Памяти Владимира Михайловича Миклюкова

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.3.2

УДК 514.76.3+517.95
ББК 22.151.62

Дата поступления статьи: 23.07.2024
Дата принятия статьи: 02.08.2024

ОЦЕНКИ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ ОБЛАСТЕЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И УСТОЙЧИВОСТЬ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Равновесные поверхности имеют происхождение из механики жидкостей и газов как поверхности раздела двух сред, находящихся в равновесии. Условие равновесия возникает из условия минимума потенциальной энергии соответствующей механической системы. К равновесным поверхностям относятся классы минимальных поверхностей, поверхностей постоянной средней кривизны и равновесные капиллярные поверхности. Исследование устойчивости равновесных поверхностей тесно связано с вопросами существования решения вариационной многомерной задачи на минимум функционала потенциальной энергии. В частности, неустойчивые решения соответствующих дифференциальных уравнений не реализуемы в природе. Устойчивость характеризуется положительностью формы второй вариации соответствующего функционала (например, функционала площади для минимальных поверхностей). В большинстве случаев это свойство означает нижнюю оценку величины, похожей на основную частоту области на поверхности. В настоящей статье, следуя подходу Ш.Т. Яу, получены нижние оценки величины, обобщающей основную частоту области. На основании этих оценок доказываются условия устойчивости минимальных поверхностей и поверхностей постоянной средней кривизны.

Ключевые слова: основная частота, минимальная поверхность, вариация площади, устойчивость минимальной поверхности, равновесная поверхность.

1. Равновесные поверхности и их устойчивость

Пусть $\mathbb{R}^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное евклидово пространство, в котором введен ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Через $\langle , \rangle$ мы обозначаем скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ — соответствующие выбранному базису декартовы координаты.

Согласованную со скалярным произведением связность в $\mathbb{R}^{n+1}$ мы будем обозначать через $\overline{\nabla}$.

Пусть M — n-мерное, некомпактное, связное, ориентируемое C^2-многообразие с кусочно-гладким краем ∂M (случай $\partial M = \emptyset$ не исключается). Будем рассматривать поверхности $\mathcal{M} = (M, u)$, заданные C^2-погружением $u: \ M \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Связность $\overline{\nabla}$ индуцирует соответствующую связность ∇ на поверхности $\mathcal{M}$. Для произвольных C^1-гладких векторных полей X, Y на $\mathcal{M}$ и функции $h \in C^1(\mathcal{M} = (M, u))$ связность ∇ определяется следующим образом. Рассматриваются произвольные C^1 продолжения векторных полей X, Y и функции h в некоторую окрестность поверхности $\mathcal{M}$. Тогда

$$\nabla h = (\overline{\nabla} h)^T, \quad \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

где $(v)^T$ — ортогональная проекция вектора v на касательную плоскость $T_{u(m)}\mathcal{M}$ к поверхности $\mathcal{M}$.

Пусть $m \in M$ и в некоторой окрестности точки $u(m)$ определены гладкие векторные поля X и Y. Билинейная форма

$$B(X(m), Y(m)) = (\overline{\nabla}_X Y)(u(m)) - (\overline{\nabla}_X Y)^T(u(m))$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности $\mathcal{M}$ [4, т. 2, § 3]. Если $\{E_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в касательном пространстве к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$, то вектор

$$\vec{H}(m) = \frac{1}{n}\,\mathrm{trace} B = \frac{1}{n}\ \sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i)$$

называется *вектором средней кривизны* поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$.

Пусть $N_{u(m)}\mathcal{M}$ — нормальное пространство к поверхности $\mathcal{M}$ в точке $u(m)$. Для произвольного вектора $v \in N_{u(m)}\mathcal{M}$ пусть A^v означает гомоморфизм Вейнгартена [4, гл. VII, § 3], определяемый как линейное преобразование $A^v : T_{u(m)}\mathcal{M} \to T_{u(m)}\mathcal{M}$, двойственное к билинейной форме B:

$$\langle A^v(X), Y\rangle = \langle B(X, Y), v\rangle = -\langle \overline{\nabla}_X v, Y\rangle. \tag{1}$$

Положим

$$||A^v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |A^v(E_i)|^2,$$

где $\{E_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в $T_{u(m)}\mathcal{M}$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — некоторая область и $\Omega_1 \subset \Omega$ — ее подобласть, такая, что $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega = \mathcal{M}$. Предположим, что в $\mathbb{R}^{n+1}$ определены неотрицательные C^2-функции $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$.

