даже полученные с помощью упомянутой компьютерной команды результаты интегрирования подобных систем нуждаются в сопоставлении с результатами ручной проверки.

Завершая этот раздел, подчеркнем еще раз возможности и эффективность применения компьютерных алгоритмов в изучаемой задаче описания голоморфно однородных гиперповерхностей. Указанные выше недостатки такого «механического» подхода к задаче достаточно легко сглаживаются при комбинированном компьютерно-ручном ее исследовании. Рутинная часть такого исследования, выполненная за счет применения алгоритмов и символьных вычислений, дополняется несложными рассуждениями на завершающем этапе. Примером такого завершенного исследования являются два завершающих раздела статьи. В них описанная выше техника применяется к семейству 7-мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли с ниль-радикалом $[6,29]$, содержащему, как отмечалось выше, 18 типов алгебр.

3. Реализации алгебр с ниль-радикалом $N_{[6,29]}$

Нильпотентная 6-мерная алгебра Ли $N_{[6,29]}$, являющаяся максимальным идеалом для всех алгебр из этого семейства, имеет достаточно простое описание. В базисе, представленном в работе [20], в алгебре $N_{[6,29]}$ имеется лишь три нетривиальных коммутационных соотношения:

$$[e_2, e_3] = e_1, \; [e_4, e_6] = e_1, \; [e_5, e_6] = e_4. \tag{8}$$

При этом семейство 7-мерных алгебр Ли, имеющих эту алгебру в качестве ниль-радикала, содержит, согласно [20], 18 типов алгебр со следующими кодами

$$[7, [6, 29], 1, k], \; k \in \{1, ..., 9\}; \quad [7, [6, 29], 2, k], \; k \in \{1, ..., 4\}; \quad [7, [6, 29], 3, k], \; k \in \{1, ..., 5\}.$$

В каждой 7-мерной алгебре Ли, имеющей $N_{[6,29]}$ своим максимальным нильпотентным идеалом, к соотношениям (8) добавляется информация о коммутаторах базисных элементов $e_1, ..., e_6$ алгебры $N_{[6,29]}$ с элементом e_7.

Для наглядного представления всех 18 типов приведем эту информацию из [20] в следующих таблицах. Уточним, что во всех этих таблицах подразумевается, что m, n — это вещественные параметры, $\varepsilon = \pm 1$; клетки, отмеченные точкой означают, что соответствующий коммутатор $[e_j, e_7]$ равен нулю.

Таблица 1. Коммутаторы $[e_j, e_7]$ для $[7,[6,29],1,k], k \in \{1,...,9\}$;

$[7,[6,29],1,k]$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
e_1	$(m+n)e_1$	$(m+1)e_1$	$(m+1)e_1$	$(m+1)e_1$
e_2	me_2	e_2	e_2	e_2
e_3	ne_3	me_3	me_3	me_3
e_4	$(m+n-1)e_4$	$(m+1)e_4$	$(\frac{2}{3}m+\frac{2}{3})e_4$	$(m+1)e_4$
e_5	$(m+n-2)e_5$	$(m+1)e_5$	$(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3})e_5$	$\varepsilon e_1+(m+1)e_5$
e_6	e_6	$\cdot$	$e_5+(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3})e_6$	$\cdot$

$[7,[6,29],1,k]$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
e_1	$\cdot$	$(m+1)e_1$	e_1	$3e_1$	e_1
e_2	e_2	e_2	$\cdot$	e_2	$\cdot$
e_3	$-e_3$	me_3+e_4	e_3+e_4	$2e_3+e_4$	e_3+e_4
e_4	$\cdot$	me_4	e_4	$2e_4$	e_4
e_5	εe_1	$(m-1)e_5$	e_5	e_5	εe_1+e_5
e_6	e_5	e_2+e_6	e_2	$e_2+e_5+e_6$	e_2

Таблица 2. Коммутаторы $[e_j, e_7]$ для $[7,[6,29],2,k], k \in \{1,...,4\}$;

$[7,[6,29],2,k]$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
e_1	$2me_1$	$2me_1$	$2me_1$	$\cdot$
e_2	me_2-e_3	me_2-e_3	me_2-e_3	$-e_3$
e_3	e_2+me_3	e_2+me_3	e_2+me_3	e_2
e_4	$(2m-n)e_4$	$\frac{4}{3}me_4$	$2me_4$	$\cdot$
e_5	$(2m-2n)e_5$	$\frac{2}{3}me_5$	εe_1+2me_5	εe_1
e_6	ne_6	$e_5+\frac{2}{3}me_6$	$\cdot$	e_5

Таблица 3. Коммутаторы $[e_j, e_7]$ для $[7,[6,29],3,k], k \in \{1,...,5\}$.

$[7,[6,29],3,k]$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
e_1	$2e_1$	$\cdot$	$2e_1$	$2e_1$	$2e_1$
e_2	e_2	$\cdot$	e_2	e_2	e_2-e_4
e_3	e_2+e_3	e_2	e_2+e_3	e_2+e_3	e_2+e_3
e_4	$(2-m)e_4$	$-e_4$	$\frac{4}{3}e_4$	$2e_4$	e_4
e_5	$(2-2m)e_5$	$-2e_5$	$\frac{2}{3}e_5$	εe_1+2e_5	$\cdot$
e_6	me_6	e_6	$e_5+\frac{2}{3}e_6$	$\cdot$	e_3+e_6

