DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.3

УДК 517.946.9
ББК 56.12

Дата поступления статьи: 22.11.2024
Дата принятия статьи: 04.06.2025

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА БИОТКАНИ

Фатимат Хусейновна Кудаева

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Института искусственного интеллекта и цифровых технологий,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова
kfatimat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-1026-3280
ул. Чернышевского, 173, 360004 г. Нальчик, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена моделированию процесса низкотемпературного воздействия на биоткани при деструкции тканей сферическими и полусферическими аппликаторами в одномерном приближении. Решена стационарная задача с фазовыми переходами для модели на основе уравнения типа Эмдена — Фаулера. Решение нестационарной задачи найдено в виде суммы тепловых потенциалов. Обсуждаются алгоритмы, которые легли в основу программных комплексов. Проведены некоторые численные решения при различных условиях. Построена математическая модель гипотермии, основанная на интегральном уравнении.

Ключевые слова: математическая модель, задача с фазовыми переходами, интегральные уравнения, конечно-разностный аналог, аппроксимация.

Введение

Математическое моделирование тепловых процессов, возникающих при низкотемпературном воздействии на биоткани, является важным инструментом анализа в приложении для различных областей медицины и биотехнологий [13; 34–36]. Особо следует выделить применение математических методов с целью повышения эффективности медицинской диагностики на основе радиотермометрии [21; 37]. Это связано с развитием новых криогенных технологий и использованием их в разных областях человеческой деятельности.

© Кудаева Ф.Х., 2025

Имеется целый ряд математических моделей, описывающих тепловые процессы в биологических тканях. Однако возникает проблема создания новых математических моделей для моделирования фазовых переходов, возникающих при воздействии низких температур на биологические ткани. Эти модели требуют разработки численных алгоритмов для их решения и создания соответствующих программных продуктов.

Математическое описание тепловых процессов с фазовыми переходами, восходит к работам Г. Ламе и Б. Клайперона. Развитием стала модель Йозефа Стефана [39], позже названная «задачей Стефана» [29; 30]. Среди работ, посвященных вопросам разрешимости задач с фазовыми переходами, можно выделить работы А.А. Самарского, О.А. Олейника и др. [9; 10; 23; 24; 30].

Основные теоретические результаты, связанные с изучением нелинейных процессов теплопроводности в активных средах с источниками или стоками, зависящими от искомых полей получены в работах: А.А. Самарского, С.П. Курдюмова, Г.Г. Еленина, А.П. Михайлова, В.А. Галактионова, К.Б. Павлова, Л.К. Мартинсона, А.Н. Тихонова, Н.С. Пискунова, О.А. Олейника, О.А. Ладыженской, Т.Д. Вентцеля, В.П. Маслова, М.И. Вишика, С.И. Похожаева, А.С. Калашникова, С.Н. Кружкова, С.Н. Антонцева, Ж.-Л. Лионса, Ф. Браудера, Х. Брезиса [1; 2; 9; 10; 14; 20; 22–24; 27; 28; 31; 33; 38].

Цель данной работы является изучение динамики температурного поля биологических тканей при низкотемпературном воздействии на биоткани криозондом со сферически — симметричной формой аппликатора с использованием численных методов.

1. Постановка задачи

Для охлаждения или замораживания биологических тканей используются инструменты со сферическими и полусферическими формами аппликаторы. В качестве приложения укажем на задачу разрушения тканей в медицине [3; 5; 6; 11; 37]. Указанная форма аппликаторов позволяет изучать динамику температурного поля биологических тканей на основе решения следующей задачи со свободной границей [12; 16; 17]:

$$
\begin{gathered}
u_{xx} - \chi^2 \left[k + (1-k)\,\eta\,(x-u)\right] \frac{\partial u}{\partial t} = \chi^2 x^{1-\beta} u^{\beta} \eta\,(x-u)\,, \quad 1 < x < s\,(t)\,, \quad t > 0, \\
u\,(x,0) = 0, \quad 1 < x < s\,(0)\,, \\
\frac{\partial u}{\partial x} - \left[H + (h-H)\,\eta\,(1-u)\right] u = -g\,(t) + (1-\gamma)\,\mu\eta\,(u-1)\,, \quad x = 1, \quad t > 0, \qquad (1) \\
u\,(s\,(t)\,,t) = 0, \quad \frac{\partial u\,(s\,(t)\,,t)}{\partial x}, \quad t > 0, \\
[u]_{x^*} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x^*} = \chi^2 P x^* \frac{dx^*}{dt}, \quad t > 0,
\end{gathered}
$$

