www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.2.1

УДК 517.95
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 05.04.2025
Дата принятия статьи: 11.04.2025

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ПРИ ВАРИАЦИЯХ ЕГО ПОТЕНЦИАЛА НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Елена Алексеевна Мазепа

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
elena.mazepa@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-7603-4133
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Дарья Константиновна Рябошлыкова

Ассистент кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
daria_ryaboshlikova@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе изучаются свойства решений неоднородного уравнения Шрёдингера $\Delta u - c(x)u = h(x)$, где $c(x) \geq 0$, $h(x)$ — локально-непрерывные по Гёльдеру функции, при вариации потенциала данного уравнения $c(x)$ на квазимодельных римановых многообразиях. В представленной работе получены точные условия, при которых разрешимость краевых задач для неоднородного уравнения Шрёдингера на M сохраняется при некоторых изменениях коэффициента $c(x)$.

Ключевые слова: неоднородное уравнение Шрёдингера, краевые задачи, квазимодельное риманово многообразие, вариация потенциала, L-точное многообразие.

Введение

В исследованиях последних десятилетий нередко отмечалась сильная связь между классическими проблемами теории функций и теорией решений эллиптических уравнений в частных производных второго порядка, к примеру, уравнения Лапласа — Бельтрами и стационарного уравнения Шрёдингера. Данная проблематика нашла свое развитие в работах таких российских и зарубежных математиков, как М. Андерсон, А.А. Григорьян, С.А. Корольков, А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа, В.М. Миклюков, М. Мурата, Н.С. Надирашвили, Д. Сулливан, В.Г. Ткачев и ряда других авторов.

В современной математике изучение решений уравнений в частных производных на некомпактных римановых многообразиях охватывает достаточно весомую часть исследований. Истоки данной проблематики восходят к классификационной теории некомпактных римановых поверхностей и многообразий, основанной на изучении некоторых функциональных классов на данных геометрических объектах. Достаточно полное представление об истории развития и современном состоянии данной научной области можно получить, например, из работы [12]. Важный класс задач данного научного направления связан с получением теорем типа Лиувилля о тривиальности пространства ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на римановом многообразии. Так, классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в R^n является тождественной постоянной (двусторонняя теорема Лиувилля).

Другой класс проблем связан с изучением вопроса о разрешимости на некомпактном римановом многообразии задачи Дирихле о восстановлении решения некоторого эллиптического уравнения по граничным данным на «бесконечности» и других краевых задач.

Можно заметить, что сама постановка краевых задач на некомпактных многообразиях может оказаться проблематичной. В ряде случаев (например, на сферически-симметричных, модельных, квазимодельных многообразиях) геометрическая компактификация многообразия позволяет осуществить постановку краевых задач, в частности задачи Дирихле, так же, как и в ограниченных областях R^n (см.: [3; 6; 7; 11; 15; 16]). В остальных ситуациях одним из возможных способов решения указанной проблемы является подход к постановке краевых задач, основанный на введении классов эквивалентных на многообразии функций. Он позволил осуществить постановку краевых задач на многообразии в отсутствие естественной геометрической компактификации и доказать ряд важных свойств решений краевых задач для эллиптических уравнений, таких как принцип максимума, теорема сравнения и теорема единственности (см. [9]).

За последние годы А.Г. Лосевым и его учениками было опубликовано множество работ, посвященных вопросам существования и асимптотического поведения решений различных эллиптических уравнений и неравенств на сферически-симметричных, модельных, квазимодельных многообразиях и некоторых их обобщениях (см., например, [2; 5; 8]). В свою очередь, отправной точкой результатов, полученных в этих работах, можно считать работы [6; 7], где были найдены условия разрешимости задачи Дирихле для ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция на многообразиях с модельными и квазимодельными концами. Более подробно данные многообразия будут описаны ниже.

С другой стороны, важный вопрос относительно свойств решений уравнения (1) на произвольном римановом многообразии был изучен в работе [1]. А именно, в указанной статье исследовался вопрос о сохранении лиувиллева свойства для ограниченных решений уравнения (1) при некоторых вариациях коэффициента $c(x) \geq 0$ и была доказана следующая теорема.

Теорема 1 ([1]). *Пусть* $0 \leq c_1(x) \leq Ac(x)$, *где* $A = const > 0$, $\quad c_1(x) \not\equiv 0$. *Если двусторонняя теорема Лиувилля справедлива для уравнения* $\Delta v - c_1(x)v = 0$, *то она справедлива и для уравнения* $\Delta u - c(x)u = 0$.