Будем рассматривать функционалы, выражаемые интегралами

$$A(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \alpha(x) d\mathcal{M}, \quad G(\mathcal{M}) = \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x) dx,$$

$$W(\mathcal{M}) = A(\mathcal{M}) + G(\mathcal{M}). \tag{2}$$

Заметим, что функции $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$ с физической точки зрения являются поверхностной и объемной плотностями сил действующих на элемент жидкости, занимающей объем области Ω_1.

Пусть v — сечение нормального расслоения поверхности $\mathcal{M}$. Продолжим поле v до векторного поля V на некоторую окрестность поверхности $\mathcal{M}$, интегральными кривыми которого служат прямые линии. Обозначим через $F_t : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов поля V, а через $\mathcal{M}_t = F_t(\mathcal{M})$ — соответствующую ей вариацию поверхности $\mathcal{M}$, а через $\Omega_1(t) = F_t(\Omega_1)$ — соответствующую вариацию области Ω_1. Рассмотрим функции $A(t) = A(\mathcal{M}_t)$, $G(t) = G(\mathcal{M}_t)$. Поверхность назовем экстремальной для функционала $W(\mathcal{M})$, если производная $W'(0) = 0$, для всякого нормального сечения v с компактным носителем на поверхности $\mathcal{M}$. Здесь $W(t) = A(t) + G(t)$. Кроме этого, если для всех вариаций, порождаемых сечениями V нормального расслоения экстремальной поверхности $\mathcal{M}$, выполнено $W''(0) > 0$, тогда поверхность будем называть *устойчивой*.

Отметим монографию Р. Финна [10], посвященную исследованию равновесных капиллярных поверхностей, которые в наших терминах моделируются случаем $\varphi(x) = \mathrm{const} \cdot x_3$, $n = 2$. Устойчивость капиллярных поверхностей вращения в $\mathbb{R}^3$ исследована в работе Х. Уента [12]. Для понимания физического явления неустойчивости можно обратиться также к книге [7], в которой приведены эксперименты и построены соответствующие математические модели различных типов неустойчивостей несжимаемых жидкостей в поле тяготения, заряженных жидкостей в электрическом поле и магнитных жидкостей в магнитных полях. При численном моделировании явлений устойчивости и неустойчивости можно воспользоваться методом конечных элементов, конструируя равновесные поверхности в классе пространственных триангуляций по аналогии с методом, описанным в работе [1].

В [3] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Выполнены следующие равенства*

$$\left.\frac{dW(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int\limits_{\mathcal{M}} \langle \overline{\nabla}\alpha, v\rangle - \alpha n \langle v, \vec{H}\rangle + \varphi\langle v, \xi\rangle d\mathcal{M},$$

$$\left.\frac{d^2W(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \left(\alpha\left(|\nabla v|^2 + (n^2H^2 - ||A||^2)\right) + \left(\langle\overline{\nabla}\varphi, \xi\rangle - nH\varphi\right)\right)\langle v, \xi\rangle^2 - \right.$$

$$\left. -2\langle\overline{\nabla}\alpha, v\rangle nH\langle v, \xi\rangle + \mathrm{Hess}\,\alpha(v, v)\right\} d\mathcal{M},$$

где v — варьирующее нормальное векторное поле; ξ – внешняя по отношению к области Ω единичная нормаль к поверхности $\mathcal{M}$; $H = \langle\vec{H}, \xi\rangle$ — средняя кривизна; $||A||$ — длина второй квадратичной формы поверхности $\mathcal{M}$, $Hess\ \alpha(\cdot,\cdot)$ — гессиан функции α.

