



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.7>

УДК 538.915
ББК 22.373

Дата поступления статьи: 03.03.2025
Дата принятия статьи: 16.04.2025



ОСОБЕННОСТИ ТОКА СМЕЩЕНИЯ ФЛУКСОНА В НЕУПОРЯДОЧЕННОМ $S-I-S$ -ТУННЕЛЬНОМ КОНТАКТЕ

Олег Игоревич Лозин

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и математического моделирования,
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М.И. Платова
oleg.lozin@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0740-6479>
ул. Просвещения, 132, 346428 г. Новочеркасск, Российская Федерация

Ирина Александровна Вяткина

Ассистент кафедры физики и фотоники,
Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)
им. М.И. Платова
irinka.vyatkina@mail.ru
ул. Просвещения, 132, 346428 г. Новочеркасск, Российская Федерация

Аннотация. Проведено численно-аналитическое исследование поведения тока смещения джозефсоновского вихря (флюксона) в длинном $S-I-S$ (S – сверхпроводник, I – изолятор) туннельном контакте со слабым (малые концентрации примеси) структурным беспорядком в I -слое. Показано, что в пространстве параметров (δ, c) , где параметр δ равен отклонению уровня Ферми контакта от энергии квазилокального электронного состояния на примеси в I -слое, а c – безразмерная концентрация примеси, зависимость тока смещения от δ при разных c имеет качественно разный вид.

Ключевые слова: неупорядоченный туннельный контакт, джозефсоновский вихрь, квантовые резонансно-перколяционные траектории, динамика флюксона, численно-аналитический метод.

Введение

Динамика джозефсоновских вихрей (флюксонов) в туннельных структурах различных видов [1; 2; 8] в настоящее время представляет предмет неослабевающего интереса как с теоретической, так и с экспериментальной и технической точек зрения (см., например, работы [4; 5; 13–18]), в том числе и в связи с перспективами применения в качестве элементов вычислительных устройств новых типов [14; 18]. При движении флюксона в туннельном $S-I-S$ -контакте, в I -слое которого присутствуют случайные неоднородности (микроразоры, сужения и др.), радиационное трение вихря об эти неоднородности приводит к замедлению его движения и остановке – осуществляется «пришлифовка» (пиннинг) флюксона. Для управления скоростью движения флюксона можно ввести в контакт ток – так называемый ток смещения флюксона [19], пересекающий плоскость контакта.

В работе [5] в качестве неоднородности, влияющей на динамику вихря в длинном $S-I-S$ -контакте, рассматриваются случайно образующиеся в содержащем примесные атомы I -слое квантовые резонансно-перколяционные траектории [6; 9].

Приведем кратко основные сведения о квантовых резонансно-перколяционных траекториях. Рассмотрим явление туннелирования электронов через случайно-неоднородный слой, в качестве модели которого выберем прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 , возмущенный расположенными случайным образом одинаковыми локализованными потенциальными ямами, образованными примесями. Если энергия туннелирующей частицы значительно меньше высоты барьера, то радиус локализации электронного состояния на примеси будет намного меньше расстояния между примесями. При этом процесс туннелирования даже при рассмотрении трехмерного барьера сохраняет многие черты одномерности, поскольку из-за сильного затухания в подбарьерной области траектории частиц будут сосредоточены внутри цилиндров с радиусом, равным радиусу локализации. Если энергия налетающих частиц ϵ не попадает в область энергий туннельных резонансов для данного барьера, то происходит нерезонансное туннелирование. Если же энергия налетающих частиц попадает в эту область, то может осуществиться резонансное туннелирование. В работе [9] показано, что в этом случае при всех значениях энергии существуют маловероятные конфигурации примесных центров, которые приводят к возникновению образований, названных авторами работы квантовыми резонансно-перколяционными траекториями (КРПТ). Такие траектории являются путями, по которым частицы могут туннелировать с коэффициентом прохождения, близким к единице. Нерезонансная прозрачность типичных барьеров чрезвычайно мала, поэтому вероятность реализации резонансных конфигураций и их энергетические ширины в значительной степени определяют среднюю прозрачность слоя. Пространственная структура уединенной КРПТ схематично представлена на рисунке 1.

В работе [6] получено общее выражение для локальной прозрачности при рассмотрении прохождения частицы через m -примесную КРПТ в трехмерном неупорядоченном барьере:

$$D_m^{\text{res}}(\epsilon - \epsilon_0, \mathbf{q}, \mathbf{p}, u) = 4\sigma_0 \frac{k_q}{k} \exp \left[-\frac{\alpha |\mathbf{p} - \mathbf{p}_m|^2}{\eta} - \frac{\eta q^2}{\alpha} - \frac{(\epsilon - \epsilon_0)^2}{\gamma^2} \right], \quad (1)$$

где \mathbf{q} – поперечная компонента импульса частицы на входе в барьер; $\mathbf{p} = (y, z)$ – поперечная координата частицы на выходе из барьера; $\sigma_0 = \alpha^2 k^2 / (2\pi(\alpha^2 + k^2))^2$; $k^2 = \epsilon - (\hbar^2 / 2m) = 1$; $k_q = \sqrt{\epsilon - q^2}$; $\alpha = \sqrt{U_0 - \epsilon}$; ϵ_0 – уровень энергии примеси; \mathbf{p}_m –