Кроме того, в [1] показано, что локальное изменение коэффициента $c(x)$ не влияет на выполнение или невыполнение на некомпактном римановом многообразии лиувиллева свойства для уравнения (1). При этом известно, что случаи $c(x) \equiv 0$ и $c(x) \not\equiv 0$ в уравнении (1) обслуживаются на некомпактном многообразии разными лиувиллевыми теоремами. Поэтому в последнем случае, когда $c(x) \not\equiv 0$, считаем, что потенциал $c(x)$ имеет некомпактный носитель.

Позже в работе [9] рассматривался аналогичный вопрос о сохранении разрешимости краевых задач для уравнения (1) при изменении коэффициента $c(x)$. Было получено условие, при котором на произвольном некомпактном римановом многообразии M разрешимость краевых задач для уравнений $\Delta u - c(x)u = 0$ и $\Delta u = 0$ влекла за собой разрешимость аналогичной краевой задачи для уравнения $\Delta v - c_1(x)v = 0$, если $0 \leq c_1(x) \leq c(x)$ и $c_1(x) \not\equiv 0$.

Все описанные выше результаты касались свойств решений однородных эллиптических уравнений на римановых многообразиях. Однако в последние десятилетия исследования по указанной проблематике стали распространяться и на неоднородные эллиптические уравнения (см., например, [3; 10; 14]).

В данной работе изучаются решения неоднородного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = h(x) \tag{2}$$

на квазимодельных римановых многообразиях M, где $c(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$ — неотрицательная функция, $h(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$ при $0 < \alpha < 1$. А именно, получены точные условия, при которых разрешимость краевых задач для неоднородного уравнения Шрёдингера на M сохраняется при некоторых вариациях потенциала $c(x)$. Ясно, что если $h(x) \equiv 0$, то уравнение (2) является стационарным уравнением Шрёдингера (1). Поэтому всюду далее будем полагать, что $h(x) \not\equiv 0$.

1. Вспомогательные понятия и утверждения

В данном разделе приведем описание квазимодельных римановых многообразий, а также основных понятий и некоторых вспомогательных утверждений.

Пусть M — полное риманово многообразие без края, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт с гладкой границей, D изометрично произведению $[r_0, +\infty) \times S_1 \times S_2 ... \times S_k$ (где $r_0 > 0, S_i$ — компактные римановы многообразия без края) и имеет метрику

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + ... + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Здесь $g_i(r)$ — положительные, гладкие на $[r_0, +\infty)$ функции, а $d\theta_i^2$ — метрика на S_i. Пусть $\dim S_i = n_i$. Ясно, что $\dim M = n_1 + n_2 + ... + n_k + 1$. Всюду в дальнейшем будем считать, что на D выполнено $c(r, \theta_1, ..., \theta_k) \equiv c(r)$, $h_1(r) \leq h(r, \theta_1, ..., \theta_k) \leq h_2(r)$, где $h_1(r)$, $h_2(r) \in C^{0,\alpha}_{loc}([r_0, +\infty))$.

Как и в [10], введем обозначения $S(t) = g_1^{n_1} \cdot \dots \cdot g_k^{n_k}(t)$,

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} c(z)S(z)dz \right) dt, \quad I_i = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} \frac{S(z)}{g_i^2(z)} dz \right) dt,$$

$$K = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} dt, \qquad K_h = K + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\} S(z)dz \right) dt.$$

$$I_h = I + \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int_{r_0}^{t} max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\} S(z)dz \right) dt,$$

где $r_0 > 0$, $i = 1, ..., k$.

Вопросы разрешимости краевых задач и выполнения лиувиллева свойства для ограниченных решений однородных уравнений (уравнения Лапласа-Бельтрами и стационарного уравнения Шрёдингера) на таких многообразиях достаточно подробно были изучены ранее в работах [4; 7]. Сформулируем следующие результаты этих работ, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 2 ([4; 7]). *1) Пусть многообразие M таково, что $I < \infty$ (если $c(x) \equiv 0$, то $K < \infty$), $I_1 = ... = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, ..., k, 0 \leq s \leq k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)$ на M существует ограниченное решение стационарного уравнения Шрёдингера (1) такое, что*

$$\lim_{r \to +\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k).$$

2) На M выполняется лиувиллево свойство для ограниченных гармонических функций тогда и только тогда, когда $I_i = \infty$ для всех $i = 1, ..., k$.