Пример. Пусть объем $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ занимает жидкость, а $\mathcal{M}$ — свободная поверхность этой жидкости (то есть поверхность жидкости, не соприкасающаяся с твердым телом). Предположим, что жидкость находится в равновесии в гравитационном поле с потенциалом, равным $\varphi(x)$. Если $\alpha = \mathrm{const}$ — коэффициент поверхностного натяжения, то полная энергия данной механической системы равна

$$W_0(\mathcal{M}) = \alpha|\mathcal{M}| + \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)dx,$$

где $|\mathcal{M}|$ — площадь поверхности. Хорошо известно, что механическая система находится в равновесии, если вариация ее потенциальной энергии равна нулю. Используя теорему 1, последнее условие можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathcal{M}} (\varphi - n\alpha H)hd\mathcal{M} = 0,$$

где $h = \langle v, \xi \rangle$. Если мы считаем, что жидкость несжимаема, то последнее соотношение должно быть выполнено не при всех вариациях поверхности $\mathcal{M}$, а только для тех, для которых вариация объема жидкости равна нулю. Как нетрудно видеть (опять же из теоремы 1), последнее имеет место при условии

$$\int\limits_{\mathcal{M}} hd\mathcal{M} = 0,$$

если мы считаем, что жидкость однородна и ее плотность $\rho = 1$. Используя основную лемму вариационного исчисления и метод множителей Лагранжа при решении задач условного экстремума, приходим к равенству

$$\varphi - n\alpha H = \lambda \equiv \mathrm{const},$$

или

$$n\alpha H = \varphi + \lambda.$$

Таким образом, экстремали функционала W_0 в рассматриваемом примере имеют среднюю кривизну, определяемую с точностью до постоянной потенциалом $\varphi(x)$. Из теоремы 1 так же находим условие устойчивого равновесия

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{\alpha\left(|\nabla h|^2 + (n^2H^2 - ||A||^2) + (\langle\overline{\nabla}\varphi, \xi\rangle - nH\varphi - nH\lambda)h^2\right)\right\} d\mathcal{M} \geq 0.$$

Это неравенство должно быть выполнено для всех C^1-функций $h(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$h(x)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \int\limits_{\mathcal{M}} h(x)d\mathcal{M} = 0. \tag{3}$$

Используя равенство нулю первой вариации, это неравенство перепишется в виде

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{\alpha\left(|\nabla h|^2 + (\langle\overline{\nabla}\varphi, \xi\rangle - ||A||^2)h^2\right)\right\} d\mathcal{M} \geq 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что условие (4) не зависит от постоянной λ.

Определение. Поверхность $\mathcal{M}$ назовем экстремальной поверхностью для функционала $W_0(\mathcal{M})$, если для некоторой постоянной λ выполнено равенство

$$\varphi - n\alpha H = \lambda \equiv \text{const}.$$

При этом поверхность $\mathcal{M}$ называется *устойчивой*, если неравенство (4) выполнено для любой C^1-гладкой функции $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ и такой, что выполнены равенства (3).

Всюду ниже в статье рассматривается случай функционала $W_0(\mathcal{M})$, когда $\alpha \equiv 1$.

Пусть $\mathcal{M} = (M, u)$ — n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Мы введем следующие величины:

$$\mu_A(\mathcal{M}) = \inf \frac{\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 d\mathcal{M}}{\int\limits_{M} ||A||^2 h^2 d\mathcal{M}}, \quad \mu(\mathcal{M}) = \inf \frac{\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla h|^2 d\mathcal{M}}{\int\limits_{M} h^2 d\mathcal{M}}, \tag{5}$$

где точная нижняя грань взята по всем липшицевым функциям $h(m) : M \to \mathbb{R}$ таким, что $h(m)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$.

Замечание. *Предположим, что* $\varphi(x) \equiv 1$. *Тогда экстремали функционала* $W_0(\mathcal{M})$ *суть поверхности постоянной средней кривизны. В этом случае условие устойчивости запишется в виде*

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ \left(|\nabla h|^2 - ||A||^2 h^2 \right) \right\} d\mathcal{M} \geq 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что поверхность постоянной средней кривизны устойчива тогда и только тогда, когда $\mu_A(\mathcal{M}) \geq 1$. *Отметим, что для минимальных гиперповерхностей в работе* [2] *предложен емкостный подход к оценке величины* $\mu_A(\mathcal{M})$.