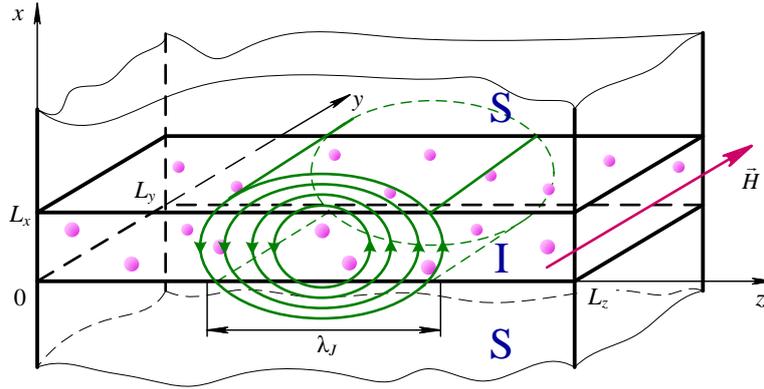


Рис. 2. Джозефсоновский контакт с примесями в I -слое, помещенный в параллельное плоскости контакта магнитное поле $(0, H_y, 0)$. Характерный размер флюксона порядка λ_J I -слоя без учета влияния примесей $U_0 = \text{const} > \mu$, где μ – уровень Ферми контакта. В слое изолятора случайным образом распределены одинаковые, притягивающие электроны немагнитные примеси, имеющие энергию однопримесного локального уровня ε_0 и радиус локализации электронного состояния на нем $\alpha^{-1} = (U_0 - \varepsilon_0)^{-1/2}$ (используется система единиц, в которой $\hbar = 1$, масса и заряд электрона $m = 1/2$, $e = 1$). Большое число ($N \gg 1$) примесей макроскопически однородно распределено с плотностью $n = N/V$ по объему слоя: $V = LS$ ($L = L_x$ – толщина слоя изолятора, $S = L_y L_z$ – его площадь). Рассматриваются значения безразмерной концентрации $c = n\alpha^{-3} \ll 1$, то есть случай слабого структурного беспорядка.

Ток смещения флюксона в контакте с неупорядоченным I -слоем определяется следующим образом [5]:

$$j = \left(\frac{\pi\Delta}{2}\right)^{3/2} \frac{\mathfrak{ae}(\beta)}{L_y} \langle g(\delta, c) \rangle^{-1/2} \sum_{m=1}^N f_m(\delta, c), \quad (2)$$

где $\delta = \mu - \varepsilon_0$; Δ – ширина энергетической щели сверхпроводника S .

$$\langle g(\delta, c) \rangle = \sum_m g_m^{\text{res}}(\delta, c) \quad - \quad (3)$$

среднее значение туннельного кондактанса контакта, а $g_m^{\text{res}}(\delta, c)$, $f_m^{\text{res}}(\delta, c)$ вычисляются через (1) и имеют вид:

$$g_m^{\text{res}}(\delta, c) = \sigma_0 \int_{\alpha L/m}^{\infty} p_m(c, u) \exp\left(-\frac{\delta^2}{\gamma_m^2}\right) du, \quad (4)$$

$$f_m^{\text{res}}(\delta, c) = \sigma_0 \int_{\alpha L/m}^{\infty} p_m(c, u) \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\gamma_m^2}\right) du, \quad (5)$$

В (4), (5)

$$p_m(c, u) = \alpha^2 c^m e^{-cm\pi u^3} [u^2 \theta^2(m, u)]^{m-1} \quad - \quad (6)$$

вероятность (на единицу площади контакта) образования уединенной m -примесной квантовой закоротки с шагом u ,

$$\theta(m, u) = \left[2 \left(\frac{mu}{\alpha L} - 1 \right) \right]^{1/2} \ll 1 \quad - \quad (7)$$

угол, характеризующий извилистость квантовой закоротки,

$$\gamma_m(u) = 4\alpha^2 u^{-1} e^{-u} \quad - \quad (8)$$

ширина зоны резонансной прозрачности вдоль m -примесной КРПТ с шагом u ,

$$\varkappa(\beta) = \left[\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right]^5 e^{-\pi/\beta}, \quad (9)$$

$\beta = v/c_0$; v – скорость флюксона, пропорциональная напряжению на контакте; c_0 – скорость Свихарта.

2. Исследование энергетической зависимости тока смещения флюксона

Проанализируем поведение вкладов m -примесных КРПТ в ток смещения флюксона и суммарного тока в пространстве параметров (δ, c) .

Вклад однопримесных квантовых закороток ($m = 1$) определяется следующим образом [5]:

$$j_1 = \varkappa(\beta) \left(\frac{\pi\sigma_0\Delta}{2} \right)^{3/2} \langle g \rangle^{-1/2} \alpha c \exp \left[-\pi c \alpha L - \frac{2\delta^2}{\gamma_1^2(\alpha L)} \right]. \quad (10)$$

В случае квантовых закороток с $m > 1$ начинает играть роль извилистость траекторий, и их вклады в ток, соответственно, оказываются сложнее для вычисления.

Подынтегральные выражения в (4), (5) как функции аргумента u экспоненциально быстро убывают при удалении от нижнего предела $u = u_{\min}$, следовательно значение интеграла набирается при значениях u , близких к u_{\min} , и при каждом фиксированном значении m главный вклад в (4), (5) дают наиболее вероятные – слабоизвилистые квантовые закоротки, длина которых близка к длине кратчайшей закоротки с шагом $u_{\min} = \alpha L/m$ и, соответственно, наибольшей (при данном m) энергетической шириной $\gamma_m = 4\alpha^2(\alpha L/m)^{-1} \exp(-\alpha L/m)$.

Учитывая это обстоятельство, представим с высокой точностью формулы (4), (5) в виде

$$g_m^{\text{res}}(\delta, c) = e^{-\frac{\delta^2}{\gamma_m^2}} P_m(c), \quad (11)$$

$$f_m^{\text{res}}(\delta, c) = e^{-\frac{2\delta^2}{\gamma_m^2}} P_m(c), \quad (12)$$

где

$$P_m(c) = \sigma_0 \int_{\alpha L/m}^{\infty} p_m(c, u) du. \quad (13)$$

Подставляя (6), (7) и интегрируя, получаем

$$P_m(c) = \frac{2^{m-1} \alpha^2 c^m}{3} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^k \left(\frac{m}{\alpha L} \right)^{m-1-k} (m\pi c)^{[3(m-1)-k+1]/3} \times \\ \times \Gamma \left[\frac{3(m-1)-k+1}{3}, m\pi c \left(\frac{\alpha L}{m} \right)^3 \right], \quad (14)$$

где C_m^k – биномиальные коэффициенты,

$$\Gamma(s, a) = \int_a^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad - \quad (15)$$

верхняя неполная гамма-функция [3].