3) На M выполняется лиувиллево свойство для стационарного уравнения Шрёдингера (1) тогда и только тогда, когда $I = \infty$.

Аналогичные условия разрешимости краевых задач для неоднородного уравнения Шрёдингера, в частности для уравнения Пуассона, на квазимодельных римановых многообразиях были получены в [10].

Теорема 3 ([10]). *Пусть риманово многообразие M и правая часть уравнения (2) таковы, что $I_h < \infty$ ($K_h < \infty$, если $c(x) \equiv 0$), $I_1 = ... = I_s = \infty, I_i < \infty$ для всех $i = s+1, ..., k$, $0 \leq s \leq k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)$ на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2) такое, что на D выполнено*

$$\lim_{r \to +\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k).$$

Замечание 1. В пунктах 1) и 2) теоремы 2 и в теореме 3 в случае $s = k$ множество индексов i, для которых $I_i < \infty$, будет пусто и соответствующие предельные функции $\Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)$ будут константами.

Замечание 2. Предельный переход в граничных условиях на «бесконечности» понимается в смысле равномерной сходимости, то есть

$$\lim_{r\to+\infty}||u(r,\theta_1,...,\theta_k)-\Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k)||_{C^0(M\setminus B(r))}=0,$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке компакта B.

Далее наряду с уравнением (2) рассмотрим на M уравнение

$$L_1 u\equiv\Delta u-c_1(x)u=h(x), \tag{3}$$

где $0\leq c_1(x)\leq c(x)$. Здесь $c_1(x)\not\equiv 0, c_1(x)\in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$ при $0<\alpha<1$, $c(x)$ определено выше.

Ранее в работе [13] была показана взаимосвязь разрешимости краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии M для уравнений (2) и (3). Для формулировки следующего вспомогательного утверждения дадим несколько определений.

Пусть $f(x)$ непрерывная на M функция. Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Будем говорить, что непрерывная на M функция $u\in[f]$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty}\|u(x)-f(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)}=0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)}=\sup\limits_G|f(x)|$. В работе [9] показано, что отношение эквивалентности не зависит от выбора исчерпания многообразия.

Многообразие M будем называть *L-точным многообразием*, если на M существует решение $u(x)$ уравнения $Lu=0$ такое, что $u\in[1]$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4 ([13]). *Пусть многообразие M является L-точным и f — некоторая ограниченная непрерывная на M функция. Если на M разрешимы краевые задачи для неоднородных уравнений $Lu=h(x)$ и $\Delta u=h(x)$ с граничными условиями из класса $[f]$, то на M разрешима краевая задача и для уравнения $L_1u=h(x)$ с граничными условиями из класса $[f]$.*

2. Основной результат

В данном разделе получены точные условия разрешимости краевых задач для неоднородного уравнения (3), потенциал которого $c_1(x)\in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$ при $0<\alpha<1$ удовлетворяет следующим условиям $0\leq c_1(x)\leq c(x)$, $c_1(x)\not\equiv 0$. Кроме того, на D, как и выше, выполнено $c(x)=c(r,\theta_1,...,\theta_k)\equiv c(r)$ и $h_1(r)\leq h(r,\theta_1,...,\theta_k)\leq h_2(r)$, где $h_1(r),\ h_2(r)\in C^{0,\alpha}_{loc}([r_0,+\infty))$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть риманово многообразие M и коэффициенты уравнения (3) таковы, что $I_h<\infty$, $I_1=...=I_s=\infty, I_i<\infty$ для всех $i=s+1,...,k, 0\leq s\leq k$. Тогда для любой непрерывной на $S_1\times S_2\times...\times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k)$ на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что на D выполнено*

$$\lim_{r\to+\infty}u(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k).$$

Доказательство. По условию теоремы $I_h < \infty$, тогда по теореме 3 существует ограниченное решение $u_1(x)$ следующей краевой задачи для уравнения (2)

$$\begin{cases} Lu_1 = h(x), \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u_1(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k). \end{cases} \tag{4}$$

В свою очередь, условие сходимости I_h влечет за собой условие сходимости K_h. Тогда, как и выше, по теореме 3 существует ограниченное решение $u_0(x)$ следующей краевой задачи для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u_0 = h(x), \\ \lim\limits_{r\to+\infty} u_0(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k). \end{cases} \tag{5}$$

Согласно замечанию 1 будем понимать предельный переход в (4) и (5) следующим образом:

$$\lim_{r\to+\infty} ||u_1(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) - \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)||_{C^0(M\setminus B(r))} = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{r\to+\infty} ||u_0(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) - \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)||_{C^0(M\setminus B(r))} = 0, \tag{7}$$

где $B(r)$ — геодезический шар радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке.