В настоящей статье мы доказываем оценки величин вида (5) в более общем виде на основе полученных оценок условия устойчивости минимальных гиперповерхностей.

2. Основная оценка

Пусть M — n-мерное, C^2-гладкое риманово многообразие. Через ∇ будем обозначать стандартную связность на M, ассоциированную с римановой метрикой на M. Соответствующее скалярное произведение в касательных пространствах к M будем обозначать через $\langle , \rangle$. Для произвольного гладкого векторного поля X на M величина дивергенции определяется по формуле

$$\text{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle,$$

где $E_i, i = 1, ..., n$ — ортонормированный базис в касательной плоскости M. Пусть для отображения $M \times TM \to TM$, $(x, \xi) \mapsto \Phi(x, \xi) \in T_x M$ выполнены условия:

$$\langle \Phi(x, \xi), \xi \rangle \geq 0, \text{ для всех } x \in M, \xi \in T_x M, \tag{7}$$

$$(\langle \Phi(x, \xi), \eta \rangle)^2 \leq \langle \Phi(x, \xi), \xi \rangle \langle \Phi(x, \eta), \eta \rangle. \tag{8}$$

Пусть также имеется функция $p(t) \in C^1(\mathbb{R})$, $p(t) \geq 0$, $p(0) = 0$ и неотрицательная функция $h(t) \in C^1(\mathbb{R}), h(t) > 0, t > 0$ и пусть

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} h'(t) = q > 0. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение произвольную неотрицательную функцию $\sigma(t)$, удовлетворяющую условию

$$\sigma(t) > 0, \sigma(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \sigma(t) \geq \frac{p'^2(t)}{4qp(t)}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть в области $D \subset M$ с липшицевой границей задана произвольная функция $u \in C^2(D), u(x) > 0$. Тогда для всякой функции $\psi(x) \in C_0^1(D)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_D \sigma(\psi)\langle\Phi(x,\nabla\psi),\nabla\psi\rangle - \lambda_{h,c}(D)\int\limits_D p(\psi)c(x) \geq 0, \tag{11}$$

где

$$\lambda_{h,c}(D) = \inf_{x\in D} -\frac{\operatorname{div}(\Phi(x,\nabla u))}{h(u)c(x)}.$$

Доказательство. Мы воспользуемся методом, предложенным Ченгом и Яу в их работе [11]. Согласно формуле Гаусса — Остроградского для произвольной функции $\psi \in C_0^1(D)$ имеем

$$0 = \int\limits_D \operatorname{div}\left(p(\psi)\frac{\Phi(x,\nabla u)}{h(u)}\right)$$

Откуда, вычисляя дивергенцию, получаем равенство

$$\int\limits_D p'(\psi)\frac{\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla\psi\rangle}{h(u)} + p(\psi)\frac{\operatorname{div}(\Phi(x,\nabla u))}{h(u)} - \frac{p(\psi)h'(u)}{h^2(u)}\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla u\rangle = 0.$$

Используя определение величины $\lambda_{h,c}(D)$, последнее равенство преобразуем в неравенство

$$0 \leq -\lambda_{h,c}(D)\int\limits_D p(\psi)c(x) - \int\limits_D \left\{\frac{p(\psi)h'(u)}{h^2(u)}\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla u\rangle - p'(\psi)\frac{\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla\psi\rangle}{h(u)}\right\}.$$

Прибавляя и отнимая необходимое слагаемое, это неравенство можно привести к следующему:

$$0 \leq \int\limits_D \sigma(\psi)\langle\Phi(x,\nabla\psi),\nabla\psi\rangle - \lambda_{h,c}(D)\int\limits_D p(\psi)c(x) -$$

$$-\int\limits_D \left\{\frac{p(\psi)h'(u)}{h^2(u)}\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla u\rangle - p'(\psi)\frac{\langle\Phi(x,\nabla u),\nabla\psi\rangle}{h(u)} + \sigma(\psi)\langle\Phi(x,\nabla\psi),\nabla\psi\rangle\right\}. \tag{12}$$

