



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.3.7>

УДК 536.25:53.02

ББК 22.311

Дата поступления статьи: 26.03.2025

Дата принятия статьи: 02.06.2025

УСТАНОВИВШАЯСЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ СТЕНКУ В РЕЖИМЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Анатолий Михайлович Афанасьев

Доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет

a.m.afanasiev@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0003-3703-3167>

просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Исследовано установившееся температурное поле в плоской стенке в ситуации, когда на имеющийся между поверхностями стенки постоянный температурный перепад накладываются гармонические колебания температуры одной из поверхностей. Введено понятие комплексного коэффициента теплопередачи по переменной составляющей, понятие характерной для пластины частоты и соответствующего ей характерного периода колебаний, который назван постоянной времени пластины для тепловых процессов. Эта величина оказывается функцией теплофизических характеристик материала стенки и ее толщины. Модуль и аргумент комплексного коэффициента теплопередачи представлены как функции безразмерной переменной, квадрат которой имеет смысл относительной частоты тепловой волны, а обратная величина – смысл относительной глубины проникновения. Показано, что для колебаний, периоды которых превышают постоянную времени пластины, передача тепла через нее происходит примерно так же, как и в случае стационарных полей. Если же период колебаний меньше постоянной времени, то с усилением этого неравенства интенсивность передаваемого через пластину теплового потока монотонно уменьшается и стремится к нулю. В качестве

примера произведен расчет характеристик теплопередачи в гармоническом режиме для стенок из меди и строительного кирпича. Полученные результаты найдут применение в теории теплообменных аппаратов рекуперативного типа, в теории алгоритмов для расчета колебаний температуры и влажности внутри помещений, вызванных колебаниями характеристик внешней среды, в теории методов для определения теплофизических характеристик материалов на основании данных измерений, то есть при решении обратных задач теории теплопроводности.

Ключевые слова: математическая физика, теория теплопроводности, плоскостные среды, тепловые волны, гармонический режим, частотная характеристика, коэффициент теплопередачи, теплообменные аппараты.

Введение

Задачи о плоских, цилиндрических и сферических волнах различной физической природы принадлежат к числу классических задач математической физики. Предметом обсуждения в настоящей статье будут вопросы, касающиеся плоских волн. Фундаментальное значение для практики имеют задачи о прохождении таких волн через границу раздела двух полупространств, через плоский слой и слоистую среду. Методом исследования, позволяющим дать исчерпывающие ответы на все возникающие при анализе таких процессов вопросы, является спектральный метод. В его рамках вводятся понятия входного и выходного сигналов и ставится задача о расчете частотной характеристики, связывающей эти сигналы в установившемся гармоническом режиме; знание частотной характеристики позволяет рассчитать выходной сигнал при любом наперед заданном входном сигнале. В качестве примера такого построения теории плоских волн можно указать на электродинамику. Частотная характеристика полупространства, представляемая обычно в виде формул Френеля, рассмотрена в работах [9; 16; 20], а частотные характеристики плоского слоя и слоистой среды являются предметами обсуждений в [8; 9; 20; 23] соответственно. По-другому обстоит дело в теории теплопроводности. Из задач с аналогичными постановками здесь детально исследована и традиционно рассматривается в книгах по математической физике только задача для полупространства. Частотную характеристику полупространства приводят обычно в виде формул Фурье, характеризующих распространение температурных волн в почве: [10; 11; 13; 21; 22; 24]; обобщение формул Фурье, позволяющее учесть содержащуюся в почве влагу, дано при участии автора в статьях [2–5]. Что же касается задач, в которых речь идет о прохождении плоских температурных волн сквозь плоскостные среды, то частотные характеристики для них присутствуют в литературе обычно лишь в нулевом частотном приближении, то есть лишь в приближении стационарных полей. Вместо термина «частотная характеристика» в случае стационарных полей в теории теплопроводности принято использовать термин «коэффициент теплопередачи». С помощью коэффициента теплопередачи рассчитывается плотность постоянного теплового потока, передаваемого из одной среды в другую через разделяющую их плоскую стенку [12; 14]. Разумеется, что в целом ряде практически важных задач, возникающих при анализе технологических процессов и природных явлений, стационарность тепловых потоков не имеет места. Укажем, например, на проблему моделирования колебаний температуры внутри помещений, вызванных суточными колебаниями температуры внешней среды [6; 18]. В таких