Далее пусть $\Phi(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ — произвольная непрерывная на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функция. Обозначим $[\Phi]$ — класс всех непрерывных на M функций, эквивалентных функций $\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — непрерывная на M функция такая, что для всех $r \geq r_0 > 0$

$$\Phi(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \equiv \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k).$$

Тогда из условий (6), (7) для решений u_1 и u_0 выполнено

$$\lim_{k\to+\infty} ||u_1(x) - \Phi(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} ||u_0(x) - \Phi(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0, \tag{8}$$

где $B_k = B(r_k)$ — возрастающая последовательность геодезических шаров, образующая исчерпание многообразия M. Учитывая (8), получаем, что $u_1 \in [\Phi], u_0 \in [\Phi]$. Таким образом, на M разрешимы краевые задачи для неоднородных уравнений $Lu = h(x)$ и $\Delta u = h(x)$ с граничными условиями из класса $[\Phi]$.

Далее покажем, что M является L-точным многообразием, то есть на M существует решение $u(x)$ уравнения $Lu = 0$ такое, что $u \in [1]$. Существование такого решения следует из теоремы 2 и условия сходимости интеграла $I < \infty$, которая вытекает из условия $I_h < \infty$ доказываемой теоремы.

Так как M является L-точным многообразием, то по теореме 4 на M существует решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что $u \in [\Phi]$, причем в силу определения функции $\Phi(x)$ имеем

$$\lim_{r\to+\infty} ||u(r, \theta_{s+1}, ..., \theta_k) - \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k)||_{C^0(M\setminus B(r))} = 0.$$

Таким образом, получили, что для любой непрерывной на $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$ функции $\Phi(\theta_{s+1}, \ldots, \theta_k)$ на M существует ограниченное решение уравнения (3) такое, что

$$\lim_{r\to+\infty} u(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \Phi(\theta_{s+1}, ..., \theta_k).$$

Единственность полученного решения $u(x)$ следует из теоремы единственности для решений стационарного уравнения Шрёдингера. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи / А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили // Изв. вузов. Математика. — 1987. — Т. 31, № 5. — С. 25–33.

2. Корольков, С. А. О разрешимости краевых задач для стационарного уравнения Шрёдингера в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 726–732.

3. Лосев, А. Г. О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 12. — С. 1643–1652.

4. Лосев, А. Г. Стационарное уравнение Шрёдингера на квазимодельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2002. — С. 94–124.

5. Лосев, А. Г. Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 3. — С. 6–14.

6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 445, № 6. — С. 41–49.

7. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.

8. Лосев, А. Г. Ограниченные решения стационарного уравнения Шрёдингера с конечным интегралом энергии на модельных многообразиях / А. Г. Лосев, В. В. Филатов // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2021. — Т. 24, № 3. — С. 5–17.

9. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сибирский математический журнал. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.

10. Мазепа, Е. А. Асимптотическое поведение решений неоднородного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа, Д. К. Рябошлыкова // Известия высших учебных заведений. — 2024. — Т. 1. — С. 35–49.

11. Anderson, M. T. The Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds with Negative Curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 6. — P. 701–722.

12. Grigor'yan, A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36. — P. 135–249.

13. Mazepa, E. Boundary-Value Problems for the Inhomogeneous Schrödinger Equation with Variations of its Potential on Non-Compact Riemannian Manifolds / E. Mazepa, D. Ryaboshlykova // Issues of Analysis. — 2021. — Vol. 10, iss. 3. — P. 113–128.

14. Munteanu, O. The Poisson Equation on Complete Manifolds with Positive Spectrum and Applications / O. Munteanu, N. Sesum // Adv. in Math. — 2010. — Vol. 223. — P. 198–219.

15. Murata, M. Positive Harmonic Functions on Rotationary Symmetric Riemannian Manifolds / M. Murata // Potential Theory (Proc. Intern. Conf. Nagoya/Japan, 1990). — 1992. — P. 251–259.

16. Sullivan, D. The Dirichlet Problem at Infinity for a Negatively Curved Manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 723–732.