Пользуясь формулой

$$\Gamma(s+n, a) = \Gamma(s+n) \left[\frac{\Gamma(s, a)}{\Gamma(s)} + a^{s+n-1} e^{-a} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a^{-j}}{\Gamma(s+n-j)} \right], \quad (16)$$

где $n = 1, 2, \dots$, можно для любых m и k выразить все неполные гамма-функции в (14) через $\Gamma(1/3, m\pi c(\alpha L/m)^3)$, $\Gamma(2/3, m\pi c(\alpha L/m)^3)$ и $\exp(-m\pi c(\alpha L/m)^3)$. Общее выражение получается громоздким, поэтому приведем результат для квантовых закороток с $m = 2, 3$, имеющих в реальных контактах наибольшие вероятности возникновения:

$$P_2(c) = \frac{4\alpha^2 c^2}{9} (2\pi c)^{-4/3} \left(\frac{\alpha L}{2} \right)^{-1} \Gamma \left[\frac{1}{3}, 2\pi c \left(\frac{\alpha L}{2} \right)^3 \right], \quad (17)$$

$$P_3(c) = \frac{4\alpha^2 c^3}{3} \times \left\{ \frac{4}{9} (3\pi c)^{-7/3} \left(\frac{\alpha L}{3} \right)^{-2} \Gamma \left[\frac{1}{3}, 3\pi c \left(\frac{\alpha L}{3} \right)^3 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (3\pi c)^{-5/3} \Gamma \left[\frac{2}{3}, 3\pi c \left(\frac{\alpha L}{3} \right)^3 \right] - \frac{2}{3} (3\pi c)^{-2} \left(\frac{\alpha L}{3} \right)^{-1} \exp \left[-3\pi c \left(\frac{\alpha L}{3} \right)^3 \right] \right\}. \quad (18)$$

Особенности зависимости от δ вкладов m -примесных КРПТ определяются условием равенства нулю производной m -го члена суммы в формуле (2)

$$\frac{\partial j_m}{\partial \delta} = A \cdot \delta \cdot \langle g \rangle^{-3/2} \cdot f_m \sum_n \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c), \quad (19)$$

и производной суммарного тока (2)

$$\frac{\partial j}{\partial \delta} = A \cdot \delta \cdot \langle g \rangle^{-3/2} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c) f_m(\delta, c), \quad (20)$$

где $A = (\pi\Delta/2)^{3/2}/L_y$. Из (19), (20) видно, что как для m -примесного вклада, так и для суммарного тока особенности при $\delta = 0$ будут существовать при любом c , то есть на плоскости параметров (δ, c) они образуют прямую $\delta = 0$. При $\delta \neq 0$ множество

точек, в которых присутствуют особенности по δ зависимостей $j_m(\delta, c)$ и $j(\delta, c)$, будут определяться, соответственно, выражениями

$$\sum_n \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c) = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{m,n} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c) f_m(\delta, c) = 0. \quad (22)$$

С учетом (11), (12) представим (22) в виде

$$\sum_{m,n} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) P_n(c) P_m(c) \exp \left[- \left(\frac{1}{\gamma_n^2} + \frac{2}{\gamma_m^2} \right) \delta^2 \right] = 0. \quad (23)$$

Для малых δ ($\delta \ll \gamma_m$, $m = 1, 2, \dots$) можно преобразовать (23) к

$$\begin{aligned} \delta^2 \left[\sum_{m=1}^N \frac{3}{\gamma_m^4} P_m(c) + \frac{1}{3} \sum_{m < n} \left(\frac{7}{\gamma_m^4} + \frac{4}{\gamma_m^2 \gamma_n^2} + \frac{7}{\gamma_n^4} \right) P_m(c) P_n(c) \right] = \\ = \sum_{m=1}^N \frac{1}{\gamma_m^2} P_m(c) + \sum_{m < n} \left(\frac{1}{\gamma_m^2} + \frac{1}{\gamma_n^2} \right) P_m(c) P_n(c). \end{aligned} \quad (24)$$

В уравнении (24) как множитель при δ^2 в левой части, так и правая часть положительны, поэтому найдется такое значение c , при котором оно имеет два различных корня. Множитель при δ^2 и правая часть непрерывны по c и, следовательно, корни уравнения (24) будут меняться непрерывно (оставаясь при этом вещественными) при непрерывном изменении c [10]. Таким образом, при выполнении условия $\delta \ll \gamma_m$, $m = 1, 2, \dots$ эти корни будут при некотором интервале значений c образовывать непрерывные отрезки линий на плоскости параметров (δ, c) . Следовательно, особенности будут проявляться в некотором интервале значений c .

Тип особых точек будет определяться знаком второй производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j}{\partial \delta^2} = A \cdot \langle g(\delta, c) \rangle^{-3/2} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c) f_m(\delta, c) - \\ - A \delta^2 \langle g(\delta, c) \rangle^{-5/2} \sum_{m,n,k} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) \left(\frac{2}{\gamma_n^2} - \frac{3}{\gamma_k^2} - \frac{4}{\gamma_m^2} \right) g_n(\delta, c) g_k(\delta, c) f_m(\delta, c) \end{aligned} \quad (25)$$

для суммарного тока смещения, и аналогичным выражением, но с фиксированным m для вклада m -примесных КРПТ. При $\delta \rightarrow 0$ из (25) и из (21), (22) получаются совпадающие в пределе выражения для m -примесных вкладов и суммарного тока, поэтому вдоль $\delta = 0$ изменение типа экстремума будет происходить при переходе через точку, к которой подходят линии особенностей при $\delta \neq 0$.

Аналитическое вычисление корней даже в частном случае $\delta \ll \gamma_m$ затруднительно ввиду сложной зависимости $P_m(c)$, поэтому поведение суммарного тока и его вкладов на плоскости (δ, c) при типичных значениях характеристик контакта исследовалось численно.