Используются следующие обозначения:

$$
h = 1 + \mu, \quad \mu = \frac{\alpha r_0}{\overline{\lambda}}, \quad g\,(t) = \mu \frac{\overline{T} - T_A\,(t)}{\overline{T} - T^*},
$$

$$
w = \frac{c_k m_k T^{1-\beta}}{\left(\overline{T} - T^*\right)^{1-\beta}}, \quad H = 1 + \mu\gamma, \quad \gamma = \frac{\overline{\lambda}}{\underline{\lambda}},
$$

$$k=\frac{\underline{c}\underline{\rho}}{\overline{c}\overline{\rho}},\quad P=\frac{\Lambda}{\overline{c}\left(\overline{T}-T^{*}\right)},\quad \chi=\sqrt{\frac{w}{\overline{\lambda}}}r_0,$$

$\overline{T}=36{,}6$ °C, $T^{*}=0\pm 3$ °C, T_A — температура аппликатора криозонда, λ, c, ρ, Λ — являются теплофизическими характеристиками биологической ткани, c_k, m_k — теплоемкость и скорость массы крови; $\chi>0$ — означает параметр выхода на заданный режим охлаждения; β является параметром нелинейности. Знак черта над или под символами обозначает соответственно незамороженную или замороженную области биологической ткани, $[\ ]_{x^*}$ — означает скачок соответствующей функции.

В задаче (1) определению подлежат температурное поле $u=u(x,y)$, свободная граница $s=s(t)$ и граница раздела фаз $x^{*}=x^{*}(t)$.

Стационарная задача, которая соответствует задаче (1), при $\beta=0$ имеет точное аналитическое решение

$$u\left(x\right)=\overline{u}+\left(1-x\right)\frac{\left(\overline{u}-x^{*}\right)}{\left(x^{*}-1\right)},\quad 1<x<x^{*},$$

$$u\left(x\right)=\frac{\chi^{2}}{6}\left(2s+x^{*}\right)\left(s-s^{2}\right),\quad x^{*}<x<s, \tag{2}$$

где

$$\overline{u}=x^{*}+\frac{H\left(\varphi-x^{*}\right)\left(x^{*}-1\right)}{1+H\left(x^{*}-1\right)},\quad \varphi=\frac{-g_{\infty}+\left(1-\gamma\right)\mu}{H},$$

а x^{*} и s являются положительными решениями следующей нелинейной системы

$$x^{*}-\frac{\chi^{2}}{6}\left(2s+x\right)\left(s-x^{*}\right)^{2}=0,$$

$$s^{2}-{x^{*}}^{2}+\frac{2H\left(\varphi-x^{*}\right)}{\chi^{2}\left(1+H\right)}\left(x^{*}-1\right)=0. \tag{3}$$

Пусть $x^{*(0)}=1{,}1$, $s^{0}=1{,}1$ — начальное приближение,

$$F_1\left(x^{*},s\right)=x^{*}+A\left(2s+x^{*}\right)\left(s-x^{*}\right),$$

$$F_2\left(x^{*},s\right)=s^{2}-{x^{*}}^{2}+B\left(\varphi-x^{*}\right)\left(x^{*}-1\right)$$

где $A=-\frac{\chi^{2}}{6}$, $B=\frac{2H(1+H)}{\chi^{2}}$.

Согласно методу Ньютона [1; 3; 7; 24–26; 30; 37], получаем:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x^{*}}=1-A\left(s+2x^{*}\right),\quad \frac{\partial F_1}{\partial s}=A\left(4s-x^{*}\right),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x^{*}}=-2x^{*}+B\left(-2x^{*}+\varphi-1\right),\quad \frac{\partial F_2}{\partial s}=2s.$$

$$\Delta x^{*(0)}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-2{,}42+3{,}3AB\left(\varphi-1{,}1\right)0{,}1}{2{,}2+10{,}23B-3{,}3B\varphi},$$

$$\Delta s^{(0)}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{B\varphi-3{,}31B+0{,}33Ab\varphi-0{,}3AB-2{,}42}{2{,}2+10{,}23B-3{,}3B\varphi}.$$

Если для $\varepsilon = 0{,}0001$ выполняется неравенство $\max\left(\left|\Delta x^{*(0)}\right|, \left|\Delta s^{(0)}\right|\right) \leqslant \varepsilon$, то вычисления заканчиваются. Если неравенство $\max\left(\left|\Delta x^{*(0)}\right|, \left|\Delta s^{(0)}\right|\right) \leqslant \varepsilon$ не выполняется, то тогда $x^{*(0)} = x^{*(1)}$, $s^{(0)} = s^{(1)}$ и строим новую систему уравнений. Аналогичный процесс проводим для последующих итераций.

Начальное приближение определяем графическим способом и в качестве начального приближения можно взять $x^{(0)} = 1{,}1$, $s^{(0)} = 1{,}2$.

