DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.3

УДК 517.95, 517.54
ББК 22.161.5

Дата поступления статьи: 08.07.2024
Дата принятия статьи: 15.08.2024

УСЛОВИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Владимир Михайлович Кесельман

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
РТУ МИРЭА — Российский Технологический Университет
vmkes@yandex.ru
Проспект Вернадского, 78, 119454 г. Москва, Российская Федерация

Татьяна Романовна Игонина

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
РТУ МИРЭА — Российский Технологический Университет
t-igonina@yandex.ru
Проспект Вернадского, 78, 119454 г. Москва, Российская Федерация

Ольга Юрьевна Козлова

Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики 3,
РТУ МИРЭА — Российский Технологический Университет
olishka1991@mail.ru
Проспект Вернадского, 78, 119454 г. Москва, Российская Федерация

Ольга Ригасовна Параскевопуло

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики 3,
РТУ МИРЭА — Российский Технологический Университет
olgapigpar@yandex.ru
Проспект Вернадского, 78, 119454 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Для двумерной непараметрической поверхности, заданной над всей плоскостью, в терминах емкости определяется понятие типа поверхности (параболический и гиперболический) и устанавливаются как достаточные, так и необходимые условия типа, выраженные в виде условий сходимости или расходимости соответствующих интегралов. Строится пример непараметрической поверхности гиперболического типа.

Ключевые слова: непараметрическая поверхность, риманово многообразие, емкость, параболический тип, гиперболический тип, объем геодезического шара.

Введение. Основные определения

В работе рассматривается произвольно заданная *непараметрическая поверхность*, точнее, график некоторой функции

$$z = f(x,\, y)\,, \tag{1}$$

которую будем считать достаточно гладкой и определенной для всех $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$.

Понятие типа поверхности первоначально возникло в начале прошлого века в теории двумерных римановых поверхностей и было связано со следующим известным фактом (частным случаем теоремы об униформизации): произвольная двумерная открытая односвязная поверхность (какой является заданная непараметрическая поверхность) всегда конформно отображается либо на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, либо на открытый единичный круг U^2. В первом случае поверхность называется*параболической* (или имеет*параболический тип*), во втором —*гиперболической* (или имеет*гиперболический тип*).

Естественно возник вопрос, в явном виде поставленный Л. Альфорсом в работе [4], как определить тип заданной поверхности без привлечения указанного конформного отображения. Этот вопрос стал известен в дальнейшем как «проблема типа для двумерных поверхностей».

В качестве инструмента, позволяющего определить тип поверхности, было использовано классическое, перенятое из физики, понятие емкости конденсатора на поверхности, которое, по отношению ко всей поверхности, удобно переиначить в емкость множества относительно «абсолюта» поверхности или, короче, в емкость множества на поверхности.

Понятие емкости множества может быть сформулировано не только для двумерной поверхности, но и для произвольного n-мерного ($n \geq 2$) *некомпактного* риманова многообразия M^n. (Метрику многообразия для краткости не указываем.)

Назовем *емкостью компакта* $K \subset M^n$ величину

$$\operatorname{cap}(K, M^n) := \inf \int_{M^n} |\nabla h|^2\, dv\,, \tag{2}$$

где inf берется по всем функциям $h \in C_0^1(M^n)$, таким что $h_{|K} \equiv 1$. Здесь градиент функции h и элемент объема dv рассматриваются в метрике многообразия M^n.

В терминах емкости определение типа произвольного n-мерного некомпактного многообразия (или поверхности) M^n опирается на хорошо известную альтернативу:

1) либо $\forall K \subset M^n$: $\quad \operatorname{cap}(K, M^n) = 0$,

2) либо $\forall K \subset M^n$: $\quad \operatorname{cap}(K, M^n) > 0$.

Здесь $K \subset M^n$ — отличный от точки континуум (т.е. связное компактное множество).

Тогда принимается следующее определение типа многообразия.