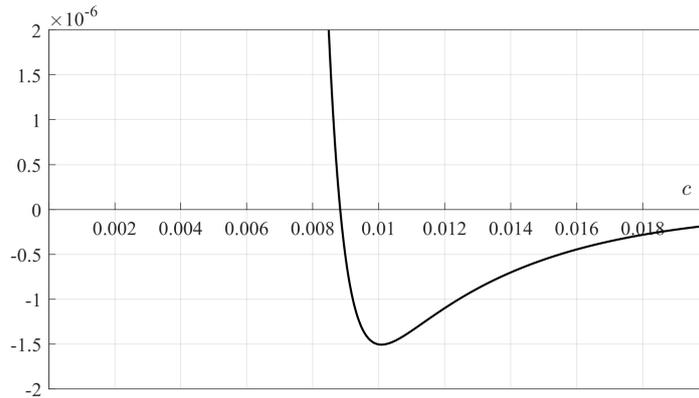


Рис. 3. К нахождению решения уравнения (26)

На рисунке 3 приведен результат численного решения уравнения

$$\sum_{n=1}^3 \left(\frac{1}{\gamma_n^2} - \frac{4}{\gamma_2^2} \right) P_n(c) = 0 \tag{26}$$

при типичных значениях параметров контакта $\alpha L = 9$, $U_0 = 10$ эВ, $\mu = 5$ эВ для случая двупримесного вклада при учете влияния возникающих с наибольшими вероятностями КРПТ с $m = 1, 2, 3$. Конфигурация линий особенностей при $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$ для двупримесного вклада показана на рисунке 5б, на нем видно, что линии особенностей при $c \neq 0$ примыкают к прямой $\delta = 0$ в той же точке ($c \simeq 0,0087$), в которой при $\delta = 0$ изменяется тип особенности (минимум сменяется максимумом в направлении возрастания c). Результаты аналогичных расчетов для трехпримесного вклада и суммарного тока смещения приведены на рисунках 6б, 7б.

3. Численное исследование особенностей тока смещения

Подход к получению результатов предполагал следующие два этапа. Первый – проведение аналитических вычислений до того предела, когда дальнейшее продвижение становится уже нецелесообразным из-за сложности и громоздкости получаемых выражений, и второй – использование компьютерного моделирования для анализа полученных результатов. В рамках первого этапа получен легко принципиальный результат – показано, что для $S-I-S$ -контакта с квантовыми закоротками в I -слое обязательно существует некоторый диапазон концентраций, при которых ток смещения флюксона как функция разности δ между уровнем ферми контакта и энергией налетающей частицы будет при малых величинах этого отклонения ($\delta \ll \gamma_m$, $m = 1, 2, \dots$) иметь особенности, описываемые уравнениями (24), (25). На втором этапе использование компьютерного моделирования позволило найти эти значения концентрации, а также исследовать зависимость $j(\delta, c)$ уже без ограничений на значения δ . Моделирование показало, что для типичных параметров контакта существует широкий диапазон концентраций c , при которых зависимость $j(\delta, c)$ от δ имеет множественные максимумы, ассоциированные с m -примесными КРПТ.

Для проведения численных расчетов использовался программный пакет GNU Octave. При исследовании поведения $j(\delta, c)$, а также вкладов КРПТ, шаг изменения δ был выбран равным $0,02\gamma_1$. Неполные гамма-функции в (17), (18) вычислялись с помощью

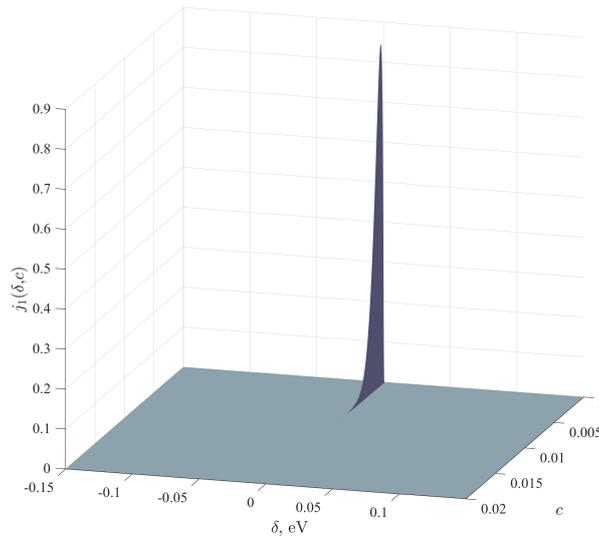


Рис. 4. Однопримесный вклад в ток смещения: график $j_1(\delta, c)$

встроенных функций GNU Octave. Проверка прямым численным интегрированием показала адекватность работы этих встроенных функций при фигурирующих в расчетах значениях безразмерной концентрации c и при рассматриваемых характерных значениях параметров контакта.

Результаты численных расчетов $j_m(\delta, c)$ для $m = 1, 2, 3$ и суммарного тока $j(\delta, c)$, проведенных для характерных значений $\alpha L = 9$, $U_0 = 10$ эВ, $\mu = 5$ эВ, приведены на рисунках 4–8. Рисунки 4, 5, 6 иллюстрируют поведение m -примесных вкладов в ток $j_m(\delta, c)$ ($m = 1, 2, 3$). Видно качественное изменение зависимости при учете $m > 1$: появляются новые особенности, отстоящие от локального однопримесного электронного уровня ϵ_0 на величину порядка γ_m . На рисунках 5б, 6б сплошные линии составлены точками, в которых $\partial j_m / \partial \delta = 0$, синим цветом закрашены области, в которых $\partial^2 j_m / \partial \delta^2 < 0$, зеленым – в которых $\partial^2 j_m / \partial \delta^2 > 0$. На рисунке 7б используется та же схема для выделения линий $\partial j / \partial \delta = 0$ и знака $\partial^2 j / \partial \delta^2$. На рисунках 4, 5а, 6а, 7а, 8 величина вкладов в ток смещения и суммарный ток нормированы на максимальную величину суммарного тока, поэтому множители, не зависящие от δ, c в (2), не оказывают влияния на результаты. Значения c , соответствующие решениям уравнения (24), при указанных значениях параметров контакта, лежат в диапазоне $c = 0,0089 \dots 0,0092$.