Следуя описанному выше алгоритму, необходимо найти реализацию 6-мерного нильрадикала $N_{[6,29]}$ в пространстве $\mathbb{C}^4$ (при допущении существования 7-мерной Леви-невырожденной орбиты хотя бы у какого-нибудь 7-мерного продолжения нильпотентной алгебры $N_{[6,29]}$). Уточним, что 4-мерные абелевы подалгебры I_4 и I_4' образованы наборами e_1, e_2, e_4, e_5 и e_1, e_3, e_4, e_5, соответственно. Упрощения по схеме [19] применяются к упорядочению e_1, e_4, e_5, e_2 базиса I_4. Вариант предложения 1 в этом случае дает следующую шестерку полей

$$\begin{aligned} e_1 &= (0,0,0,1),\\ e_2 &= (0,1,0,0),\\ e_3 &= (0,B_3,C_3,C_3z_1+z_2+D_3),\\ e_4 &= (0,0,1,0),\\ e_5 &= (0,0,-z_1,-z_1^2/2+D_5),\\ e_6 &= (1,0,0,z_3) \end{aligned} \tag{9}$$

с некоторыми комплексными константами B_3, C_3, D_3, D_5.

Напомним, что если хотя бы одна из обсуждаемых 7-мерных алгебр реализуется в виде алгебры голоморфных векторных полей на Леви-невырожденной гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$, то в некоторой голоморфной системе координат базис 6-мерного нильрадикала исходной алгебры описывается именно формулами (9).

Далее предлагаемый алгоритм выполняет для каждой алгебры «подклейку» седьмого векторного поля к набору (9).

В начале работы этого (локального) алгоритма поле e_7 представим в общем виде

$$e_7 = (a_7(z_1,z_2,z_3,z_4), b_7(z_1,z_2,z_3,z_4), c_7(z_1,z_2,z_3,z_4), d_7(z_1,z_2,z_3,z_4)). \tag{10}$$

Далее формируется система дифференциальных уравнений в частных производных при помощи коммутационных соотношений поля e_7 с полями e_1, e_2, e_4, e_6, которую решаем последовательно, начиная с «удобных» уравнений с помощью процедурных возможностей Maple.

Например, для алгебры $[7,[6,29]1,3]$ получаем систему

$$[e_1,e_7]=(m+1)e_1,\quad \frac{\partial a_7(z)}{\partial z_4}=0,\quad \frac{\partial b_7(z)}{\partial z_4}=0,\quad \frac{\partial c_7(z)}{\partial z_4}=0,\quad \frac{\partial d_7(z)}{\partial z_4}=m+1;$$

$$[e_2,e_7]=e_2,\quad \frac{\partial a_7(z)}{\partial z_2}=0,\quad \frac{\partial b_7(z)}{\partial z_2}=1,\quad \frac{\partial c_7(z)}{\partial z_2}=0,\quad \frac{\partial d_7(z)}{\partial z_2}=0;$$

$$[e_4,e_7]=\Big(\frac{2}{3}m+\frac{2}{3}\Big)e_4,\quad \frac{\partial a_7(z)}{\partial z_3}=0,\quad \frac{\partial b_7(z)}{\partial z_3}=0,\quad \frac{\partial c_7(z)}{\partial z_3}=\frac{2}{3}m+\frac{2}{3},\quad \frac{\partial d_7(z)}{\partial z_3}=0;$$

$$[e_6,e_7]=e_5+\Big(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}\Big)e_6,\quad \frac{\partial a_7(z)}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial a_7(z)}{\partial z_4}=\frac{1}{3}m+\frac{1}{3},\quad \frac{\partial b_7(z)}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial b_7(z)}{\partial z_4}=0,$$

$$\frac{\partial c_7(z)}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial c_7(z)}{\partial z_4}=-z_1,\quad \frac{\partial d_7(z)}{\partial z_1}+z_3\frac{\partial d_7(z)}{\partial z_4}-c_7(z)=z_3\Big(\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}\Big)-\frac{z_1^2}{2}+D_5,$$

где $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$. Решив систему, получаем уточненный вид поля e_7:

$$e_7=\Big(\frac{m+1}{3}z_1+A_7, z_2+B_7, \frac{2m+2}{3}z_3-\frac{1}{2}z_1^2+C_7, mz_4+z_4-\frac{1}{3}z_1^3+z_1C_7+z_1D_5+D_7\Big),$$

где A_7, B_7, C_7, D_7 — комплексные константы.

За счет соотношений $[e_3,e_7]=me_3$ и $[e_5,e_7]=(m/3+1/3)e_5$ получаем для каждой алгебры систему нелинейных алгебраических соотношений на комплексные константы, входящие в формулы для базисных полей. Для обсуждаемой алгебры $[7,[6,29],3,1]$ эта система имеет вид

$$\begin{gathered} B_3(m-1)=0 \\ C_3(m-2)=0 \\ D_3-C_3A_7-B_7=0 \\ A_7=0 \\ D_5(m+1)=0 \end{gathered} \tag{11}$$

Описанная последовательность действий для всей совокупности из 18 обсуждаемых типов алгебр Ли реализована с использованием нескольких процедур в пакете символьной математики Maple:

1) Вычисление коммутаторов базисных векторных полей (для каждой пары полей, заданных формулами типа (9) и (10));
2) Сопоставление вычисленных значений коммутаторов табличным значениям и формирование системы дифференциальных уравнений ;
3) Пошаговое упрощение формул для седьмого базисного векторного поля;
4) Получение алгебраической системы уравнений на комплексные константы (коэффициенты полей).

Запуская компьютерный алгоритм для каждой алгебры из таблиц 1, 2 и 3, получаем системы на комплексные константы. Рассмотрение таких систем для каждой из обсуждаемых алгебр проводим в ручном режиме.