Определение 1. *Говорят, что некомпактное многообразие M^n в случае 1) имеет параболический тип, а в случае 2) имеет гиперболический тип.*

Легко видеть, что это определение для двумерной односвязной открытой поверхности эквивалентно приведенному выше классическому определению типа поверхности, использующему конформное отображение поверхности.

Действительно, при конформном отображении двумерной поверхности значения емкости соответствующих при отображении множеств не меняются и непосредственно проверяется, что $\operatorname{cap}(K, \mathbb{R}^2) = 0$ и $\operatorname{cap}(K, U^2) > 0$, ограничиваясь в качестве множеств K любыми замкнутыми кругами (ненулевого радиуса).

Однако при переходе от двумерного многообразия к n-мерному для определения его типа вообще нельзя использовать конформные отображения, ввиду известной теоремы Лиувилля об узости класса конформных отображений в $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

Одним из наиболее ярких достижений в решении проблемы типа можно считать полученное S. Yau, S. Cheng, 1975 г. (см. [5]) следующее достаточное условие параболического типа для произвольного некомпактного n-мерного многообразия M^n.

Теорема 1. Если многообразие M^n полное и n-мерный объем $V_n(r)$ шара радиуса r удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{V_n(r)}{r^2} < \infty\,,$$

то M^n имеет параболический тип.

Доказательство этой теоремы в [5] использовало не емкостное определение параболического типа многообразия, а эквивалентное определение типа в терминах теоремы Лиувилля для субгармонических функций на многообразии. «Емкостное» доказательство этой замечательной теоремы было получено, например, А. Григорьяном (в кандидатской диссертации 1982 г.), а в дальнейшем теорема была обобщена на случай p-емкостного типа ($p > 1$) многообразия в работах многих математиков.

Однако, как хорошо известно, приведенное достаточное условие параболического типа не является необходимым. Более того, существуют конкретные классы полных многообразий параболического типа, у которых n-мерный объем $V_n(r)$ шара радиуса r растет при $r \to +\infty$ быстрее любой заданной степени r. Ниже будут приведены примеры таких двумерных многообразий.

Большой вклад в проблематику, связанную с изучением и нахождением признаков параболического и гиперболического типов поверхности (или риманова многообразия), внес Владимир Михайлович Миклюков. В работе [1] им получены различные признаки емкостного типа поверхности, как параболического (в частности, некоторая модификации признака S. Yau, S. Cheng), так и гиперболического (связанного с изопериметрической функцией поверхности) типов. Там уже сказано, что «количество работ, выполненных по этой проблеме, весьма велико и непрерывно возрастает». В поздних трудах В.М. Миклюкова (например, в [2]) содержится и современная к тому времени библиография по указанной теме.

Далее, до конца нашей работы, мы будем рассматривать только двумерные непараметрические поверхности (1). Отметим, что для таких поверхностей Дж. Милнор в работе [8], 1977 г., поставил задачу о нахождении эффективных условий параболического и гиперболического типов.

В следующих разделах мы приведем некоторые такого рода условия, дополняющие известные, содержащиеся, например, в указанных работах В.М. Миклюкова.

1. Достаточные условия параболического типа

Достаточные условия параболического типа поверхности (1) будут непосредственно выведены из верхней оценки емкости множества на поверхности.

Прежде всего для произвольной точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ введем ее полярные координаты (ρ, φ), так что $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $f(x, y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ и найдем коэффициенты метрики g_{ij}, $i, j = 1, 2$, поверхности в этих координатах.

Обозначив $\bar{r} := \{x, y, f(x, y)\}$, находим

$$g_{11} = (\bar{r}'_\rho, \bar{r}'_\rho) = 1 + (f'_\rho)^2;\; g_{12} = (\bar{r}'_\rho, \bar{r}'_\varphi) = f'_\rho f'_\varphi;\; g_{22} = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\varphi) = \rho^2 + (f'_\varphi)^2 .$$

Здесь скобки $(,)$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, а символ f также используется для обозначения сложной функции $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ как функции, зависящей от (ρ, φ), т.е. $f = f(\rho, \varphi)$.