Из рисунка 8 видно изменение зависимости $j(\delta, c)$ при изменении c : при самых низких концентрациях существенен лишь однопримесный вклад (график 1), далее однопримесный вклад становится больше, и параллельно «включается» двупримесный, при этом возникают дополнительные экстремумы (график 2), затем «включается» трехпримесный вклад, что также отмечается появлением дополнительных экстремумов (графики 3, 4). При дальнейшем увеличении c влияние КРПТ уменьшается, а дополнительные экстремумы сглаживаются и исчезают (графики 5, 6).

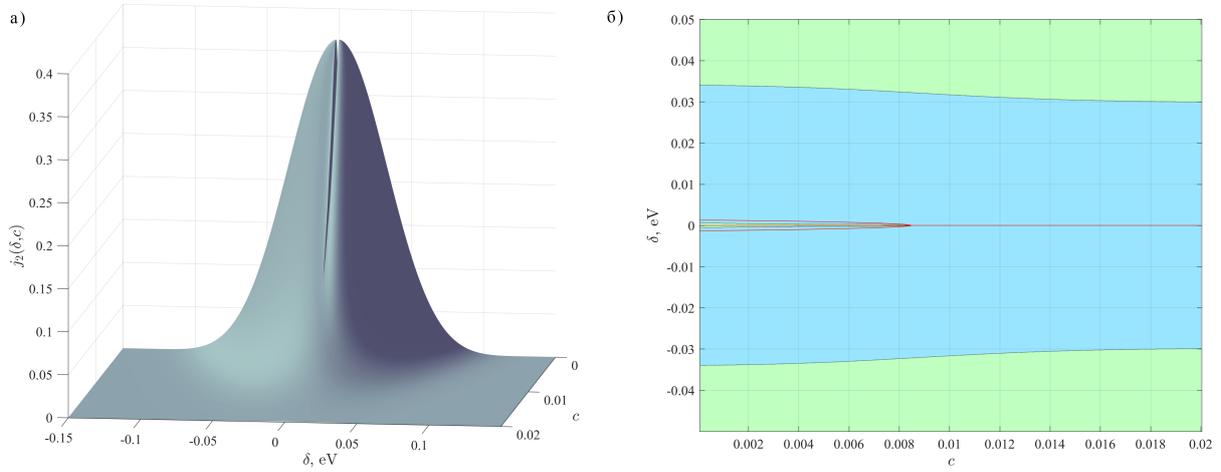


Рис. 5. Двупримесный вклад в ток смещения: а) график $j_2(\delta, c)$; б) особенности двупримесного вклада в ток смещения

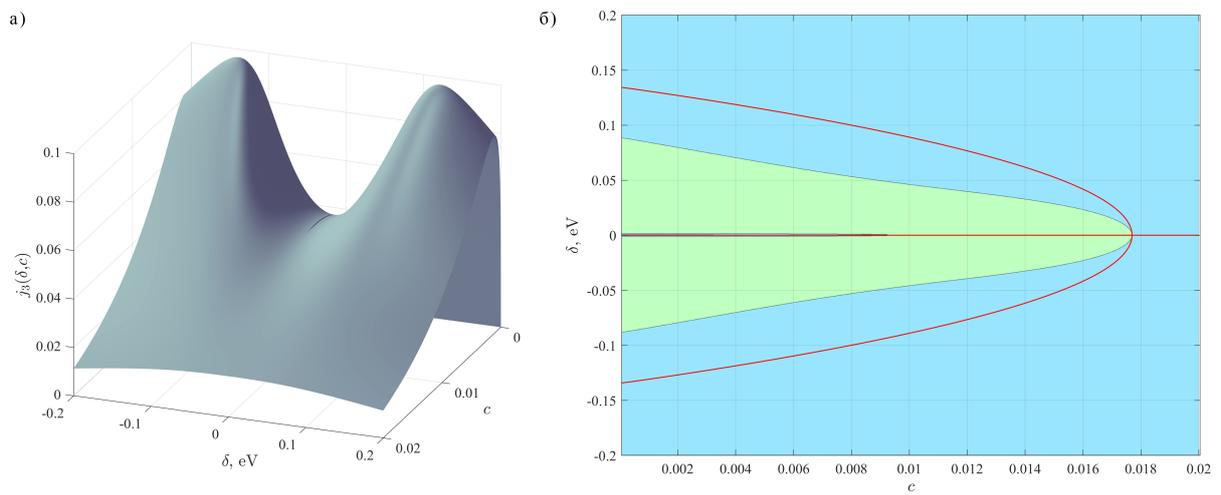


Рис. 6. Трехпримесный вклад в ток смещения: а) график $j_3(\delta, c)$; б) особенности трехпримесного вклада в ток смещения