REFERENCES

1. Grigoryan A.A., Nadirashvili N.S. Liuvillevy teoremy i vneshnie kraevye zadachi [Liouville Theorems and External Boundary Value Problems]. *Izv. vuzov. Matematika* [Soviet Math. (Iz. VUZ)], 1987, vol. 31, no. 5, pp. 31-42.

2. Korolkov C.A. O razreshimosti kraevykh zadach dlya statsionarnogo uravneniya Shrёdingera v neogranichennykh oblastyakh rimanovykh mnogoobraziy [On Solvability of Boundary Value Problems for the Stationary Schrödinger Equation in Unbounded Domains of Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differ. Equ.], 2015, vol. 51, no. 6, pp. 738-744.

3. Losev A.G. O razreshimosti zadachi Dirikhle dlya uravneniya Puassona na nekotorykh nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On Solvability of the Dirichlet Problem for Poisson Equation on Some Noncompact Riemannian Manifolds]. *Differentsialnye uravneniya* [Differ. Equ.], 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1595-1604.

4. Losev A.G. Statsionarnoe uravnenie Shrёdingera na kvazimodelnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [The Stationary Schrödinger Equation on Quasi-Model Riemannian Manifolds]. *Trudy kafedry matematicheskogo analiza i teorii funktsiy Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions of Volgograd State University] Volgograd, Volgograd State University Publishing House, 2002, pp. 94-124.

5. Losev A.G. Garmonicheskie potentsialy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Harmonic Potentials on Non-Compact Riemannian Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 3, pp. 6-14.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On Asymptotic Behavior of Solutions for Some Elliptic Equations on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Math. (Iz. VUZ)], 1999, vol. 43, no. 6, pp. 39-47.

7. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shrёdingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded Solutions of the Schrёdinger Equation on Riemannian Products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Math. J.], 2002, vol. 13, no. 1, pp. 57-73.

8. Losev A.G., Filatov V.V. Ogranichennye resheniya statsionarnogo uravneniya Shrёdingera s konechnym integralom energii na modelnykh mnogoobraziyakh [Bounded Solutions of the Stationary Schrödinger Equation with Finite Energy Integral on Model Manifolds]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2021, vol. 24, no. 3, pp. 5-17.

9. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shrёdingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary Problems for the Stationary Schrödinger Equation on Riemannian Manifolds]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal.* [Siberian Math. J.], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 473-479.

10. Mazepa E.A., Ryaboshlykova D.K. Asimptoticheskoe povedenie resheniy neodnorodnogo uravneniya Shrёdingera na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Asymptotic Behavior of Solutions of the Inhomogeneous Schrödinger Equation on Noncompact Riemannian Manifolds]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy* [Russian Math. (Iz. VUZ)], 2024, vol. 68, pp. 30-42.

11. Anderson M.T. The Dirichlet Problem at Infinity for Manifolds with Negative Curvature. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 6, pp. 701-722.

12. Grigor'yan A. Analitic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135-249.

13. Mazepa E., Ryaboshlykova D. Boundary-Value Problems for the Inhomogeneous Schrödinger Equation with Variations of Its Potential on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Issues of Analysis*, 2021, vol. 10, iss. 3, pp. 113-128.

14. Munteanu O., Sesum N. The Poisson Equation on Complete Manifolds with Positive Spectrum and Applications. *Adv. in Math.*, 2010, vol. 223, pp. 198-219.

15. Murata M. Positive Harmonic Functions on Rotationary Symmetric Riemannian Manifolds. *Potential Theory (Proc. Intern. Conf. Nagoya/Japan, 1990)*, 1992, pp. 251-259.

16. Sullivan D. The Dirichlet Problem at Infinity for a Negatively Curved Manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723-732.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE INHOMOGENEOUS SCHRÖDINGER EQUATION WITH VARIATIONS OF ITS POTENTIAL ON QUASI-MODEL RIEMANNIAN MANIFOLDS

Elena A. Mazepa

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
elena.mazepa@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0001-7603-4133
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Darya K. Ryaboshlykova

Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions,
Volgograd State University
daria_ryaboshlikova@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper, solutions of the inhomogeneous Schrödinger equation are studied