Тогда, применяя эти формулы, запишем для произвольной гладкой функции h на поверхности выражение для $|\nabla h|^2$ в метрике поверхности в полярных координатах, считая, естественным образом, что $h = h(\rho, \varphi)$. Поскольку

$$|\nabla h|^2(\rho, \varphi) = g^{11}(h'_\rho)^2 + 2g^{12}h'_\rho h'_\varphi + g^{22}(h'_\varphi)^2 ,$$

где (g^{ij}) — обратная к (g_{ij}) матрица, то

$$|\nabla h|^2(\rho, \varphi) = \frac{1}{g}\Big((\rho^2 + (f'_\varphi)^2)(h'_\rho)^2 - 2f'_\rho f'_\varphi h'_\rho h'_\varphi + (1 + (f'_\rho)^2))(h'_\varphi)^2\Big) , \tag{3}$$

$$g = g(\rho, \varphi) := det(g_{ij}) = \rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2 . \tag{4}$$

Получим верхнюю оценку емкости (2), где в качестве множества K, отождествляя его с его прообразом в плоскости полярных координат, возьмем прямоугольник

$$K = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}. \tag{5}$$

В полярных координатах определение (2) для поверхности (1) имеет следующий вид

$$\mathrm{cap}\,(K, M^2) := \inf \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} |\nabla h|^2(\rho, \varphi)\sqrt{g(\rho, \varphi)}\, d\varphi , \tag{6}$$

где inf берется по всем функциям $h \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, таким что $h_{|K} \equiv 1$. (При желании условие гладкости функций h можно ослабить, например, до локальной липшицевости.) Такие функции h называются *допустимыми для емкости* $\mathrm{cap}\,(K, M^2)$.

Возьмем произвольную допустимую для емкости $\mathrm{cap}\,(K, M^2)$ функцию h, зависящую только от ρ, т.е. $h = h(\rho)$. Тогда из определения (6) для указанного множества (5), на основании выражений (3) и (4), следует неравенство

$$\mathrm{cap}\,(K, M^2) < \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 + (f'_\varphi)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}} (h'_\rho)^2\, d\varphi . \tag{7}$$

Теперь конкретизируем допустимую функцию $h(\rho)$, определяя ее следующим образом. Зафиксируем произвольное вещественное значение $r > 1$ и положим

$$h(\rho) = 1 \text{ при } 0 \le \rho \le 1; \quad h(\rho) = 0 \text{ при } \rho \ge r ,$$

$$h(\rho) := \int_\rho^r \frac{dt}{\int_0^{2\pi} F(t, \varphi)\, d\varphi} \cdot \left(\int_1^r \frac{dt}{\int_0^{2\pi} F(t, \varphi)\, d\varphi}\right)^{-1} \quad \text{при} \quad 1 \le \rho \le r ,$$

где через $F(t, \varphi)$ обозначено (с заменой t на ρ)

$$F(\rho, \varphi) := \frac{\rho^2 + (f'_\varphi)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}\,. \tag{8}$$

Очевидно, такая функция $h(\rho)$ действительно является допустимой для емкости указанного множества (5). Поэтому, подставляя эту функцию $h(\rho)$ в неравенство (7), после простых преобразований получаем оценку:

$$\operatorname{cap}(K, M^2) < \left(\int_1^r \frac{d\rho}{\int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi)\, d\varphi}\right)^{-1}$$

для любого значения $r > 1$. Отсюда, устремляя $r \to +\infty$, приходим к итоговой верхней оценке емкости $\operatorname{cap}(K, M^2)$, которую, в целях удобства, сформулируем полностью в виде леммы.

Лемма 1. *На непараметрической поверхности (1) рассмотрим множество K вида (5) в полярных координатах.*

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\operatorname{cap}(K, M^2) \le \left(\int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi)\, d\varphi}\right)^{-1}, \tag{9}$$

где выражение $F(\rho, \varphi)$ определено в (8).