случаях представляется целесообразным введение коэффициентов теплопередачи для переменных тепловых потоков, которые имеют смысл частотных характеристик и дают описание тепловых процессов в установившихся гармонических режимах. Детальное рассмотрение такого подхода в литературе до сих пор не произведено. Задача о расчете гармонического температурного поля внутри пластины при краевых условиях различного рода рассматривалась целым рядом авторов [13; 15; 17; 21], но, например, в первой из упомянутых работ авторы приводят расчет только поля амплитуд, не указывая поля фаз, без которого расчет плотности тепловых потоков оказывается невозможным, а в трех других работах вопрос о коэффициенте теплопередачи и анализе этой функции даже и не ставится. Таким образом, разработка алгоритмов, позволяющих рассчитывать передачу тепла через плоскостные среды в случае переменных во времени температурных полей, является актуальной для практики задач. Одна из задач такого рода и будет рассмотрена в предлагаемой статье. Ее целью является введение комплексного коэффициента теплопередачи, который будет распространять применяемое в литературе понятие коэффициента теплопередачи для стационарных температурных полей на случай полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону. Комплексный коэффициент, имеющий смысл частотной характеристики, будет связывать амплитуду и начальную фазу колебаний температуры на одной из поверхностей пластины с амплитудой и начальной фазой переменной части плотности теплового потока на другой поверхности. Следуя традиции, частотную характеристику среды, через которую происходит передача тепла, мы будем называть в дальнейшем коэффициентом теплопередачи.

1. Задача о гармоническом температурном поле в пластине

Рассмотрим однородную пластину (см. рис. 1), нижняя поверхность которой $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре T_1 , а температура верхней поверхности $x = d$ имеет составляющую, изменяющуюся во времени по гармоническому закону вблизи температуры T_2 . Пусть λ , c , ρ и $a = \lambda/(c\rho)$ – коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, плотность и коэффициент температуропроводности (коэффициент диффузии тепла) материала пластины; x – координата; τ – время; $f(x)$ – распределение температуры при $\tau = 0$; ω – круговая частота колебаний. Начально-краевая задача для расчета температурного поля в пластине $T(x, \tau)$ при $\tau > 0$ будет иметь следующий вид [13]:

$$\begin{cases} \partial T / \partial \tau = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 ; \\ T(0, \tau) = T_1; \quad T(d, \tau) = T_2 + \Delta \tilde{T} \cdot \cos \omega \tau; \\ T(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (1)$$

Сформулированная задача относится к числу задач с краевыми условиями первого рода.

Символом $\Delta \tilde{T}$ мы обозначили амплитуду переменной составляющей перепада температуры между границами пластины, в то время как символ $\Delta \bar{T}$ будет обозначать у нас неизменный во времени перепад $\Delta \bar{T} = T_1 - T_2$.

Далее будем говорить об *асимптотическом* решении задачи (1), то есть о ее решении при $\tau \rightarrow \infty$. Как известно [21], это решение от начальных условий $f(x)$ не зависит, определяется единственным образом и представляет собой сумму *стационарного* $\bar{T}(x)$ и, соответственно, *гармонического* $\tilde{T}(x, \tau)$ решений следующих двух задач:

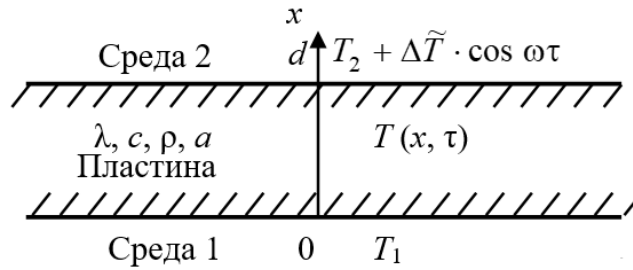


Рис. 1. Задача о гармоническом температурном поле в пластине

$$\partial T / \partial \tau = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 ; \quad T(0, \tau) = T_1 ; \quad T(d, \tau) = T_2, \quad (2)$$

$$\partial T / \partial \tau = a \cdot \partial^2 T / \partial x^2 ; \quad T(0, \tau) = 0 ; \quad T(d, \tau) = \Delta \tilde{T} \cdot \cos \omega \tau. \quad (3)$$

Подчеркнем, что начальные данные в этих задачах отсутствуют, и, значит, они имеют бесконечно много решений; из них нам нужно выбрать, как уже было сказано, стационарное решение задачи (2) и гармоническое решение задачи (3).