Применяя метод итерации, процесс вычисления неизвестных границ строится по следующим формулам:

$$x^{*(k+1)} = A\left(2s^{(k)} + x^{*(k)}\right)\left(s^{(k)} - x^{*(k)}\right)^2,$$

$$s^{(k+1)} = \pm\sqrt{\left(x^{*(k)}\right)^2 - B\left(\varphi - x^{*(k)}\right)\left(s^{(k)} - x^{*(k)}\right)^2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных на двух последовательных итерациях не станут малыми в соответствии со следующим неравенством:

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для определения условия сходимости используется принцип сжатых отображений.

2. Интегральные уравнения для задачи гипотермии

Для описания динамики охлаждения биологических тканей поставим следующую задачу со свободной границей:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \chi^2 x^{1-\beta} u^{\beta}, \quad 1 < x < s(t), \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 1 < x < s(0),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} - hu = -h\varphi(t), \quad x = 1, \quad t > 0, \tag{4}$$
$$u(s(t), t) = 0, \quad \frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0,$$

где $\varphi(t) = \frac{g(r)}{h}$.

Асимптотическая устойчивость решения задачи (4), позволяет искать решение в виде суммы $u(x,t) = u(x) + v(x,t)$, где $u(x)$ является решением соответствующей стационарной задачи с $s(t) = s = \text{const}$. Функция $v(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = F(x, v), \quad 1 < x < s(t), \quad t > 0,$$
$$v(x, 0) = v_0(x), \quad 1 < x < s(0),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \vartheta v = -\vartheta\varphi(t), \quad x = 1, \quad t > 0, \tag{5}$$
$$v(s(t), t) = -u(s(t)), \quad \frac{\partial v(s(t), t)}{\partial x} = -\frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x}, \quad t > 0,$$

Пусть выполняется $\vartheta \gg 1$ ($h \gg 1$). Тогда верно равенство $v(1,t) = \psi(t)$. Решение задачи (5) будем искать в виде суммы тепловых потенциалов [8; 18; 19; 21]:

$$v(x,t) = \int_1^{x(0)} G(x,t;\xi,0)\, v_0(\xi) d\xi + \int_0^1 \frac{\partial G(x,t;1,t')}{\partial \xi} \psi(t') dt' + \\ + \int_1^{x(0)} G(x,t;s(t'),t') \mu(t')\, dt + \int_0^1 \int_1^{x(t')} G(x,t;\xi,t')\, F(\xi,v) d\xi dt' \tag{6}$$

где

$$G(x,t;\xi,t') = G_0(x-1,t;\xi-1,t') - G_0(1-x,t;\xi-1,t'),$$

$$G_0(x,t;\xi,t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-t')}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t')}}. \tag{7}$$

Для любой дифференциальной плоскости и подлежащей определению функции $s(t)$ уравнение (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению, начальному условию и краевому условию $u(1,t) = \psi(t)$ искомой задачи (5). Если потребовать, чтобы выполнялись оставшиеся условия задачи (5), то получается следующая система интегральных уравнений:

$$\int_1^{x(0)} G(s(t),t;\xi,0)\, v_0(\xi) d\xi + \int_0^t G_\xi(s(t),t;1,t') dt' + \\ + \int_1^t G(s(t),t;s(t'),t')\, \mu(t') dt' + \int_0^t \int_1^{x(t)} G(s(t),t;\xi,t')\, F(\xi,v) d\xi dt' = \\ = -u(s(t)), \tag{8}$$

$$\frac{\mu(t)}{2} + \int_1^{x(0)} G_x(s(t),t;\xi,0)\, v_0(\xi) d\xi + \int_1^{x(0)} \frac{\partial G(s(t),t;1,t')}{\partial \xi} \psi(t') dt' + \\ + \int_0^t \frac{\partial G(s(t),t;s(t'),t')}{\partial x} \mu(t') dt' - \\ - \int_0^t \int_1^{x(0)} \frac{\partial G(s(t),t;s(t'),t')}{\partial x} \mu(t') d\xi dt' - \\ - \int_0^t \int_1^{x(0)} \frac{\partial G(s(t),t;s(t'),t')}{\partial x} F(\xi,v) d\xi dt' = -\frac{\partial u(s(t))}{\partial x}. \tag{9}$$

Таким образом, имеем уравнения (6)–(9), которые образовывают замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений для определения $v(x,t)$, $\mu(t)$ и $s(t)$.

Для поиска неизвестных $u = u(x)$ и s требуется решить стационарную задачу [1].