Покажем, что в последнем интеграле стоит неотрицательная величина. С этой целью построим две матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} \langle\Phi(x,\nabla u),\nabla u\rangle & \langle\Phi(x,\nabla u),\nabla\psi\rangle \\ \langle\Phi(x,\nabla u),\nabla\psi\rangle & \langle\Phi(x,\nabla\psi),\nabla\psi\rangle \end{pmatrix}$$

и

$$G = \begin{pmatrix} \frac{p(\psi)h'(u)}{h^2(u)} & -\frac{p'(\psi)}{2h(u)} \\ -\frac{p'(\psi)}{2h(u)} & \sigma(\psi) \end{pmatrix}.$$

Тогда величина под знаком интеграла в (12) представляет собой значение следа $\mathrm{tr}(DG)$ произведения этих матриц. В силу условий (7), (8) матрица D является неотрицательно определенной. Для того чтобы показать неотрицательность подынтегрального выражения в (12), достаточно установить, что матрица G также является неотрицательно определенной.

Лемма 1. *Пусть матрицы D, G размером 2×2 симметричны и неотрицательно определены. Тогда*

$$\mathrm{tr}(DG) \geq 0.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Если $D = 0$ или $G = 0$, то утверждение леммы тривиально. Поэтому будем считать, что матрицы ненулевые. В силу их неотрицательной определенности выполнены неравенства:

$$a \geq 0, \; c \geq 0, \; ac - b^2 \geq 0,$$

$$d \geq 0, \; f \geq 0, \; df - e^2 \geq 0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $c > 0, \; d > 0$. Тогда

$$a \geq \frac{b^2}{c}, \; f \geq \frac{e^2}{d},$$

и, соответственно

$$ad \geq b^2\frac{d}{c}, \; fc \geq e^2\frac{c}{d}.$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}(DG) = ad + 2be + fc \geq b^2\frac{d}{c} + 2be + e^2\frac{c}{d} = \left(b\sqrt{\frac{d}{c}} + e\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \geq 0.$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что матрица G неотрицательно определена. Для этого в первую очередь заметим, что в силу (10) $\sigma(\psi) \geq 0$. А также, с учетом (9),

$$\det G = \frac{p(\psi)\sigma(\psi)h'(u)}{h^2} - \frac{p'^2(\psi)}{4h^2(u)} \geq$$

$$\geq \frac{4p(\psi)\sigma(\psi)q - p'^2(\psi)}{4h^2(u)} \geq 0$$

в силу условия (10). Таким образом, матрица G неотрицательно определена. Теорема доказана.

В качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть в области $D \subset M$ с липшицевой границей задана произвольная функция $u \in C^2(D), u(x) > 0$. Тогда для всякой функции $\psi(x) \in C_0^1(D)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_D |\nabla\psi|^2 - \lambda_c(D) \int\limits_D \psi^2(x)c(x) \geq 0, \tag{13}$$

где

$$\lambda_c(D) = \inf_{x \in D} -\frac{\Delta u(x)}{u(x)c(x)}.$$

Отметим, что в [8] аналогичный подход был применен для получения точных оценок основной частоты областей на минимальных поверхностях и поверхностях предписанной средней кривизны.

3. Устойчивость минимальных поверхностей

Как было указано выше, минимальная поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является устойчивой, если ее вторая вариация площади неотрицательно определена. Это условие выражается следующим образом

$$\int\limits_{\mathcal{M}} |\nabla\psi|^2 - ||A||^2\psi^2 \geq 0, \tag{14}$$

для всякой функции $\psi \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Обозначим через ξ — единичное, гладкое поле нормалей к поверхности $\mathcal{M}$. Точку $x \in \mathcal{M}$ назовем лицевой относительно ξ, если $\langle x, \xi \rangle > 0$. Лицевую точку $x \in \mathcal{M}$ назовем видимой, если отрезок, соединяющий начало координат и точку x, не пересекает поверхность $\mathcal{M}$.