После такого рассмотрения для каждой из алгебр можно сделать один из трех следующих выводов:

1) Система содержит противоречия, следовательно, алгебра не имеет реализации в данном обсуждении;
2) Алгебра может иметь только вырожденные по Леви орбиты т.к. выполняются условия вырождения (наличие необходимого количества нулей в компонентах полей);
3) Алгебра имеет реализацию в виде алгебры векторных полей (без явных признаков вырождения орбит), если у системы существуют решения, не удовлетворяющие условиям предыдущего пункта.

Итогом проведенных программных вычислений для всех 18 типов обсуждаемых 7-мерных алгебр и рассмотрений (в ручном режиме) соответствующих этим алгебрам нелинейных систем соотношений на коэффициенты являются следующие три утверждения.

Предложение 3. *У 7 из 9 типов алгебр* $[7,[6,29],1,k]$, $k \in \{1,\dots,9\}$ *могут быть только вырожденные по Леви орбиты.*

Предложение 4. *У 2 из 4 типов алгебр* $[7,[6,29],2,k]$, $k \in \{1,\dots,4\}$ *могут быть только вырожденные по Леви орбиты.*

Предложение 5. *Все 5 типов алгебр* $[7,[6,29],3,k]$, $k \in \{1,\dots,5\}$ *могут иметь только вырожденные по Леви орбиты.*

Дадим краткие комментарии к доказательству этих утверждений.

Например, выполняя программную часть алгоритма для алгебры $[7,[6,29],3,1]$, получим сначала упрощенный вид поля

$$e_7=(mz_1+A_7, z_2+B_7, (2-m)z_3+C_7, C_7z_1+D_7+2z_4).$$

Далее из коммутационных соотношений $[e_3, e_7] = e_2 + e_3$ и $[e_5, e_7] = (2-2m)e_5$ получим систему

$$\begin{gathered} 1 = 0, \\ C_3(m-1) = 0, \\ A_7C_3 + B_7 - D_3 = 0, \\ A_7 = 0, \\ mD_5 = 0. \end{gathered}$$

Заметим, что в системе есть уравнение $1 = 0$, из чего следует, что система не имеет решений, а значит, у этой алгебры нет реализаций с обсуждаемыми свойствами (нет невырожденных нетрубчатых орбит) в $\mathbb{C}^4$. Отметим, что у семейств алгебр $[7,[6,29],3,k]$ при любых возможных k, алгебр $[7,[6,29],3,k]$ при $k \in \{3,4,5\}$ и у алгебр $[7,[6,29],1,k]$ при $k \in \{4,5,6,7,8,9\}$ в системах алгебраических соотношений на коэффициенты имеет место описанный выше сценарий.

Рассмотрим единственную алгебру $[7,[6,29],1,2]$, у которой алгебраическая система имеет решение, но алгебра может иметь только вырожденные орбиты. Поле e_7 этой алгебры имеет вид

$$e_7 = (A_7, z_2 + B_7, mz_3 + C_7, (m+1)z_4 + C_7z_1 + D_7),$$

а система типа (11) имеет вид

$$\begin{gathered} (1-m)B_3 = 0, \\ C_3 = 0, \\ D_3 - A_7C_3 - B_7 = 0, \\ A_7 = 0. \end{gathered}$$

Заметим, что для любого решения этой системы $A_7 = 0$ у поля e_7 первая компонента нулевая, как и у полей e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Описанное свойство (6 из 7 нулей) является одним из условий отсутствия у алгебры невырожденных по Леви орбит. Описание и доказательство подобного рода свойств представленно в [9].

С учетом сказанного имеем всего 4 типа реализованных базисов обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли, претендующих на наличие невырожденных не сводимых к трубкам орбит. Для алгебр $[7,[6,29],1,1]$, $[7,[6,29],1,3]$, $[7,[6,29],2,1]$ и $[7,[6,29],2,2]$ при помощи реализованного алгоритма получаем следующие формулы для уточненного вида поля e_7:

$$\begin{aligned}
&[7,[6,29],1,1]: && e_7 = (z_1 + A_7, mz_2 + B_7, (m+n-1)z_3 + C_7, (m+n)z_4 + C_7z_1 + D_7),\\
&[7,[6,29],1,3]: && e_7 = (\frac{m+1}{3}z_1 + A_7, z_2 + B_7, \frac{2m+2}{3}z_3 - \frac{1}{2}z_1^2 + C_7,\\
& && (m+1)z_4 - \frac{1}{3}z_1^3 + (C_7 + D_5)z_1 + D_7),\\
&[7,[6,29],2,1]: && e_7 = (nz_1 + A_7, (m - B_3)z_2 + B_7, (2m-n)z_3 - C_3z_2 + C_7,\\
& && \quad 2mz_4 - \frac{1}{2}z_2^2 - D_3z_2 - C_3z_1z_2 + C_7z_1 + D_7),\\
&[7,[6,29],2,2]: && e_7 = (\frac{2m}{3}z_1 + A_7, (m - B_3)z_2 + B_7, \frac{4m}{3}z_3 - \frac{1}{2}z_1^2 - C_3z_2 + C_7,\\
& && \quad 2mz_4 - \frac{1}{2}z_2^2 - D_3z_2 + (C_7 + D_5 - C_3z_2)z_1 - \frac{1}{3}z_1^3 + D_7).
\end{aligned}$$