Теперь из оценки (9), в силу определения параболического типа поверхности, сразу получаем достаточное условие параболического типа поверхности (1).

Теорема 2. *Предположим, что для непараметрической поверхности (1) выполняется следующее условие*

$$\int_1^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 + (f'_\varphi)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}\, d\varphi\right)^{-1} d\rho = +\infty\,. \tag{10}$$

Тогда поверхность (1) имеет параболический тип.

Следствие 1. *Предположим, что для непараметрической поверхности (1) выполняется следующее условие*

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (f'_\varphi)^2}\, d\varphi} = +\infty\,. \tag{11}$$

Тогда поверхность (1) имеет параболический тип.

В частности, поверхность (1) будет параболической, если величина $|f'_\varphi|$ растет при $\rho \to +\infty$ не быстрее, чем ρ. Например, поверхность (1) в случае, когда f зависит только от ρ (т.е. когда (1) — поверхность вращения), всегда имеет параболический тип, независимо от вида функции $f(\rho)$, $\rho \ge 0$. Тем самым, мы подтвердили высказанное выше, при обсуждении теоремы 1, утверждение, что на параболической поверхности рост объема шара (в нашем случае, площади круга) радиуса r может быть сколь угодно большим при $r \to +\infty$.

2. Достаточные условия гиперболического типа

Достаточные условия гиперболического типа поверхности (1) выведем из нижней оценки емкости множества на поверхности. Будем использовать без напоминаний или пояснений принятые в разделе 1 обозначения.

Для получения названной оценки нам потребуется следующее неравенство

$$|\nabla h|^2 \geq \frac{(h'_\rho)^2}{1+(f'_\rho)^2}\,. \tag{12}$$

Это неравенство может быть получено из геометрических соображений, но легко выводится и чисто формально, исходя из формулы (3). В самом деле, выделим в правой части этой формулы (в выражении, стоящем в скобках) полный квадрат

$$\left(\frac{f'_\rho f'_\varphi}{\sqrt{1+(f'_\rho)^2}}\,h'_\rho - \sqrt{1+(f'_\rho)^2}\,h'_\varphi\right)^2$$

и отбросим его, уменьшив всю правую часть до следующего выражения

$$\frac{1}{g}\left((\rho^2+(f'_\varphi)^2) - \frac{(f'_\rho)^2(f'_\varphi)^2}{1+(f'_\rho)^2}\right)(h'_\rho)^2\,,$$

которое, ввиду формулы (4), совпадает с правой частью неравенства (12). Тем самым, это неравенство доказано.

Перейдем теперь к выводу нижней оценки емкости $\operatorname{cap}(K, M^2)$, где компактное множество K определено (5).

Возьмем произвольную допустимую для этой емкости функцию $h = h(\rho,\varphi)$, так что $h \equiv 1$ при $0 \leq \rho \leq 1$ и $h \equiv 0$ при $\rho \geq r$ для некоторого числа $r > 1$.

Тогда для любого фиксированного значения $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$1 = |h(r,\varphi) - h(1,\varphi)| \leq \int_1^r |h'_\rho(\rho,\varphi)|d\rho\,.$$

Отсюда, применяя к правой части неравенство Гельдера, получаем неравенство

$$1 \leq \left(\int_1^r H(\rho,\varphi)(h'_\rho(\rho,\varphi))^2\,d\rho\right)^{1/2}\left(\int_1^r \frac{d\rho}{H(\rho,\varphi)}\right)^{1/2}$$

для любой непрерывной положительной функции $H(\rho,\varphi)$. Проинтегрируем обе части этого неравенства по $\varphi \in [0, 2\pi]$ и вновь применим неравенство Гельдера:

$$2\pi \leq \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^r H(\rho,\varphi)(h'_\rho(\rho,\varphi))^2\,d\rho\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^r \frac{d\rho}{H(\rho,\varphi)}\right)^{1/2}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^r H(\rho,\varphi)(h'_\rho(\rho,\varphi))^2\,d\rho \geq 4\pi^2\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^r \frac{d\rho}{H(\rho,\varphi)}\right)^{-1}.$$