Далее, для поиска пары $u = u(x)$ и s применяется функция Грина. В итоге получается нелинейное интегральное уравнение Вольтера [8; 15; 18; 19]

$$u(x) = \chi^2 \int_x^s (\xi - x)\, u^\beta(\xi) d\xi \tag{10}$$

и нелинейное уравнение

$$\chi^2 \int_x^s [1 + h(\xi - 1)]\, u^\beta(\xi)\, \xi^{1-\beta} d\xi = h\varphi. \tag{11}$$

Если $\beta = 0$, то получается

$$u(x) = \frac{\chi^2}{6}(2s+x)(s-x)^2. \tag{12}$$

Если $0 \leqslant \beta < 1$, то (10), (11) не имеет точного решения, поэтому ее приближенное решение ищется в виде

$$\widetilde{u} = A(s-x)^{\beta}, \tag{13}$$

где параметры A, s, b относятся к неизвестным и их требуется тоже определить.

В случае, когда $\beta = 0$, получаем:

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_1^{x(0)}\left\{\exp\left[-\frac{(s(t)-\xi)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(2-s(t)-\xi)^2}{4t}\right]\right\}u(\xi)d\xi+\\
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{s(t)-1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}\exp\left[\frac{(s(t)-1)^2}{4(t-t')}\right]\psi(t')dt'+\\
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t t\frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\exp\left[-\frac{(s(t)-1)^2}{4(t-t')}\right]-\right.\\
\left.-\exp\left[-\frac{(2-s(t)-t')^2}{4(t-t')}\right]\right\}\mu(t')\,dt'
\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\mu(t)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\pi^{3/2}}}\left\{[s(t)-\xi]\exp\left[\frac{(s(t)-\xi)^2}{4t}\right]+\right.\\
\left.+[2-s(t)-\xi]\exp\left[-\frac{(2-s(t)-\xi)^2}{4t}\right]\right\}u(\xi)\,d\xi+\\
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\left\{\frac{1}{(t-t')^{3/2}}-\frac{(s(t)-1)^2}{2(t-t')^{3/2}}\exp\left[-\frac{s(t)-s(t')}{4(t-t')}\right]+\right.\\
\left.+[2-s(t)-s(t')]\exp\left[-\frac{(2-s(t)-s(t'))^2}{4t}\right]\right\}\mu(t)\,dt'=-u_x(s(t)).
\end{gathered} \tag{15}$$

Определив из системы функции $\mu = \mu(t)$ и $s = s(t)$, с помощью квадратуры (6) ($F(\xi, v) = 0$), находим $v(x,t)$, $1 < x < s(t)$, $t > 0$.

Относительно $\mu(t)$ система (14), (15) является системой интегральных уравнений Вольтера. Поскольку неизвестная функция $s = s(t)$ входит в систему сложным образом, то вопрос разрешимости данной системы остается открытым. Полагая $t = T$, получаем, что при $T \to \infty$, первое из данных уравнений системы обращается в тождество, а второе уравнение системы преобразуется к виду:

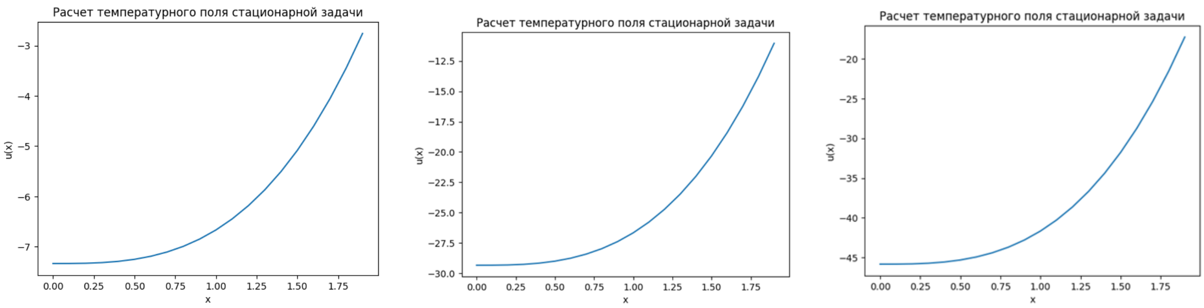
$$\mu(T) + 2\int_0^T G_x(s(T), T; s(t'), t')\,\mu(t')dt' = 0. \tag{16}$$

Согласно (6) $v(x,T) \to 0$, и поэтому $u(x,T) \to u(x)$, при $T \to \infty$.

Применение конечномерной аппроксимации дает систему из нелинейных алгебраических уравнений для определения узловых значений $u_i = u(x_i)$ и числа k.

Использование программного комплекса для ЭВМ «Сферически — симметричная гипотермия и криодеструкция биологической ткани в медицине» [16], позволяет определить режимы охлаждения, динамику температурного поля в случае $0 \leqslant \beta < 1$ и визуализировать температурные поля.