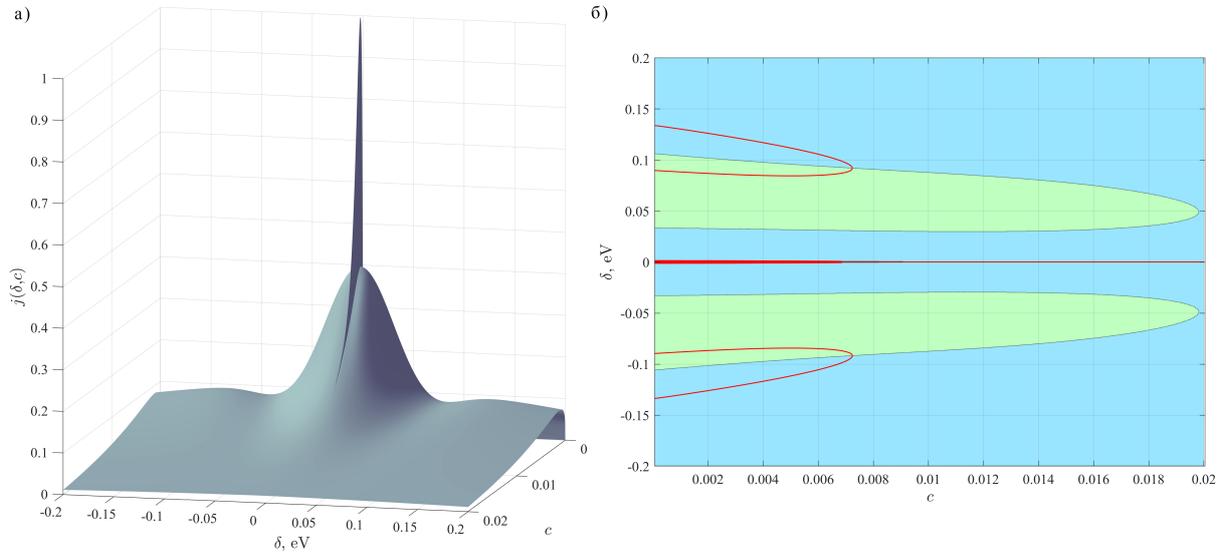


Рис. 7. Суммарный ток смещения: а) график $j(\delta, c)$; б) особенности суммарного тока смещения

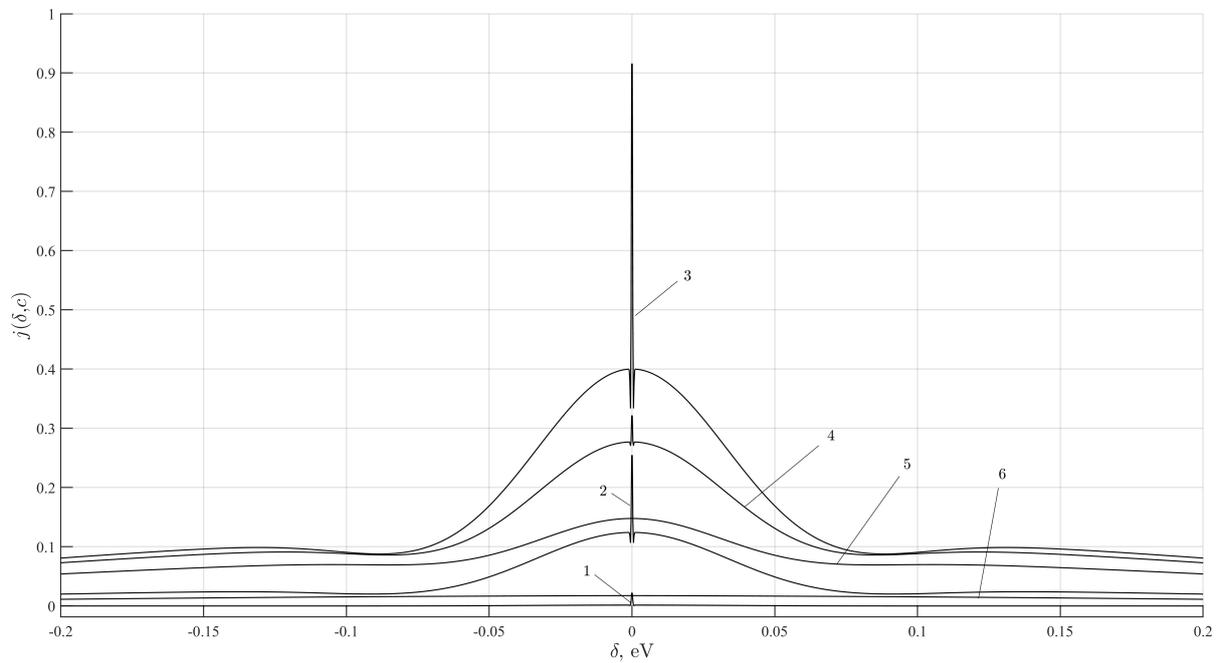


Рис. 8. Зависимость $j(\delta, c)$ при $c = 10^{-7}$ (1), $c = 10^{-5}$ (2), $c = 9 \cdot 10^{-5}$ (3), $c = 3 \cdot 10^{-3}$ (4), $c = 6 \cdot 10^{-3}$ (5), $c = 0,02$ (6)