Соответствующие этим алгебрам алгебраические системы на коэффициенты имеют вид:

$$
\begin{array}{cc}
[7,[6,29],1,1]: & [7,[6,29],1,3]: \\
B_3(m-n)=0 & B_3(m-1)=0 \\
C_3(m-1)=0 & C_3(m-2)=0 \\
mD_3-C_3A_7-B_7=0 & D_3-C_3A_7-B_7=0 \\
A_7=0 & A_7=0 \\
D_5=0 & D_5(m+1)=0 \\
 & \\
[7,[6,29],2,1]: & [7,[6,29],2,2]: \\
B_3^2=-1 & B_3^2=-1 \\
C_3(m-n-B_3)=0 & C_3(m-3B_3)=0 \\
(m-B_3)D_3-C_3A_7-B_7=0 & (m-B_3)D_3-C_3A_7-B_7=0 \\
A_7=0 & A_7=0 \\
nD_5=0 & mD_5=0
\end{array}
\qquad (12)
$$

В связи с обсуждениями алгебры $N[6,29]$ интересующие нас Леви-невырожденные не сводимые к трубкам голоморфно однородные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$ могут быть только орбитами полученных четырех типов 7-мерных продолжений этой алгебры.

4. Сведение полученных орбит к трубкам

Формулы для базисных полей, полученные выше и содержащие условия (12) на параметры, удобно довести до «безусловного» вида за счет решения этих систем алгебраических уравнений.

Предложение 6. *Для четырех типов алгебр* $[7,[6,29],1,1]$, $[7,[6,29],1,3]$, $[7,[6,29],2,1]$, $[7,[6,29],2,2]$ *имеются 5 различных типов реализаций в виде алгебр голоморфных векторных полей в* $\mathbb{C}^4$*, допускающих невырожденные орбиты.*

Доказательство. Начнем обсуждение четверки представленных систем с возможных значений параметра D_5. Если для какой-либо из алгебр $[7,[6,29],1,3]$, $[7,[6,29],2,1]$, $[7,[6,29],2,2]$ для этого параметра выполняется неравенство $D_5 \neq 0$, то в силу условия $A_7=0$ мы получим в этом случае тождественно нулевую компоненту у поля e_7. В силу формул (9) в базисе такой алгебры имеются шесть полей с нулевой первой компонентой, а значит, такая алгебра может иметь только вырожденные орбиты.

Следовательно, для всех четырех типов $[7,[6,29],1,1]$, $[7,[6,29],1,3]$, $[7,[6,29],2,1]$, $[7,[6,29],2,2]$ алгебр с невырожденными орбитами обязательно выполняются условия $A_7=0$ и $D_5=0$. Заметим еще, что в каждой из четырех систем (12) параметр B_7 выражается через другие параметры обсуждаемых алгебр и базисных векторных полей.

Для дальнейшего обсуждения четыре типа алгебр естественно разделить на два блока: типы $[7,[6,29],1,1]$, $[7,[6,29],1,3]$ и типы $[7,[6,29],2,1]$, $[7,[6,29],2,2]$.

Для алгебр $[7,[6,29],2,1]$ и $[7,[6,29],2,2]$ решением первого уравнения соответствующих алгебраических систем будет $B_3=\pm i$. Тогда (в силу вещественности параметров m, n алгебр) из второго уравнения получаем $C_3=0$. Следовательно, для алгебр типа $[7,[6,29],2,1]$ получим с учетом замены переменной $z_2^* = z_2 + D_3$ следующий базис:

$$
\begin{gathered}
[7,[6,29],2,1]: \\
e_1 = (0,0,0,1), \\
e_2 = (0,1,0,0), \\
e_3 = (0, B_3 i, 0, z_2), \\
e_4 = (0,0,1,0), \\
e_5 = (0,0,-z_1,-z_1^2/2), \\
e_6 = (1,0,0,z_3) \\
e_7 = (nz_1, (m - B_3 i)z_2, (2m-n)z_3 + C_7, 2mz_4 - z_2^2/2 + C_7 z_1)
\end{gathered}
$$

При реализации алгебр типа $[7,[6,29],2,2]$ формулы для первых шести базисных полей совпадают с формулами для типа $[7,[6,29],2,1]$, а для последнего поля имеем

$$[7,[6,29],2,2] \ : \ e_7 = (2mz_1/3, (m-B_3 i)z_2, 4mz_3/3 - z_1^2/2 + C_7, 2mz_4 - z_2^2/2 + C_7 z_1 - z_1^3/3)$$

Заметим еще, что при $B_3 = 0$ обсуждаемые алгебры могут иметь только вырожденные по Леви орбиты, т.к. у четверки полей e_1, e_3, e_4, e_5 первая и вторая компоненты равны 0 (см. [9], условие 3 и замечание 1). Ясно также, что необходимыми условиями невырожденности орбит являются неравенства $n \neq 0$ для случая $[7,[6,29],1,1]$ и $m \neq 0$ для $[7,[6,29],1,2]$-случая (запрещающие 6 нулей в первой компоненте базисных полей).

Также отдельно рассмотрим первые два уравнения из алгебраических систем (12) для алгебр $[7,[6,29],1,1]$ и $[7,[6,29],1,3]$. Согласно предыдущему замечанию, здесь также $B_3 \neq 0$. Тогда для алгебр типа $[1,3]$ получаем равенства $m = 1$ и $C_3 = 0$ и единственный допустимый вид их реализации.