Теперь конкретизируем функцию $H(\rho, \varphi)$, полагая

$$H(\rho, \varphi) = \frac{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}{1 + (f'_\rho)^2}\,.$$

Тогда, используя неравенство (12) и учитывая формулу (4) для g, из последнего неравенства приходим к оценке

$$\int_{M^2} |\nabla h|^2\, dv \geq 4\pi^2 \left(\iint_{1 \leq |\rho| \leq r} \frac{1 + (f'_\rho)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}\, d\rho\, d\varphi \right)^{-1}.$$

Здесь dv — элемент двумерного объема (т.е. площади) данной поверхности, который в полярных координатах имеет вид $dv = \sqrt{g(\rho, \varphi)}$, где $g(\rho, \varphi)$ указано в (4).

Наконец, из последнего неравенства, на основании определения емкости $\operatorname{cap}(K, M^2)$ и ввиду произвольности допустимой функции h, получаем итоговую нижнюю оценку этой емкости, которую, в целях удобства, сформулируем полностью в виде леммы.

Лемма 2. *На непараметрической поверхности (1) рассмотрим множество K вида (5) в полярных координатах. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\operatorname{cap}(K, M^2) \geq 4\pi^2 \left(\iint_{|\rho| \geq 1} \frac{1 + (f'_\rho)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}\, d\rho\, d\varphi \right)^{-1}. \tag{13}$$

Теперь из оценки (13), в силу определения гиперболического типа поверхности, сразу получаем достаточное условие такого типа поверхности (1).

Теорема 3. *Предположим, что для непараметрической поверхности (1) выполняется следующее условие*

$$\iint_{|\rho| \geq 1} \frac{1 + (f'_\rho)^2}{\sqrt{\rho^2(1 + (f'_\rho)^2) + (f'_\varphi)^2}}\, d\rho\, d\varphi < +\infty\,. \tag{14}$$

В декартовых координатах это условие имеет вид:

$$\iint_{|\rho| \geq 1} \frac{1 + (\nabla f, e_\rho)^2}{\rho \sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\, dx\, dy < +\infty\,, \tag{15}$$

где e_ρ — единичный вектор в точке (x, y), направленный вдоль радиус-вектора. Тогда поверхность (1) имеет гиперболический тип.

Следствие 2. *Предположим, что для непараметрической поверхности (1) выполняются следующие условия*

$$\forall(\rho,\ \varphi): \qquad |f'_\rho| < C < +\infty \tag{16}$$

для некоторого числа C и

$$\iint_{|\rho| \geq 1} \frac{d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + (f'_\varphi)^2}} < +\infty\,. \tag{17}$$

Тогда поверхность (1) имеет гиперболический тип.

Заметим, что для выполнимости условия (14) или условий (16), (17) величина $|f'_\varphi|$ должна расти (при $\rho \to +\infty$) быстрее, чем ρ и одновременно быстрее, чем $|f'_\rho|$.

Близкое по форме (15) (но другое по характеру) условие гиперболического типа непараметрической двумерной поверхности получено в монографии [3], стр. 240.

Рассмотрим одно применение полученных условий гиперболического типа поверхности. В конце 50-х годов прошлого века известный специалист в теории римановых поверхностей Loewner поставил вопрос о существовании непараметрической поверхности гиперболического типа. Вскоре примеры таких поверхностей были построены несколькими крупными математиками, такими как H. Huber [7] (1959), J. Jenkins [6] (1960), R. Osserman [9] (1961). К сожалению, в этих работах (тех, которые нам удалось найти) не приводится общего условия гиперболичности типа поверхности и обоснования гиперболичности построенных поверхностей специфичны только для предложенных конструкций этих поверхностей.

Опишем конструкцию непараметрической поверхности, гиперболичность которой выводится из условий (16) и (17). Эта конструкция легко обобщается и приводит к достаточно широкому классу гиперболических непараметрических поверхностей, но для большей наглядности ограничимся лишь одним конкретным примером.