Проведены численные расчеты на ЭВМ с применением разработанного программного комплекса. Результаты расчета представлены на рисунках 1, 2.



а) $\beta = 0, H = 1, fi = -10$ б) $\beta = 0, H = 1, fi = -15$ в) $\beta = 0, H = 1, fi = -20$

Рис. 1. Распределения температурного поля (стационарный случай), показанные для трех случаев: а), б), в)

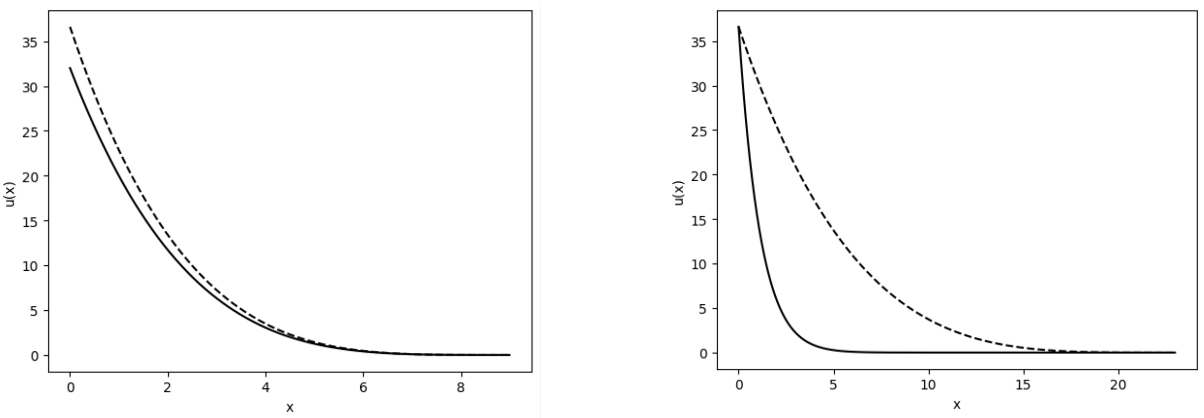


Рис. 2. Примеры расчетов температуры $0 \leqslant \beta < 1$

Заключение

В работе построены модели для расчета характеристик биоткани при воздействии на них низкой температурой. Описанные методы решения одномерных задач позволяют установить функциональные зависимости основных параметров низкотемпературного воздействия на биоткани от входных данных, рассчитать глубину криопоражения, замораживания и охлаждения, скорость замораживания, необходимую экзпозицию криовоздействия.

Предлагаемые в работе подходы можно использовать помимо криомедицины также в химических технологиях, строительстве, при решении задач, возникающих при добыче нефти и газа и в других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. — М. : Наука, 1971. — 240 с.
2. Аоуаоуда, М. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости / М. Аоуаоуда, А. Аяди, Х. Ф. Яшима // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. Науки. — 2022. — Т. 26, № 2. — С. 222–258.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 1987. — 600 с.
4. Березовский, А. А. Изменение солености и коэффициента вертикальной диффузии в Черном море в связи с сокращением стока рек / А. А. Березовский, С. Г. Богуславский // Динамика и устойчивость механических систем. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 167–175.
5. Березовский, А. А. Проекционно-сеточный метод решения одномерных задач Стефана / А. А. Березовский // Математическая физика и нелинейная механика. — 1985. — № 4. — С. 71–76.
6. Березовский, А. А. Нестационарные задачи сферически-симметричной гипотермии биоткани / А. А. Березовский, К. О. Жураев, И. И. Юртин // Препринт АН УССР. — Киев : Ин-т математики, 1990. — № 90.27. — С. 9–20.
7. Вабищевич, П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей / П. Н. Вабищевич. — М. : Изд-во МГУ, 1987. — 164 с.
8. Вольтерра, В. Теория функционалов и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
9. Галактионов, В. А. О методе стационарных состояний для квазилинейных параболических уравнений / В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский // Математический сборник. — 1989. — Т. 180, № 8. — С. 995–1016.
10. Галактионов, В. А. Об асимптотической устойчивости автомодельных решений уравнения теплопроводности с нелинейным стоком / В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский // Доклады АН СССР. — 1985. — Т. 281, № 1. — С. 23–28.
11. Жураев, К. Интегральные уравнения одномерных задач криодеструкции / К. Жураев // Математическое моделирование физических процессов : сб. науч. тр. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 61–67.
12. Кайгермазов, А. А. Математическая модель сферически-симметричной гипотермии биоткани / А. А. Кайгермазов, Ф. Х. Кудаева // Современные проблемы науки и образования. — 2015. — № 2-2. — С. 834–840.
13. Криохирургия / Э. И. Кандель, Н. С. Пушкарь, А. М. Белоус, Ю. А. Иткин. — М. : Медицина, 1974. — 303 с.
14. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. — М. : Наука, 1980. — 288 с.
15. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. — М. : Наука, 1975. — 304 с.
16. Кудаева, Ф. Х. Компьютерное моделирование низкотемпературного воздействия на биологические ткани сферическим аппликатором / Ф. Х. Кудаева // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. — 2023. — № 2023663249, 21.06.2023
17. Кудаева, Ф. Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах медицины / Ф. Х. Кудаева // Южно-Сибирский научный вестник. — 2023. — № 5 (51). — С. 142–147.
18. Литвинчук, Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. — М. : Наука, 1977. — 448 с.
19. Маслов, В. П. Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой / В. П. Маслов // Теория вероятностей и ее применения. — 2003. — Т. 48, № 2. — С. 403–411.