Для алгебр типа $[7,[6,29],1,1]$ получаем из первого уравнения системы (12) условие $m = n$, а второе уравнение дает нам две возможности $C_3 = 0$ или $m = 1$. Соответственно, для этого типа алгебр Ли возможны реализации двух разных видов. В целом для блока алгебр типов $[7,[6,29],1,1]$, $[7,[6,29],1,3]$ получаем три различных вида их реализаций. С учетом несложных замен переменных базисы этих трех реализаций можно представить в следующей форме:

$$
\begin{gathered}
[7,[6,29],1,1] \text{ при } C_3 = 0: \\
e_1 = (0,0,0,1), \\
e_2 = (0,1,0,0), \\
e_3 = (0, B_3, 0, z_2), \\
e_4 = (0,0,1,0), \\
e_5 = (0,0,-z_1,-z_1^2/2), \\
e_6 = (1,0,0,z_3) \\
e_7 = (z_1, mz_2, (2m-1)z_3 + C_7, 2mz_4 + C_7 z_1)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[7,[6,29],1,1] \text{ при } m = 1 \text{ и } C_3 \neq 0: \\
e_1 = (0,0,0,1), \\
e_2 = (0,1,0,0), \\
e_3 = (0, B_3, C_3, C_3 z_1 + z_2), \\
e_4 = (0,0,1,0), \\
e_5 = (0,0,-z_1,-z_1^2/2), \\
e_6 = (1,0,0,z_3) \\
e_7 = (z_1, z_2, z_3 + C_7, 2z_4 + C_7 z_1)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[7,[6,29],1,3]: \\
e_1 = (0,0,0,1), \\
e_2 = (0,1,0,0), \\
e_3 = (0, B_3, 0, z_2), \\
e_4 = (0,0,1,0), \\
e_5 = (0,0,-z_1,-z_1^2/2), \\
e_6 = (1,0,0,z_3) \\
e_7 = (2z_1/3, z_2, 4z_3/3 - z_1^2/2 + C_7, 2z_4 - z_1^3/3 + C_7 z_1)
\end{gathered}
$$

Предложение 6 доказано.

Замечание 5. Легко указать некоторые очевидные ограничения на параметры выписанных базисов, упрощающие интегрирование полученных алгебр, а также отделяющие вырожденные орбиты этих алгебр от невырожденных. Например, для алгебр $[7,[6,29],1,1]$ и $[7,[6,29],1,3]$ параметр B_3 можно считать чисто мнимым и ненулевым ($B_3 = iB_{32}, B_{32} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Для невырожденных орбит алгебр $[7,[6,29],2,1]$ и $[7,[6,29],2,2]$ параметры n и m, соответственно, не могут принимать нулевые значения (а $B_3 = \pm i$ для этих алгебр), как отмечалось выше.

Однако даже с учетом этого замечания невырожденность орбит выписанных реализаций обсуждаемых алгебр при различных значениях других параметров не гарантирована; ее следует отдельно проверять. В то же время целью этого раздела статьи является доказательство утверждения об отсутствии невырожденных нетрубчатых орбит у 18 типов алгебр Ли, имеющих ниль-радикал $N_{[6,29]}$. Для достижения этой цели достаточно убедиться в трубчатости этих поверхностей.

Предложение 7. *Любая Леви-невырожденная (регулярная) 7-мерная орбита в $\mathbb{C}^4$ любой из пяти алгебр голоморфных векторных полей, построенных в предложении 6, голоморфно эквивалентна трубчатой гиперповерхности.*

Доказательство. Напомним сначала, что орбита 7-мерной алгебры Ли в $\mathbb{C}^4$, вообще говоря, может иметь размерность, меньшую 7, то есть такая орбита не обязательно является гиперповерхностью. Условием, гарантирующим для орбиты размерность 7, является по теореме Фробениуса (см. [2]), требование полноты вещественного ранга совокупности базисных полей этой алгебры (в точке пространства $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$, через которую эта орбита проходит).

Проверка условия полноты для каждой обсуждаемой алгебры сводится к вычислению ранга (7×8)-матрицы, составленной из вещественных и мнимых компонент ее базисных полей.

Отметим еще, что наличие трех выпрямленных базисных полей у этих алгебр позволяет упростить технические детали такой проверки, т.к. уравнения, отвечающие этим полям, имеют вид
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0.$$

Удаляя из (7×8)-матрицы три строки, отвечающие этим полям, и, соответственно, три столбца, содержащие удаляемые единичные элементы, сводим обсуждение к вычислению ранга матрицы размеров (4×5). Для любого базиса из предложения 6 такая матрица имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{32} & t_{44} & t_{45} \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y_3 \\ \alpha y_1 & \alpha y_1 & t_{73} & t_{74} & t_{75} \end{pmatrix}, \qquad (13)$$
где t_{ij} — элементы матрицы, несущественные для доказательства (принимающие различные значения для разных алгебр из предложения 6), $\alpha \neq 0$ — это коэффициент при переменной z_1 в первой компоненте поля e_7.

В матрице (13) нас интересует, прежде всего, минор 4-го порядка, получаемый удалением из нее 5-го столбца и равный $\alpha B_{32} y_1^2$ независимо от несущественных элементов.

Тем самым, в точках пространства $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющих условию $y_1 \neq 0$, обеспечен полный ранг (равный 4) матрицы (13) и размерность, равная 7, для орбит обсуждаемых алгебр, проходящих через такие точки (сами такие точки естественно называть точками общего положения для орбит обсуждаемых алгебр).

Более того, из независимости строк матрицы (13) следует, что производная $\partial\Phi/\partial y_4$ определяющей функции любой орбиты $M = \{\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0\}$ любой обсуждаемой алгебры отлична от нуля в точках такой орбиты. В самом деле, обращение в нуль этой производной означало бы (в силу выполнения четырех соотношений (1) для оставшихся невыпрямленными базисных полей) равенство нулю всех остальных частных производных

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y_3}.$$

А такое равенство противоречит условию регулярности орбит.