Пример непараметрической поверхности гиперболического типа

Разобьем плоскость концентрическими кольцами

$$D(t_{n-1}, \tilde{t}_n) := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : t_{n-1} \le \rho \le \tilde{t}_n\}, \quad D(\tilde{t}_n, t_n) := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{t}_n \le \rho \le t_n\}\,,$$

где $t_0 = 0$ и последовательности $\{t_n\}$ и $\{\tilde{t}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, зададим так:

$$\tilde{t}_n = t_{n-1} + 2^{-n}, \quad t_n = \tilde{t}_n + 1\,.$$

В кольце $D(t_{n-1}, \tilde{t}_n)$ определим функцию $f(x,y)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, следующим образом:

$$f(x,y) := (\rho - t_{n-1})\sin(a_n\varphi) + 2(\tilde{t}_n - \rho)\sin(a_{n-1}\,\varphi)\,,$$

где $a_0 = 0$, $a_n = 2^n\, n^4$, $n = 1, 2, \ldots$.

Значит, в этом кольце $D(t_{n-1}, \tilde{t}_n)$ на его граничных окружностях $\rho = t_{n-1}$ и $\rho = \tilde{t}_n$ функция $f(x,y)$ принимает значения

$$f(x,y)|_{\rho = t_{n-1}} = \frac{\sin(a_{n-1}\,\varphi)}{2^{n-1}}, \quad f(x,y)|_{\rho = \tilde{t}_n} = \frac{\sin(a_n\,\varphi)}{2^n}.$$

Отсюда видим, что на граничных окружностях $\rho = \tilde{t}_n$ и $\rho = t_n$ функция $f(x,y)$ при одном и том же φ принимает одинаковые значения, равные $2^{-n}\sin(a_n\,\varphi)$. Поэтому в кольце $D(\tilde{t}_n, t_n)$ функцию $f(x,y)$ зададим так: $f(x,y) := 2^{-n}\sin(a_n\,\varphi)$.

В результате функция $f(x,y)$ корректно определена и непрерывна в $\mathbb{R}^2$, является гладкой за исключением граничных окружностей указанных колец. При необходимости на этих стыках функцию $f(x,y)$ можно сгладить с любой степенью гладкости. Таким образом, непараметрическая поверхность (1) построена.

Нетрудно доказать, что такая поверхность удовлетворяет условиям (16) и (17) и, следовательно, имеет гиперболический тип.

Благодарность. Первый из авторов данной статьи, я испытываю огромную благодарность и высокое уважение Владимиру Михайловичу Миклюкову — своему бесценному научному руководителю и Учителю!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158.

2. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти-квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 530 с.

3. Миклюков, В. М. Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применение / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — 273 с.

4. Ahlfors, L. Sur le type d'une surface de Eiemann / L. Ahlfors // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. — 1935. — Vol. 201. — P. 30–32.

5. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric application / S. Y. Cheng, S.-T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28. — P. 333–354.

6. Jenkins, J. A. On hiperbolic surfaces in three-dimensional Euclidean space / J. A. Jenkins // Michigan Math. J. — 1961. — Vol. 8, № 1. — P. 1–5.

7. Huber, H. Riemannsche Flachen von hiperbolischem Typus im euklidischen Raum / H. Huber // Math. Ann. — 1959. — Vol. 139. — P. 140–146.

8. Milnor, J. On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic / J. Milnor // Amer. Math. Monthly. — 1977. — Vol. 84, № 1. — P. 43–46.

9. Osserman, R. Hyperbolic surfaces of the form $z = f(x, y)$ / R. Osserman // Math. Annalen. — 1961. — Vol. 144. — P. 77–79.

REFERENCES

1. Miklyukov V.M. Nekotorye priznaki parabolichnosti i giperbolichnosti granichnykh mnozhestv poverkhnostey [Some Criteria of Parabolicity and Hyperbolicity of Boundary Sets of Surfaces]. , 1996, vol. 60, no. 4, pp. 111-158.