Теорема 4. *Любая видимая часть минимальной гиперповерхности является устойчивой.*

Доказательство. Для минимальных гиперповерхностей известно [6], что, если $\xi_i = \langle \xi, e_i \rangle$, $i = 1, ..., n$, то в метрике поверхности имеет место уравнение Якоби

$$\Delta\xi_i = -||A||^2\xi_i,$$

здесь e_i, $i = 1, ..., n+1$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Также известно, что координатные функции $x_i = \langle x, e_i \rangle$ являются гармоническими в метрике поверхности. Тогда будем иметь

$$\Delta\langle x, \xi \rangle = \Delta \sum_{i=1}^{n+1} x_i\xi_i = 2\sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla x_i, \nabla\xi_i \rangle -$$

$$- ||A||^2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i\xi_i = -||A||^2\langle x, \xi \rangle.$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla x_i, \nabla\xi_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle e_i^T, \nabla\xi_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \langle B(e_i^T, e_i^T), \xi \rangle = nH = 0,$$

где $(v)^T$ обозначает ортогональную проекцию вектора на касательную плоскость к поверхности $\mathcal{M}$, а H — ее среднюю кривизну. Теперь утверждение теоремы следует непосредственно из теоремы 3 с $c(x) = ||A||^2$ и $u(x) = \langle x, \xi \rangle$.

Замечание. *Известно* [9], *что для минимальных поверхностей вращения (катеноида) в* $\mathbb{R}^3$, *заданных уравнением*

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a \operatorname{ch} \frac{x_3}{a},$$

симметричный слой вида $\{-h < x_3 < h, h > 0\}$ *является устойчивым тогда и только тогда, когда* $h < a \cdot h_0$, *где* h_0 *— единственный корень уравнения* $z \operatorname{th} z = 1$. *Это в точности соответствует видимой части катеноида. Таким образом, описанные устойчивые части минимальных поверхностей являются в определенной степени точными.*

Рассмотрим теперь случай гиперповерхностей постоянной средней кривизны, то есть поверхности с вектором средней кривизны постоянной длины. Причем, будем считать, что $|\vec{H}| \neq 0$. В таком случае видимыми точками будут точки, видимые относительно вектора нормали $\xi = \vec{H}/|\vec{H}|$.

Теорема 5. *Видимая часть гиперповерхности* $\mathcal{M}$ *постоянной, ненулевой средней кривизны устойчива.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы покажем, что функция $g(x) = \langle x, \xi \rangle$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\Delta g(x) \leq -||A||^2 g(x),$$

в метрике поверхности $\mathcal{M}$. Воспользуемся леммой 1 из [5]. В этой лемме доказано равенство, которое в наших обозначениях для случая гиперповерхностей примет вид

$$\operatorname{div}(A(Y)) = \sum_{i=1}^{n} (\langle B(E_i, Y), \nabla_{E_i} \xi \rangle + \langle A(E_i), \nabla_{E_i} Y \rangle) + n \langle \nabla_Y \vec{H}, \xi \rangle, \tag{15}$$

где Y — произвольное гладкое касательное векторное поле на $\mathcal{M}$, а E_i — ортонормированный базис в касательной плоскости к поверхности $\mathcal{M}$. Далее имеем для произвольного вектора X

$$\nabla_X \xi_i = \nabla_X \langle \xi, e_i \rangle = \langle \nabla_X \xi, e_i \rangle = -\langle A(X), e_i^T \rangle = -\langle A(e_i^T), X \rangle.$$

Откуда следует, что $\nabla \xi_i = -A(e_i^T)$. Применим формулу (15). Тогда получаем

$$\Delta \xi_i = -\sum_{k=1}^{n} (\langle B(E_k, e_i^T), \nabla_{E_k} \xi \rangle + \langle A(E_k), \nabla_{E_k} e_i^T \rangle) - n \langle \nabla_{e_i^T} \vec{H}, \xi \rangle.$$

Поскольку $\mathcal{M}$ — гиперповерхность и ξ — единичный вектор, то $\nabla_{E_k} \xi = 0$. Поэтому будем иметь

$$\Delta \xi_i = \sum_{k=1}^{n} \langle A(E_k), \nabla_{E_k} e_i^N \rangle) - n \langle \nabla_{e_i^T} \vec{H}, \xi \rangle =$$

$$= -\langle \xi, e_i\rangle \sum_{k=1}^{n} \langle A(E_k), A(E_k)\rangle) - \langle \nabla_{e_i^T} \vec{H}, \xi\rangle = -\langle \xi, e_i\rangle ||A||^2 - n\langle \nabla_{e_i^T} \vec{H}, \xi\rangle.$$