Таким образом, по теореме о неявной функции, любая из таких орбит может быть задана уравнением

$$\Phi = -y_4 + F(x_1, y_1, y_2, y_3) = 0. \tag{14}$$

с некоторой аналитической функцией F, зависящей от четырех переменных.

Для завершения доказательства предложения 7 нет необходимости решать полностью каждую из 5 таких систем для обсуждаемых 5 реализаций алгебр Ли. Заметим, что поля e_5 и e_6 имеют одинаковый вид для всех базисов этих реализаций. Соотношения (1) имеют для этих полей вид

$$e_5 : -y_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} - y_1 x_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0, \quad e_6 : \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + y_3\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0,$$

а с учетом вида (14) функции Φ орбиты они превращаются (в точках общего положения) в уравнения

$$\frac{\partial F(y_1, x_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} = x_1, \quad \frac{\partial F(y_1, x_1, y_2, y_3)}{\partial x_1} = y_3.$$

Это означает, что любая 7-мерная регулярная орбита в пространстве $\mathbb{C}^4$ любой из 5 обсуждаемых реализаций может быть описана уравнением

$$y_4 = x_1 y_3 + G(y_1, y_2) \tag{15}$$

с некоторой аналитической функцией двух переменных G.

На первый взгляд, мы получим при таких рассуждениях пять типов гиперповерхностей, не являющихся трубками, т.к. в последнее уравнение входят и вещественная, и мнимая части переменной z_1. Однако квадратичная (голоморфная) замена переменных

$$z_3^* = iz_3, \quad z_4^* = z_4 - z_1 z_3$$

превращает уравнение (15) в уравнение трубчатой гиперповерхности

$$y_4^* = -y_1 y_3^* + G(y_1, y_2).$$

Предложение 7 доказано.

Завершая статью, предъявим уравнения орбит, для которых в предложении 7 доказана сводимость к трубчатым поверхностям. Уравнения приводятся в форме, полученной при непосредственном интегрировании (в различных подслучаях) систем уравнений в частных производных, отвечающих выписанным базисам алгебр Ли. Уточним еще, что вещественные параметры $B_{32} = Im\, B_3, C_{31} = Re\, C_3, C_{71} = Re\, C_7$ — это вещественные и мнимые части параметров из комплексной формы записи базисных полей обсуждаемых алгебр.

$$[7,[6,29],1,1],\ C_3 = 0, m = 1/2: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} + C_{71} y_1 \ln y_1 + D y_1, \tag{16}$$

$$[7,[6,29],1,1],\ C_3 = 0,\ m \neq 1/2: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} - \frac{C_{71} y_1}{2m-1} + D y_1^{2m}, \tag{17}$$

$$[7,[6,29],1,1],\ C_3 \neq 0, m = 1: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{C_{31} y_1 y_2}{B_{32}} + \frac{y_2^2}{2B_{32}} - C_{71} y_1 + D y_1^2, \tag{18}$$

$$[7,[6,29],1,3]: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} - \frac{3C_{71} y_1}{4} + \left(\frac{\ln(y_1)}{2} + D\right) y_1^3, \tag{19}$$

$$[7,[6,29],2,1],\ m = n/2: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} + \frac{C_{71}}{n} y_1 \ln y_1 + D y_1, \tag{20}$$

$$[7,[6,29],2,1],\ m \neq n/2: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} - \frac{C_{71} y_1}{2m-n} + D y_1^{2m/n}, \tag{21}$$

$$[7,[6,29],2,2]: \quad y_4 = x_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2B_{32}} - \frac{3C_{71} y_1}{4m} + \left(\frac{\ln(y_1)}{2m} + D\right) y_1^3. \tag{22}$$

Отметим, что в приведенном списке орбит имеется очевидное сходство некоторых пар уравнений. Это означает, что среди оснований трубок, к которым сводятся все полученные орбиты, с точки зрения аффинной эквивалентности естественно выделить всего три разных семейства. Это, во-первых, степенные поверхности

$$y_4 = y_1 y_3 \pm y_2^2 + y_1^A,\ A \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

а кроме того, два типа «логарифмических поверхностей»:

$$y_4 = y_1 y_3 \pm y_2^2 + y_1 \ln y_1, \tag{24}$$

и

$$y_4 = y_1 y_3 \pm y_2^2 + y_1^3 (\ln y_1 + D),\ D \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

К степенным поверхностям (23) очевидными преобразованиями сводятся семейства (17) и (21); пара уравнений (16) и (20) превращается за счет аффинных преобразований в одно из двух уравнений (24); уравнения (19) и (22) сводятся к уравнениям семейства (25). Отметим еще, что в качестве частного случая семейства степенных поверхностей можно выделить трубку над квадрикой

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2,$$

к которой сводятся поверхности (18).

Факт сводимости орбит разных 7-мерных алгебр к одинаковым (с точки зрения голоморфной эквивалентности) поверхностям означает, что полные алгебры голоморфных симметрий этих орбит имеют размерность, большую чем 7. Рассмотренные нами 7-мерные алгебры из семейств $[7,[6,29],1,1]$ и $[7,[6,29],2,1]$, $[7,[6,29],1,3]$ и $[7,[6,29],2,2]$ являются подалгебрами таких больших по размерности алгебр, обеспечивающими по отдельности однородность орбит объемлющей алгебры. Такая ситуация не является экзотической для однородных многообразий. Например, аффинно однородные гиперповерхности (23) и (24) пространства $\mathbb{R}^4$ (имеющие в списке работы [11] номера 9 и 10) и, соответственно, трубки над ними обладают нетривиальными стабилизаторами.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 23-21-00109).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимова, Е. В. Компьютерные алгоритмы интегрирования матричных алгебр Ли / Е. В. Акимова, А. В. Лобода // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ. — Воронеж : Изд-во воронежск. гос. ун-та, 2015. — Вып. 9. — С. 3–8.