20. Обзор современных методов криоконсервации различных видов биологического материала / Е. В. Заикина, А. С. Гончарова, В. В. Позднякова, О. В. Пандова, Ю. В. Пржедецкий, В. Г. Воловик, Т. С. Карасев // Современные проблемы науки и образования. — 2022. — № 4. — С. 135–136.

21. Попов, И. Е. Анализ термометрических данных головного мозга, полученных методом микроволновой радиотермометрии / И. Е. Попов, А. Е. Крылова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 2. — С. 32–42. — DOI: 10/15688/mpcm.jvolsu.2023.2.3

22. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М. : Медицина, 1968. — 592 с.

23. Самарский, А. А. Математическое моделирование. Методы описания и исследования сложных систем / А. А. Самарский, Н. Н. Моисеев, А. А. Петров. — М. : Наука, 1989. — 271 с.

24. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / А. А. Самарский, С. П. Курдюмов, Т. С. Ахромеева, Г. Г. Малинецкий. — М. : Наука, 1991. — 560 с.

25. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1987. — 288 с.

26. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. — М. : Наука, 1986. — 288 с.

27. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

28. Филатов, О. П. Стабилизация обобщенного решения третьей краевой задачи для уравнения параболического типа / О. П. Филатов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2014. — № 3 (114). — С. 93–96.

29. Фридман, А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами / А. Фридман. — Москва : Наука, 1990. — 535 с.

30. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 427 с.

31. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

32. Хемминг, Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р. В. Хемминг. — М. : Наука, 1968. — 400 с.

33. Adjutov, M. M. On a Generalization of the Emden Equation / M. M. Adjutov, N. V. Zmitrenko, Yu. A. Klokov // Differential Equations. — 1991. — Vol. 27, № 7. — P. 1107–1113.

34. Chua, K. J. On the Study of the Freeze-thaw Process of a Biological System / K. J. Chua, S. K. Chou // Applied Thermal Engineering. — 2022. — Vol. 29. — P. 3696–3709.

35. Chua, K. J. An Analytical Study on the Thermal Effects of Cryosurgery on Selective Cell Destruction / K. J. Chua, S. K. Chou, J. C. Ho // Journal of Biomechanics. — 2007. — Vol. 40. — P. 100–116.

36. Cryodestruction of Brain Tumors 39th Annual Meeting of the Japan Society for Low Temperature Medicine / S. Vasiliev, V. Krylov, S. Pesnya-Prasolov, A. Zuev, A. Vyatkin, T. Galyan, S. Kungurcev, V. Pavlov // Cryomedicine. — Tokyo, 2012. — P. 43–44.

37. Khoperskov, A. V. Improving the Efficiency of Oncological Diagnosis of the Breast Based on the Combined Use of Simulation Modeling and Artificial Intelligence Algorithms / A. V. Khoperskov, M. V. Polyakov // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, № 8

38. Wentzel, T. D. An analytical Study on the Thermal Effects of Cryosurgery on Selective Cell Destruction / T. D. Wentzel // Journal of Biomechanics. — 2007. — Vol. 40. — P. 100–116.

39. Stefan, J. Uber Einige Probleme der Theorie der Warmeleitung / J. Stefan // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. — 1889. — Vol. 98. — P. 173–184.