Заключение

В работе исследовано поведение тока смещения флюксона в длинном джозефсоновском $S-I-S$ -туннельном контакте с неупорядоченным I -слоем в пространстве параметров (δ, c) , где $\delta = \mu - \varepsilon_0$ – отклонение уровня Ферми контакта от локального одноэлектронного примесного уровня. Показано, что есть физически существенные значения концентрации, при которых зависимость тока смещения от δ имеет особенности (дополнительные максимумы), обусловленные вкладами КРПТ, проходящих через разное число примесей. Также выявлено не только количественное, но и качественное (появление и исчезновение особенностей) изменение зависимости тока смещения флюксона от δ . Полученные результаты могут быть полезны при интерпретации данных возможных экспериментов, а также при создании технических устройств на основе неупорядоченных $S-I-S$ -контактов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрикосов, А. А. Введение в теорию металлов / А. А. Абрикосов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 600 с.
2. Бароне, А. Эффект Джозефсона: Физика и применения / А. Бароне, Дж. Патерно. — М. : Мир, 1984. — 640 с.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1966. — 296 с.
4. Веденеев, С. И. Регистрация излучения, вызванного движением джозефсоновских вихрей в монокристалле $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-x}\text{CuO}_{6+\delta}$ в высоких магнитных полях, непосредственно внутри образца / С. И. Веденеев // Письма в ЖЭТФ. — 2019. — Т. 118, № 2. — С. 125–190. — DOI: 10.31857/S1234567823140100
5. Кирпиченков, В. Я. Влияние квантовых резонансно-перколяционных траекторий на параметры джозефсоновского вихря / В. Я. Кирпиченков // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 132, № 1 (2). — С. 294–296.
6. Кирпиченков, В. Я. Резонансная вольт-амперная характеристика трехмерного туннельного перехода со слабым структурным беспорядком / В. Я. Кирпиченков // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 116, № 3 (9). — С. 1048–1057.
7. Кузьмин, Н. М. Гидродинамический механизм формирования и коллимации струй в молодых звездных объектах / Н. М. Кузьмин, В. В. Мусцовой, С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 6. — С. 51–62. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.6.5>
8. Кулик, И. О. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах / И. О. Кулик, И. К. Янсон. — М. : Наука, 1970. — 272 с.
9. Лифшиц, И. М. О туннельной прозрачности неупорядоченных систем / И. М. Лифшиц, В. Я. Кирпиченков // ЖЭТФ. — 1979. — Т. 77, № 3 (9). — С. 989–1016.
10. Островский, А. М. Решение уравнений и систем уравнений / А. М. Островский. — М. : Изд-во иностр. лит., 1963. — 220 с.
11. Позднеев, С. А. Метод численного решения уравнений квантовой теории рассеяния для системы нескольких частиц / С. А. Позднеев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2022. — Т. 25, № 3. — С. 58–72. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.4>
12. Численно-аналитическое моделирование рефракции низкочастотных солнечных радиовсплесков в возмущенной короне / Д. С. Лукьянцев, Н. Т. Афанасьев, А. Б. Танаев, С. О. Чудаев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 43–54. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.4>

13. Davidson, A. Effect of Surface Losses on Soliton Propagation in Josephson Junctions / A. Davidson, N. F. Pedersen, S. Pagano // Appl. Phys. Lett. — 1986. — Vol. 48. — P. 1306–1308. — DOI: <https://doi.org/10.1063/1.96961>
14. Devoret, M. H. Superconducting Circuits for Quantum Information: An Outlook / M. H. Devoret, R. J. Schoelkopf // Science. — 2013. — Vol. 339. — P. 1169–1174. — DOI: [10.1126/science.1231930](https://doi.org/10.1126/science.1231930)
15. Direct Observation of Josephson Vortex Cores / D. Roditchev, C. Brun, L. Serrier-Garcia, J. C. Cuevas, et. al. // Nat. Phys. — 2015. — Vol. 11. — P. 332–337. — DOI: [http://10.1038/NPHYS3240](https://doi.org/10.1038/NPHYS3240)
16. Experiments with Solitons in Annular Josephson Junctions / A. V. Ustinov, T. Doderer, I. V. Vernik, N. F. Pedersen, R. P. Huebener, V. A. Oboznov // Physica D. — 1993. — Vol. 68. — P. 41–44. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90026-W](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90026-W)
17. Josephson Vortex Coupled to a Flux Qubit / K. G. Fedorov, A. V. Shcherbakova, A. V. Schäfer, A. V. Ustinov // Appl. Phys. Lett. — 2013. — Vol. 102. — P. 132602. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1063/1.4800585](https://doi.org/10.1063/1.4800585)
18. Kemp, A. Josephson Vortex Qubit: Design, Preparation and Read-Out / A. Kemp, A. Wallraff, A. V. Ustinov // Phys. Stat. Sol. (b). — 2002. — Vol. 233, № 3. — P. 472–481. — DOI: [https://doi.org/10.1002/1521-3951\(200210\)233:3<472::AID-PSSB472>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/1521-3951(200210)233:3<472::AID-PSSB472>3.0.CO;2-J)
19. Nakajima, K. Logic Design of Josephson Network / K. Nakajima, Y. Onodera, Y. Ogawa // J. Appl. Phys. — 1976. — Vol. 47, № 4. — P. 1620–1627. — DOI: [10.1063/1.322782](https://doi.org/10.1063/1.322782)
20. Zolotaryuk, Y. Enhanced Fluxon Transmission through Impurities / Y. Zolotaryuk // Eur. Phys. J. B. — 2008. — Vol. 62. — P. 349–355. — DOI: [10.1140/epjb/e2008-00152-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2008-00152-7)

REFERENCES

1. Abrikosov A.A. *Vvedenie v teoriyu metallov* [Introduction to the Theory of Normal Metals]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2009. 600 p.
2. Barone A., Paterno Dzh. *Effekt Dzhozefsona: Fizika i primeneniya* [Physics and Application of the Josephson Effect]. Moscow, Mir Publ., 1984. 640 p.
3. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnye mnogochleny* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 296 p.
4. Vedenev S.I. Registratsiya izlucheniya, vyzvannogo dvizheniem dzhozefsonovskikh vikhrey v monokristalle $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-x}\text{CuO}_{6+\delta}$ v vysokikh magnitnykh polyakh, neposredstvenno vnuti obraztsa [Josephson Vortex Motion in a Layered $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-x}\text{CuO}_{6+\delta}$ Single Crystal in Parallel High Magnetic Fields]. *Pisma v ZhETF*, 2019, vol. 118, no. 2, pp. 125-190. DOI: [10.31857/S1234567823140100](https://doi.org/10.31857/S1234567823140100)
5. Kirpichenkov V.Ya. Vliyanie kvantovykh rezonansno-perkolyatsionnykh traektoriy na parametry dzhozefsonovskogo vikhrya [Effect of Quantum Resonance-Percolation Trajectories on the Parameters of a Josephson Vortex]. *ZhETF*, 2007, vol. 132, no. 1 (2), pp. 294-296.
6. Kirpichenkov V.Ya. Rezonansnaya volt-ampernaya kharakteristika trekhmernogo tunnelnogo perekhoda so slabym strukturnym besporyadkom [Resonance Current-Voltage Characteristics of Three-Dimensional Tunnel Junctions with Weak Structural Disorder]. *ZhETF*, 1999, vol. 116, no. 3 (9), pp. 1048-1057.
7. Kuzmin N.M., Mustsevoy V.V., Khrapov S.S. Gidrodinamicheskii mekhanizm formirovaniya i kollimatsii struy v molodykh zvezdnykh obyektakh [The Hydrodynamical Mechanism of Jets' Formation and Collimation in Young Star Objects]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2017, vol. 20, no. 6, pp. 51-62. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.6.5>
8. Kulik I.O., Yanson I.K. *Effekt Dzhozefsona v sverkhprovodyashchikh tunnelnykh strukturakh* [Josephson Effect in Superconductive Tunnel Structures]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 272 p.