2. Бишоп, Р. Л. Геометрия многообразий / Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден. — М. : Мир, 1967. — 335 с.

3. Дубровин, Б. А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1969. — 376 с.

4. Крутских, В. В. Компьютерная обработка данных в одной многомерной математической задаче / В. В. Крутских, А. В. Лобода // Матер. XXI междунар. научно-технической конф. ИПМТ. — Воронеж : Изд-во воронежск. гос. ун-та, 2021. — С. 411–419.

5. Крутских, В. В. О голоморфных реализациях 7-мерных алгебр Ли / В. В. Крутских // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2023. — № 4. — С. 115–128.

6. Лобода, А. В. Голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Труды Московского математического общества. — 2020. — Т. 81, вып. 2. — С. 205–280. — DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/309

7. Лобода, А. В. Об алгоритмах описания однородных подмногообразий многомерных пространств / А. В. Лобода, А. В. Атанов, П. Е. Албуткина // Матер. XXVI междунар. научно-практической конф. ИПМТ. — Воронеж : Изд-во воронежск. гос. ун-та, 2024. — С. 380–391.

8. Лобода, А. В. О вырожденности орбит нильпотентных алгебр Ли / А. В. Лобода, В. К. Каверина // Уфимский математический журнал. — 2022. — Т. 14, № 1. — С. 57–83. — DOI: https://doi.org/10.13108/2022-14-1-52

9. Лобода, А. В. О 7-мерных алгебрах голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 5-мерный абелев идеал / А. В. Лобода, Р. С. Акопян, В. В. Крутских // Дальневосточный математический журнал. — 2023. — Т. 23, № 1. — С. 55–80. — DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202306

10. Лобода, А. В. О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ / А. В. Лобода // Труды Московского математического общества. — 2023. — Т. 84, вып. 2. — С. 205–230.

11. Можей, Н. П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии / Н. П. Можей // Изв. вузов. Матем. — 2000. — № 7. — С. 41–52.

12. Atanov, A. V. On Degenerate Orbits of Real Lie Algebras in Multidimensional Complex Spaces / A. V. Atanov, A. V. Loboda // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2023. —

Vol. 30, № 4. — P. 432–442. — DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920823040027

13. Cartan, E. Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1933. — Iss. 11. — № 4. — P. 17–90. — DOI: https://doi.org/10.1007/BF02417822

14. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals / VuA. Le, TuanA. Nguyen, TuT. C. Nguyen, TuyenT. M. Nguyen, ThieuN. Vo. — Ithaca, New York : Cornell University, 2021. — 24 p. — DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1311.6069

15. Gong, M. P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebrai-cally Closed Fields and R) / M. P. Gong. — Waterloo, Ontario : University of Waterloo, 1998. — 165 p.

16. Hindeleh, F. Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical / F. Hindeleh, G. Thompson // Algebras, Groups, and Geometries. — 2008. — Vol. 25, № 3. — P. 243–265.

17. Kolar, M. New examples of 2-nondegenerate real hypersurfaces in $\mathbb{C}^N$ with arbitrary nilpotent symbols / M. Kolar, I. Kossovskiy, D. Sykes. — Electronic text data. — Mode of access: https://arxiv.org/abs/2304.00619. — Title from screen.

18. Kruglikov, B. On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case / B. Kruglikov, A. Santi. — Electronic text data. — Mode of access: https://arxiv.org/abs/2302.04513. — Title from screen.

19. Loboda, A. V. On the Orbits of Nilpotent 7-dimensional Lie Algebras in 4-dimensional Complex Space / A. V. Loboda, R. S. Akopyan, V. V. Krutskikh // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. — 2020. — Vol. 13, iss. 3. — P. 360–372. — DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-3-360-372

20. Parry, A. R. A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals / A. R. Parry. — Logan, Utah : Utah State University, 2007. — 225 p. — DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1311.6069

REFERENCES

1. Akimova E.V., Loboda A.V. Kompyuternye algoritmy integrirovaniya matrichnykh algebr Li [Computer Algorithms for Integrating Matrix Lie Algebras]. *Sbornik studencheskikh nauchnykh rabot fakulteta kompyuternykh nauk VGU.*. Voronezh, Izd-vo voronezhsk. gos. un-ta, 2015, iss. 9, pp. 3-8.

2. Bishop R.L., Crittenden R.Dzh. *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of Manifolds]. Moscow, Mir Publ., 1967. 335 p.

3. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Modern Geometry. Methods and Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 376 p.

4. Krutskikh V.V., Loboda A.V. Kompyuternaya obrabotka dannykh v odnoy mnogomernoy matematicheskoy zadache [Computer Data Processing in One Multidimensional Mathematical Problem]. *Mater. XXI mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoy konf. IPMT.*. Voronezh, Izd-vo voronezhsk. gos. un-ta, 2021, pp. 411-419.

5. Krutskikh V.V. O golomorfnykh realizatsiyakh 7-mernykh algebr Li [On Holomorphic Realizations of 7-Dimensional Lie Algebras]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2023, no. 4, pp. 115-128.