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 240 p.
2. Aouaouda M., Ayadi A., Yashima Kh.F. Skhodimost priblizhennykh resheniy yadrom teploprovodnosti dlya uravneniya perenosa-diffuzii v poluploskosti [Convergence of Approximate Solutions by the Core of Thermal Conductivity for the Transfer-Diffusion Equation in a Half-Plane]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Univ. Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222-258.
3. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 600 p.
4. Berezovskiy A.A., Boguslavskiy S.G. Izmenenie solenosti i koeffitsienta vertikalnoy diffuzii v Chernom more v svyazi s sokrashcheniem stoka rek [Changes in Salinity and Vertical Diffusion Coefficient in the Black Sea Due to a Decrease in River Flow]. *Dinamika i ustoychivost mekhanicheskikh sistem* [Dynamics and Stability of Mechanical Systems] Kiev, In-t matematiki AN USSR Publ., 1980, pp. 167-175.
5. Berezovskiy A.A. Proektsionno-setochnyy metod resheniya odnomernykh zadach Stefana [Projection-Grid Method for Solving One-Dimensional Stefan Problems]. *Matematicheskaya fizika i nelineynaya mekhanika* [Mathematical Physics and Nonlinear Mechanics], 1985, no. 4, pp. 71-76.
6. Berezovskiy A.A., Zhuraev K.O., Yurtin I.I. Nestatsionarnye zadachi sfericheski-simmetrichnoy gipotermii biotkani [Nonstationary Problems of Spherical Symmetric Hypothermia of Biological Tissue]. *Preprint AN USSR* [Prepr. Academy of Sciences OF the Ukrainian SSR] Kiev, In-t matematiki Publ., 1990, no. 90.27, pp. 9-20.
7. Vabishchevich P.N. *Chislennye metody resheniya zadach so svobodnoy granitsey* [Numerical Methods for Solving Problems with a Free Boundary]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1987. 164 p.
8. Volterra V. *Teoriya funktsionalov i integro-differentsialnykh uravneniy* [Theory of Functionals and Integro-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 304 p.
9. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Samarskiy A.A. O metode statsionarnykh sostoyaniy dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy [On the Method of Stationary States for Quasi-Linear Parabolic Equations]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1989, vol. 180, no. 8, pp. 995-1016.
10. Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Samarskiy A.A. Ob asimptoticheskoy ustoychivosti avtomodelnykh resheniy uravneniya teploprovodnosti s nelineynym stokom [On the Asymptotic Stability of Self-Similar Solutions of the Thermal Conductivity Equation with Nonlinear Flow]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1985, vol. 281, no. 1, pp. 23-28.
11. Zhuraev K. Integralnye uravneniya odnomernykh zadach kriodestruktsii [Integral Equations of One-Dimensional Cryodestruction Problems]. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov: sb. nauch. tr.* [Mat. Modeling of Physical Processes. Collection of Scientific Papers] Kiev, In-t matematiki AN USSR Publ., 1989, pp. 61-67.
12. Kaygermazov A.A., Kudaeva F.Kh. Matematicheskaya model sfericheski-simmetrichnoy gipotermii biotkani [Mathematical Model of Spherical Symmetric Hypothermia of Biological Tissue]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern Problems of Science and Education], 2015, no. 2-2, pp. 834-840.
13. Kandel E.I., Pushkar N.S., Belous A.M., Itkin Yu.A. *Kriokhirurgiya* [Cryosurgery]. Moscow, Meditsina Publ., 1974. 303 p.
14. Kartashev A.P., Rozhdestvenskiy B.L. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya i osnovy variatsionnogo ischisleniya* [Ordinary Differential Equations and the Basics of Calculus of Variations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 288 p.
15. Krasnov M.L. *Integralnye uravneniya* [Integral Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 304 p.
16. Kudaeva F.Kh. Kompyuternoe modelirovanie nizkotemperaturnogo vozdeystviya na biologicheskie tkani sfericheskim applikatorom [Computer Modeling of Low-Temperature Effects

on Biological Tissues with a Spherical Applicator]. *Svidetelstvo o registratsii programmy dlya EVM* [Certificate of Registration of the Computer Program], 2023, no. 2023661899 dated 06/08/2023

17. Kudaeva F.Kh. Kanonicheskiy vid zadach so svobodnymi granitsami v problemakh meditsiny [The Canonical Type of Tasks with Free Boundaries in the Problems of Medicine]. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik* [South Siberian Scientific Bulletin], 2023, no. 5 (51), pp. 142-147.

18. Litvinchuk G.S. *Kraevye zadachi i singulyarnye integralnye uravneniya so sdvigom* [Boundary Value Problems and Singularly Integral Equations with a Shift]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 448 p.

19. Maslov V.P. Integralnye uravneniya i fazovye perekhody v veroyatnostnykh igrakh. Analogiya so statisticheskoy fizikoy [Integral Equations and Phase Transitions in Probabilistic Games. Analogy with Statistical Physics]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Probability Theory and its Applications], 2003, vol. 48, no. 2, pp. 403-411.