Положим $x_i = \langle x, e_i\rangle$. Не трудно вычислить градиент и оператор Лапласа этой функции

$$\nabla x_i = e_i^T, \quad \Delta x_i = n\langle \vec{H}, e_i\rangle.$$

На основании вычисленных значений получаем выражение оператора Лапласа для функции $g(x) = \langle x, \xi\rangle$:

$$\Delta g(x) = \Delta \sum_{i=1}^{n+1} x_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n+1} \Delta x_i \xi_i + 2\sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla x_i, \nabla \xi_i\rangle + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \Delta \xi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} n\langle \vec{H}, e_i\rangle \xi_i - 2\sum_{i=1}^{n+1} \langle e_i^T, A(e_i^T)\rangle + \sum_{i=1}^{n+1} x_i(-\langle \xi, e_i\rangle ||A||^2 - n\langle \nabla_{e_i^T} \vec{H}, \xi\rangle) =$$

$$= n\langle \vec{H}, \xi\rangle - 2n\langle \vec{H}, \xi\rangle - ||A||^2 g(x) - n\langle \nabla_x \vec{H}, \xi\rangle.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\Delta g(x) = -n\langle \vec{H}, \xi\rangle - ||A||^2 g(x) - n\langle \nabla_x \vec{H}, \xi\rangle.$$

Учитывая, что $\mathcal{M}$ — поверхность постоянной средней кривизны, получаем такое равенство

$$\Delta g(x) = -n\langle \vec{H}, \xi\rangle - ||A||^2 g(x).$$

А поскольку $\xi = \vec{H}/|\vec{H}|$, то будем иметь требуемое неравенство

$$\Delta g(x) = -n|\vec{H}| - ||A||^2 g(x) < -||A||^2 g(x).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячин, А. А. Построение C^1-гладких кусочно-квадратичных функций при решении краевых задач уравнений 4-го порядка на треугольной сетке / А. А. Клячин, И. Ю. Веревкин // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 5–15. — DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.2.1

2. Клячин, В. А. Об одном емкостном признаке неустойчивости минимальных гиперповерхностей / В. А. Клячин, В. М. Миклюков // Докл. РАН. — 1993. — Т. 330, № 4. — С. 424–426.

3. Клячин, В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны / В. А. Клячин // Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — Т. 70, № 4. — С. 77–90.

4. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М. : Наука, 1981. — Т. 2. — 416 с.

5. Миклюков, В. М. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности / В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев // Мат. сб. — 1989. — Т. 180, № 9. — С. 1278–1295.

6. Саймонс, Дж. Минимальные поверхности в римановых многообразиях / Дж. Саймонс // Математика. — 1972. — Т. 16, № 6. — С. 60–104.

7. Саранин, В. А. Равновесие жидкостей и его устойчивость / В. А. Саранин. — М. : Ин-т компьютер. исследований, 2002. — 144 с.

8. Ткачев, В. Г. Точная оценка снизу для первого собственного значения на минимальной поверхности / В. Г. Ткачев // Матем. заметки. — 1993. — Т. 54, № 2. — С. 99–107.

9. Тужилин, А. А. Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{H}^3$ / А. А. Тужилин // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 3. — С. 581–607.

10. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн. — М. : Наука, 1989. — 312 с.

11. Cheng, S. J. Differential Equations on Rimannian Manifolds and Their Geometric Application / S. J. Cheng, S.-T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28, № 4. — P. 333–354.

12. Wente, H. C. The Stability of the Axially Symmetric Pendant Drop / H. C. Wente // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 88. — P. 421–470.