6. Loboda A.V. Golomorfno odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ [Holomorphically Homogeneous Real Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 2020, vol. 81, iss. 2, pp. 205-280. DOI: https://doi.org/10.1090/mosc/309

7. Loboda A.V., Atanov A.V., Albutkina P.E. Ob algoritmakh opisaniya odnorodnykh podmnogoobraziy mnogomernykh prostranstv [On Algorithms for Describing Homogeneous Submanifolds of Multidimensional Spaces]. *Mater. XXVI mezhdunar. nauchno-prakticheskoy konf. IPMT.*. Voronezh, Izd-vo voronezhsk. gos. un-ta, 2024, pp. 380-391.

8. Loboda A.V., Kaverina V.K. O vyrozhdennosti orbit nilpotentnykh algebr Li [On Degeneracy of Orbits of Nilpotent Lie Algebras]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa Mathematical Journal], 2022, vol. 14, no. 1, pp. 57-83. DOI: https://doi.org/10.13108/2022-14-1-52

9. Loboda A.V., Akopyan R.S., Krutskikh V.V. O 7-mernykh algebrakh golomorfnykh vektornykh poley v $\mathbb{C}^4$, imeyushchikh 5-mernyy abelev ideal [On 7-Dimensional Algebras of Holomorphic Vector Fields in $\mathbb{C}^4$, Having a 5-Dimensional Abelian Ideal]. *Dalnevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2023, vol. 23, no. 1, pp. 55-80. DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202306

10. Loboda A.V. O 7-mernykh algebrakh Li, dopuskayushchikh Levi-nevyrozhdennye orbity v $\mathbb{C}^4$ [On 7-Dimensional Lie Algebras Admitting Levi-Nondegenerate Orbits in $\mathbb{C}^4$]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Transactions of the Moscow Mathematical Society], 2023, vol. 84, iss. 2, pp. 205-230.

11. Mozhei N.P. Odnorodnye podmnogoobraziya v chetyrekhmernoy affinnoy i proektivnoy geometrii [Homogeneous Submanifolds in Four-Dimensional Affine and Projective Geometry]. *Izv. vuzov. Matem.* [Russian Math. (Iz. VUZ)], 2000, no. 7, pp. 41-52.

12. Atanov A.V., Loboda A.V. On Degenerate Orbits of Real Lie Algebras in Multidimensional Complex Spaces. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2023, vol. 30, no. 4, pp. 432-442. DOI: https://doi.org/10.1134/S1061920823040027

13. Cartan E. Sur la Géométrie Pseudoconforme des Hypersurfaces de L'espace de Deux Variables Complexes. *Ann. Math. Pura Appl.*, 1933, iss. 11, no. 4, pp. 17-90. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02417822

14. Le VuA., Nguyen TuanA., Nguyen TuT.C., Nguyen TuyenT.M., Vo ThieuN. *Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals*. Ithaca, New York, Cornell University, 2021. 24 p. DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1311.6069

15. Gong M.P. *Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and R)*. Waterloo, Ontario, University of Waterloo, 1998. 165 p.

16. Hindeleh F., Thompson G. Seven Dimensional Lie Algebras with a Four-Dimensional Nilradical. *Algebras, Groups, and Geometries*, 2008, vol. 25, no. 3, pp. 243-265.

17. Kolar M., Kossovskiy I., Sykes D. *New examples of 2-nondegenerate real hypersurfaces in $\mathbb{C}^N$ with arbitrary nilpotent symbols*. URL: https://arxiv.org/abs/2304.00619.

18. Kruglikov B., Santi A. *On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case*. URL: https://arxiv.org/abs/2302.04513.

19. Loboda A.V., Akopyan R.S., Krutskikh V.V. On the Orbits of Nilpotent 7-Dimensional Lie Algebras in 4-Dimensional Complex Space. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2020, vol. 13, iss. 3, pp. 360-372. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-3-360-372

20. Parry A.R. *A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals*. Logan, Utah, Utah State University, 2007. 225 p. DOI: http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.1311.6069

APPLICATION OF SYSTEMS ANALYSIS AND COMPUTER ALGORITHMS IN STUDYING ORBITS OF 7-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS

Vladislav V. Krutskikh

Voronezh State University
krutskihvlad@mail.ru
Pl. Universitetskaya, 1, 394018 Voronezh, Russian Federation

Alexandr V. Loboda

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Leading Researcher,
Voronezh State Technical University
lobvgasu@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-0285-5841
Prosp. Moskovskiy, 14, 394000 Voronezh, Russian Federation

Abstract. We discuss a systematic approach to the problem of describing holomorphically homogeneous real hypersurfaces in the space $\mathbb{C}^4$, each of which is an orbit of some real Lie algebra. When studying the family of 7-dimensional Lie algebras, which plays an important role in the problem at hand and contains more than a thousand different types of algebras, it is natural to use computer algorithms. With the participation of the authors of this article, classification results on the orbits of several large blocks of algebras from this family were previously obtained. Relations are established between the presence and dimensions of nilpotent and Abelian subalgebras of the original Lie algebras and such properties of their orbits in $\mathbb{C}^4$ as Levi degeneracy and tubularity. In this article, the above ideas and computer algorithms are applied to a family of 18 types of 7-dimensional Lie algebras that have a common 6-dimensional nil-radical. Holomorphic realizations in $\mathbb{C}^4$ of these algebras are constructed and by integrating them, all holomorphically homogeneous (in the local sense) Levi-nondegenerate 7-dimensional orbits of this family are obtained. Using a quadratic change of variables, it is shown that all these orbits are holomorphically equivalent to tubular hypersurfaces.

Key words: homogeneous manifold, Lie algebra, nil-radical, Abelian subalgebra, holomorphic transformation, vector field, orbit of an algebra, tubular manifold, real hypersurface.