9. Lifshits I.M., Kirpichenkov V.Ya. О tunnelnoy prozrachnosti neuporyadochennykh sistem [Tunnel Transparency of Disordered Systems]. *ZhETF*, 1979, vol. 77, no. 3 (9), pp. 989-1016.
10. Ostrovskiy A.M. *Reshenie uravneniy i sistem uravneniy* [Solution of Equations and Systems of Equations]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1963. 220 p.
11. Pozdneev S.A. Metod chislennogo resheniya uravneniy kvantovoy teorii rasseyaniya dlya sistemy neskol'kikh chastits [Method of Numerical Solution Quantum Few-Body Scattering Problem]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2022, vol. 25, no. 3, pp. 58-72. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.4>
12. Lukyantsev D.S., Afanasev N.T., Tanaev A.B., Chudaev S.O. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie refraktsii nizkочастотnykh solnechnykh radiovсплесков v vozmushchennoy korone [Numerical-Analytical Modeling of Refraction of the Low-Frequency Solar Radio-Bursts in Perturbed Crown]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 43-54. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.4>
13. Davidson A., Pedersen N.F., Pagano S. Effect of Surface Losses on Soliton Propagation in Josephson Junctions. *Appl. Phys. Lett.*, 1986, vol. 48, pp. 1306-1308. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.96961>
14. Devoret M.H., Schoelkopf R.J. Superconducting Circuits for Quantum Information: An Outlook. *Science*, 2013, vol. 339, pp. 1169-1174. DOI: [10.1126/science.1231930](https://doi.org/10.1126/science.1231930)
15. Roditchev D., Brun C., Serrier-Garcia L., Cuevas J.C., et. al. Direct Observation of Josephson Vortex Cores. *Nat. Phys.*, 2015, vol. 11, pp. 332-337. DOI: <https://doi.org/10.1038/NPHYS3240>
16. Ustinov A.V., Doderer T., Vernik I.V., Pedersen N.F., Huebener R.P., Oboznov V.A. Experiments with Solitons in Annular Josephson Junctions. *Physica D*, 1993, vol. 68, pp. 41-44. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90026-W](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90026-W)
17. Fedorov K.G., Shcherbakova A.V., Schäfer A.V., Ustinov A.V. Josephson Vortex Coupled to a Flux Qubit. *Appl. Phys. Lett.*, 2013, vol. 102, p. 132602. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4800585>
18. Kemp A., Wallraff A., Ustinov A.V. Josephson Vortex Qubit: Design, Preparation and Read-Out. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 2002, vol. 233, no. 3, pp. 472-481. DOI: [https://doi.org/10.1002/1521-3951\(200210\)233:3<472::AID-PSSB472>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/1521-3951(200210)233:3<472::AID-PSSB472>3.0.CO;2-J)
19. Nakajima K., Onodera Y., Ogawa Y. Logic Design of Josephson Network. *J. Appl. Phys.*, 1976, vol. 47, no. 4, pp. 1620-1627. DOI: [10.1063/1.322782](https://doi.org/10.1063/1.322782)
20. Zolotaryuk Y. Enhanced Fluxon Transmission Through Impurities. *Eur. Phys. J. B*, 2008, vol. 62, pp. 349-355. DOI: [10.1140/epjb/e2008-00152-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2008-00152-7)

**PECULIARITIES OF FLUXON SHIFT CURRENT
IN A DISORDERED S-I-S-TUNNEL JUNCTION****Oleg I. Lozin**

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Mathematics and Mathematical Modeling,
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
oleg.lozin@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0740-6479>
Prosvescheniya St, 132, 346428 Novochoerkassk, Russian Federation

Irina A. Vyatkina

Assistant, Department of Physics and Photonics,
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)
irinka.vyatkina@mail.ru
Prosvescheniya St, 132, 346428 Novochoerkassk, Russian Federation

Abstract. When a Josephson vortex (fluxon) moves in a tunnel *S-I-S* (*S* – superconductor, *I* – insulator) contact, in the *I*-layer of which there are random inhomogeneities, the radiation friction of the vortex against these inhomogeneities leads to a slowdown in its movement. To control the speed of the fluxon, a current can be introduced into the contact – the so-called fluxon shift current. In the article, the behavior of the fluxon shift current in a long *S-I-S*-tunnel junction with weak (low impurity concentrations) structural disorder in the *I*-layer is studied using a numerical-analytical method. Quantum resonant percolation trajectories (QRPTs), also called Lifshitz-Kirpichenkov trajectories, which are randomly formed in the *I*-layer containing impurity atoms, are considered as an inhomogeneity that influences the vortex dynamics. The fluxon shift current was considered in the parameter space (δ, c) , where $\delta = \mu - \varepsilon_0$ is the deviation of the Fermi level of the junction from the local single-electron impurity level. It is shown that there are physically significant concentration values at which the dependence of the shift current on δ has features (additional maxima) caused by the contributions of the QRPTs passing through different numbers of impurities. Not only quantitative but also qualitative (appearance and disappearance of features) changes in the dependence of the fluxon shift current on δ were also revealed. The results obtained can be useful in interpreting experimental data, as well as in creating technical devices based on disordered *S-I-S*-contacts.

Key words: disordered tunnel junction, Josephson vortex, quantum resonant-percolation trajectories, fluxon dynamics, numerical-analytical method.