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = h(x), \tag{9}$$

where $c(x), h(x)$ — locally continuous Hölder functions, with variations of its potential $c(x) \geq 0$ on quasi-model Riemannian manifolds. It is clear that if $h(x) \equiv \equiv 0$, then the equation (9) is a stationary Schrödinger equation. Therefore, we assume that $h(x) \not\equiv 0$. In this paper, we obtain the exact conditions under which the solvability of boundary value problems of the inhomogeneous Schrödinger equation is preserved with some variations of the coefficient $c(x) \geq 0$ on M. At present one of the directions of the development of this topic is the question of the solvability on a non-compact manifold of the Dirichlet problem on the restoring the solution of the stationary Schrödinger equation from boundary data on "infinity" and other boundary value problems. It can be noted that the formulation of the Dirichlet problem on non-compact manifolds may be problematic. One of the possible approaches to solving this problem is based on the introduction of classes of equivalent functions on a non-compact manifold (see [2; 9]). In some cases, geometric compactification of a manifold allows us to do this in the same way as when setting the classical Dirichlet problem in bounded domains R^n (see [3; 6; 7; 11; 15; 16]). The proof of the main results of the work is based on classical statements of the theory of partial differential equations: the maximum principle, the comparison and uniqueness theorems for solutions of linear elliptic differential equations. This work we study the existence of solutions and the solvability of boundary value problems of the equation (9) on non-compact Riemannian manifolds of the following form. Let M be a complete Riemannian manifold without the partial, represented as a union $M = B \cup D$, where B — some compact, and the subset D is isometric to the product $[r_0, +\infty) \times S_1 \times S_2 ... \times S_k$ (where $r_0 > 0$, S_i — compact Riemannian manifolds without partial) and has the metric

$$ds^2 = dr^2 + g_1^2(r)d\theta_1^2 + g_2^2(r)d\theta_2^2 + ... + g_k^2(r)d\theta_k^2.$$

Here $g_i(r)$ is a positive smooth function on $[r_0,+\infty)$, and $d\theta_i^2$ is a metric on S_i. Let $\dim S_i = n_i$. It is clear that $\dim M = n_1 + n_2 + ... + n_k + 1$. Everywhere in the future, we will assume that D is fulfilled $c(r,\theta_1,...,\theta_k) \equiv c(r)$, $h_1(r) \leq$ $\leq h(r,\theta_1,...,\theta_k) \leq h_2(r)$, where $h_1(r),\ h_2(r) \in C^{0,\alpha}_{loc}([r_0,+\infty))$. Let's introduce the notation $S(t) = g_1^{n_1} \cdot \dots \cdot g_k^{n_k}(t)$,

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} c(z)S(z)dz \right) dt, \quad I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} \frac{S(z)}{g_i^2(z)}dz \right) dt,$$

$$K = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)}dt, \qquad K_h = K + \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\}S(z)dz \right) dt.$$

$$I_h = I + \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{1}{S(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} max\{|h_1(z)|, |h_2(z)|\}S(z)dz \right) dt,$$

where $r_0 > 0$, $i = 1,...,k$. Next, we present the results that we will use to prove the main result.

Theorem 1. [10] *Let the Riemannian manifold M and the right-hand side of the equation (9) be such that $I_h < \infty$ ($K_h < \infty$, if $c(x) \equiv 0$), $I_1 = ... = I_s =$ $= \infty, I_i < \infty$ for everyone $i = s+1,...,k$, $0 \leq s \leq k$. Then for any continuous on $S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ function $\Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k)$ there is a unique bounded solution $u(x)$ on M to the equation (9) such that on D holds*

$$\lim_{r\to+\infty} u(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = \Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k).$$

Next, along with the equation (9), we consider on M the equation

$$L_1u \equiv \Delta u - c_1(x)u = h(x), \tag{10}$$

where $0 \leq c_1(x) \leq c(x)$. Here $c_1(x) \in C^{0,\alpha}_{loc}(M)$, $0 < \alpha < 1$, $c_1(x) \not\equiv 0$ on M, $c(x)$ and $h(x)$ are defined above.

The main result.

Theorem 2. *Let the Riemannian manifold M and the coefficients of the equation (10) be such that $I_h < \infty$, $I_1 = ... = I_s = \infty, I_i < \infty$ for everyone $i = s+1,...,k$, $0 \leq s \leq k$. Then for any continuous on $S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ function $\Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k)$ there is a unique bounded solution $u(x)$ on M to the equation (10) such that on D holds*

$$\lim_{r\to+\infty} u(r,\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = \Phi(\theta_{s+1},...,\theta_k).$$

Key words: inhomogeneous Schrödinger equation, boundary value problems, quasi-model Riemannian manifold, potential variation, L-pointed manifold.