REFERENCES

1. Klyachin A.A., Verevkin I.Yu. Postroenie C^1-gladkikh kusochno-kvadratichnykh funktsiy pri reshenii kraevykh zadach uravneniy 4-go poryadka na treugolnoy setke [Construction of C^1-Smooth Piecewise Quadratic Functions for Solving Boundary Value Problems of Fourth-Order Equations on a Triangular Grid]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 2, pp. 5-15. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.2.1

2. Klyachin V.A., Miklyukov V.M. Ob odnom emkostnom priznake neustoychivosti minimalnykh giperpoverkhnostey [On Capacity Condition for Unstability for Minimal Hypersurfaces]. *Dokl. RAN* [Doklady Mathematics], 1993, vol. 330, no. 4, pp. 424-426.

3. Klyachin V.A. O nekotorykh svoystvakh ustoychivykh i neustoychivykh poverkhnostey predpisannoy sredney krivizny [On Some Properties of Stable and Unstable Surfaces with Prescribed Mean Curvature]. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 2006, vol. 70, no. 4, pp. 77-90.

4. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsialnoy geometrii: v 2 t.* [Foundations of Differential Geometry. In 2 Vols]. Moscow, Nauka Publ., 1981, vol. 2. 416 p.

5. Miklyukov V.M., Tkachev V.G. Nekotorye svoystva trubchatykh minimalnykh poverkhnostey proizvolnoy korazmernosti [Some Properties of the Tubular Minimal Surfaces of Arbitrary Codimension]. *Mat. sb.* [Math. USSR-Sb.], 1989, vol. 180, no. 9, pp. 1278-1295.

6. Saymons Dzh. Minimalnye poverkhnosti v rimanovykh mnogoobraziyakh [Minimal Varieties in Riemannian Manifolds]. *Matematika* [Mathematics], 1972, vol. 16, no. 6, pp. 60-104.

7. Saranin V.A. *Ravnovesie zhidkostey i ego ustoychivost* [Uquilibrium Fluids and Its Stability]. Moscow, In-t kompyuter. issledovaniy Publ., 2002. 144 p.

8. Tkachyov V.G. Tochnaya otsenka snizu dlya pervogo sobstvennogo znacheniya na minimalnoy poverkhnosti [A Sharp Lower Bound for the First Eigenvalue on a Minimal Surface]. *Matem. zametki* [Math. Notes], 1993, vol. 54, no. 2, pp. 99-107.

9. Tuzhilin A.A. Indeksy tipa Morsa dvumernykh minimalnykh poverkhnostey v $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{H}^3$ [Morse-Type Indices of Two-Dimensional Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{H}^3$]. *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* [Math. USSR-Izv.], 1991, vol. 55, no. 3, pp. 581-607.

10. Finn R. *Ravnovesnye kapillyarnye poverkhnosti. Matematicheskaya teoriya* [Uquilibrium Capillar Surfces. Mathematical Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 312 p.

11. Cheng S.J., Yau S.-T. Differential Equations on Rimannian Manifolds and Their Geometric Application. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, no. 4, pp. 333-354.

12. Wente H.C. The Stability of the Axially Symmetric Pendant Drop. *Pacific J. Math.*, 1980, vol. 88, pp. 421-470.

THE ESTIMATES OF PRINCIPLE FREQUENCY OF DOMAINS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS AND MINIMAL SURFACES STABILITY

Vladimir A. Klyachin

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of the Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Equilibrium surfaces originate from the mechanics of liquids and gases as the interface between two media that are in equilibrium. The equilibrium condition arises from the condition of minimum potential energy of the corresponding mechanical system. Equilibrium surfaces include the classes of minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and equilibrium capillary surfaces. The study of the stability of equilibrium surfaces is closely related to the questions of the existence of a solution to the variational multidimensional problem for the minimum of the potential energy functional. In particular, unstable solutions of the corresponding differential equations are not realizable in nature. Stability is characterized by the positivity of the form of the second variation of the corresponding functional (for example, the area functional for minimal surfaces). In most cases, this property means a lower bound for a quantity similar to the fundamental frequency of a region on a surface. In this article, I follow the approach of Sh.T. Yau obtained lower bounds for the quantity that generalizes the fundamental frequency of the region. Based on these estimates, the stability conditions for minimal surfaces and surfaces of constant mean curvature are proved.

Key words: fundamental frequency, minimal surface, area variation, minimal surface stability, equilibrium surface.