20. Zaikina E.V., Goncharova A.S., Pozdnyakova V.V., Pandova O.V., Przhedetskiy Yu.V., Volovik V.G., Karasev T.S. Obzor sovremennykh metodov kriokonservatsii razlichnykh vidov biologicheskogo materiala [Review of Modern Methods of Cryopreservation of Various Types of Biological Material]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern Problems of Science and Education], 2022, no. 4, pp. 135-136.

21. Popov I.E., Krylova A.E. Analiz termometricheskikh dannykh golovnogo mozga, poluchennykh metodom mikrovolnovoy radiotermometrii [Analysis of Brain Thermometric Data Obtained by Microwave Radiothermometry]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mahematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 2, pp. 32-42. DOI: 10/15688/mpcm.jvolsu.2023.2.3

22. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasi-Linear Equations and Their Applications to Gas Dynamics]. Moscow, Meditsina Publ., 1968. 592 p.

23. Samarskiy A.A., Moiseev N.N., Petrov A.A. *Matematicheskoe modelirovanie. Metody opisaniya i issledovaniya slozhnykh sistem* [Mathematical Modeling. Methods of Description and Research of Complex Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 271 p.

24. Samarskiy A.A., Kurdyumov S.P., Akhromeeva T.S., Malinetskiy G.G. *Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyy khaos* [Unsteady Structures and Diffusion Chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 560 p.

25. Samarskiy A.A. *Vvedenie v chislennye metody* [Introduction to Numerical Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 288 p.

26. Ortega Dzh., Pul U. *Vvedenie v chislennye metody resheniya differentsialnykh uravneniy* [Introduction to Numerical Methods for Solving Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 288 p.

27. Fedoryuk M.V. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.

28. Filatov O.P. Stabilizatsiya obobshchennogo resheniya tretyey kraevoy zadachi dlya uravneniya parabolicheskogo tipa [Stabilization of the Generalized Solution of the Third Boundary Value Problem for a Parabolic Equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya* [Bulletin of the Samara State University. Natural Science Series], 2014, no. 3 (114), pp. 93-96.

29. Fridman A. *Variatsionnye printsipy i zadachi so svobodnymi granitsami* [Variational Principes and Free Boundary Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 535 p.

30. Fridman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type]. Moscow, Mir Publ., 1968. 427 p.

31. Khartman F. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1970. 720 p.

32. Khemming R.V. *Chislennye metody dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical Methods for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 400 p.

33. Adjutov M.M., Zmitrenko N.V., Klokov Yu.A. On a Generalization of the Emden Equation. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 7, pp. 1107-1113.

34. Chua K.J., Chou S.K. On the Study of the Freeze-Thaw Process of a Biological System. *Applied Thermal Engineering*, 2022, vol. 29, pp. 3696-3709.

35. Chua K.J., Chou S.K., Ho J.C. An Analytical Study on the Thermal Effects of Cryosurgery on Selective Cell Destruction. *Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 40, pp. 100-116.

36. Vasiliev S., Krylov V., Pesnya-Prasolov S., Zuev A., Vyatkin A., Galyan T., Kungurcev S., Pavlov V. Cryodestruction of Brain Tumors 39th Annual Meeting of the Japan Society for Low Temperature Medicine. *Cryomedicine*. Tokyo, 2012, pp. 43-44.

37. Khoperskov A.V., Polyakov M.V. Improving the Efficiency of Oncological Diagnosis of the Breast Based on the Combined Use of Simulation Modeling and Artificial Intelligence Algorithms. *Algorithms*, 2022, vol. 15, no. 8

38. Wentzel T.D. An Analytical Study on the Thermal Effects of Cryosurgery on Selective Cell Destruction. *Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 40, pp. 100-116.

39. Stefan J. Uber Einige Probleme der Theorie der Warmeleitung. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, 1889, vol. 98, pp. 173-184.

A MATHEMATICAL MODEL OF LOW-TEMPERATURE EFFECTS ON BIOLOGICAL TISSUES

Fatimat Kh. Kudayeva

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies,
Kabardino-Balkarian State University named after Kh.M. Berbekov
kfatimat@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-1026-3280
Chernyshevskogo St, 173, 360004 Nalchik, Russian Federation

Abstract. The work is devoted to modeling the process of low-temperature impact on biotissues during tissue destruction by spherical and hemispherical applicators in a one-dimensional approximation. A stationary problem with phase transitions is solved for a model based on an Emden-Fowler equation. The solution to the non-stationary problem is found as a sum of thermal potentials. The algorithms that formed the basis of the software packages are discussed. Some numerical solutions under various conditions are given. A mathematical model of hypothermia based on an integral equation is constructed.

Key words: mathematical model, problem with phase transitions, integral equations, finite difference analogue, approximation.