2. Miklyukov V.M. *Geometricheskiy analiz. Differentsialnye formy, pochti-resheniya, pochti-kvazikonformnye otobrazheniya* [Geometric Analysis. Differential Forms, Almost-Solutions, Almost-Quasiconformal Mappings]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2007. 530 p.

3. Miklyukov V.M. *Konformnoe otobrazhenie neregulyarnoy poverkhnosti i ego primenenie* [Conformal Mapping of an Irregular Surface and Its Application]. Volgograd, Izd-vo VolGU, 2005. 273 p.

4. Ahlfors L. Sur Le Type D'une Surface de Eiemann. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 1935, vol. 201, pp. 30-32.

5. Cheng S.Y., Yau S.-T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Application. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, pp. 333-354.

6. Jenkins J.A. On Hiperbolic Surfaces in Three-Dimensional Euclidean Space. *Michigan Math. J.*, 1961, vol. 8, no. 1, pp. 1-5.

7. Huber H. Riemannsche Flachen Von Hiperbolischem Typus Im Euklidischen Raum. *Math. Ann.*, 1959, vol. 139, pp. 140-146.

8. Milnor J. On Deciding Whether a Surface Is Parabolic Or Hyperbolic. *Amer. Math. Monthly*, 1977, vol. 84, no. 1, pp. 43-46.

9. Osserman R. Hyperbolic Surfaces of the Form $z = f(X, y)$. *Math. Annalen*, 1961, vol. 144, pp. 77-79.

CONDITIONS OF PARABOLIC AND HYPERBOLIC TYPES OF NONPARAMETRIC SURFACE

Vladimir M. Keselman

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
RTU MIREA — Russia Technological University
vmkes@yandex.ru
Vernadsky avenue, 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Tatyana R. Igonina

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
RTU MIREA — Russia Technological University
t-igonina@yandex.ru
Vernadsky avenue, 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Olga Y. Kozlova

Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
RTU MIREA — Russia Technological University
olishka1991@mail.ru
Vernadsky avenue, 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Olga R. Paraskevopulo

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Higher Mathematics 3,
RTU MIREA — Russia Technological University
olgapigpar@yandex.ru
Vernadsky avenue, 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Abstract. A nonparametric two-dimensional surface is considered, i.e. the graph of some smooth function $f = f(x, y)$ defined over the entire plane. The surface type is defined in terms of the two-dimensional capacity of a compact set on the surface as follows. If the capacity of any non-degenerate continuum on the surface is zero, then the surface has a parabolic type, and if the capacity of any non-degenerate continuum on the surface is positive, then the surface has a hyperbolic type. The paper establishes integral conditions for the function f defining the surface, under which the surface has one or another type. These conditions are expressed as conditions of convergence or divergence of the corresponding integrals and characterize the degree of growth (for $\rho \to +\infty$) of the partial derivatives $|f'_\rho|$ and $|f'_\varphi|$, where ρ and φ are the polar coordinates of a point (x, y) of the plane over which the surface lies. It turns out that if the degree of growth of the function $|f'_\varphi|$ is small, or more precisely, less than the growth of a linear function of ρ, then, regardless of the growth rate of $|f'_\rho|$, the surface is of parabolic type. But if (for $\rho \to +\infty$) the growth of the function $|f'_\varphi|$ exceeds the linear growth of ρ, and at the same time exceeds the growth of

$|f'_\rho|$, then the surface is of hyperbolic type. Using the obtained conditions of the hyperbolic type of surface, the construction of an example of a nonparametric surface of hyperbolic type is described. This example complements the known examples of this type constructed by various famous mathematicians back in the late 50s of the last century. But the justifications of these examples, unlike the example proposed in this paper, do not rely (explicitly) on any general condition of the hyperbolic type of surface.

Key words: nonparametric surface, Riemannian manifold, capacity, parabolic type, hyperbolic type, volume of a geodesic ball.