Стационарное решение $\bar{T}(x)$ задачи (2) находится элементарными средствами и имеет вид

$$\bar{T}(x) = T_1 - (\Delta \bar{T} / d) \cdot x, \quad (4)$$

где $\Delta \bar{T}$ – введенная выше и неизменная во времени часть перепада температуры между границами пластины.

Гармоническое решение $\tilde{T}(x, \tau)$ задачи (3) будем искать в виде действительной части функции

$$\dot{\tilde{T}}(x, \tau) = \dot{T}(x) \cdot \exp(-i\omega\tau). \quad (5)$$

Здесь точка над знаком переменной, как и всюду далее, обозначает комплексный характер величины. Функцию $\dot{\tilde{T}}(x, \tau)$ называют *комплексом* гармонического поля $\tilde{T}(x, \tau)$, а функцию $\dot{T}(x)$ – *комплексной амплитудой* этого поля.

Подберем функцию (5) так, чтобы она удовлетворяла уравнению теплопроводности. Тогда действительная и мнимая части этой функции по отдельности будут удовлетворять данному уравнению. Далее мы потребуем, чтобы действительная часть функции удовлетворяла краевым условиям в (3). Этим и будет завершено построение гармонического решения задачи (3).

Потребовав, чтобы функция (5) удовлетворяла уравнению теплопроводности, получим для комплексной амплитуды $\dot{T}(x)$ уравнение

$$\dot{T}''(x) + (i\omega/a) \dot{T}(x) = 0 \quad (6)$$

или

$$\dot{T}''(x) + \dot{\gamma}^2 \dot{T}(x) = 0,$$

где

$$\dot{\gamma} = \sqrt{i\omega/a} = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}.$$

Здесь δ имеет смысл *глубины проникновения* для гармонических температурных волн в задаче Фурье для полупространства [21].

В общем решении уравнения (6), которое имеет вид

$$\dot{T}(x) = C_1 \cdot \cos \gamma x + C_2 \cdot \sin \gamma x, \quad (7)$$

мы должны так подобрать коэффициенты C_1 и C_2 , чтобы действительная часть функции (5) удовлетворяла двум краевым условиям в (3), то есть чтобы

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \dot{T}(0, \tau) &= \operatorname{Re} [\dot{T}(0) \cdot \exp(-i\omega\tau)] = 0, \\ \operatorname{Re} \dot{T}(d, \tau) &= \operatorname{Re} [\dot{T}(d) \cdot \exp(-i\omega\tau)] = \Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau. \end{aligned}$$

Выполнить эти равенства можно, если положить $\dot{T}(0) = 0$, $\dot{T}(d) = \Delta\tilde{T}$. Приняв эти условия, из (7) найдем, что $C_1 = 0$, $C_2 = \Delta\tilde{T}/\sin \gamma d$, и тогда для комплексной амплитуды получим

$$\dot{T}(x) = \Delta\tilde{T} \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma d}, \quad (8)$$

а формула (5) для комплекса поля станет такой:

$$\dot{\dot{T}}(x, \tau) = \Delta\tilde{T} \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma d} \cdot \exp(-i\omega\tau). \quad (9)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\operatorname{Re} \dot{T}(x), \quad \operatorname{Im} \dot{T}(x), \quad |\dot{T}(x)|, \quad \arg \dot{T}(x) - \quad (10)$$

соответственно действительную часть, мнимую часть, модуль и аргумент комплексной амплитуды (8). С их помощью комплекс поля (9) получит два возможных представления:

$$\begin{aligned} \dot{\dot{T}}(x, \tau) &= [\operatorname{Re} \dot{T}(x) + i \cdot \operatorname{Im} \dot{T}(x)] \cdot \exp(-i\omega\tau) = \\ &= |\dot{T}(x)| \cdot \exp[i \cdot \arg \dot{T}(x)] \cdot \exp(-i\omega\tau). \end{aligned}$$

Выделяя в обоих случаях действительную часть, получим в двух альтернативных видах искомое гармоническое решение задачи (3):

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x, \tau) &= \operatorname{Re} \dot{T}(x) \cdot \cos \omega\tau + \operatorname{Im} \dot{T}(x) \cdot \sin \omega\tau = \\ &= |\dot{T}(x)| \cdot \cos [\omega\tau - \arg \dot{T}(x)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Как уже говорилось в начале этого пункта, сумма функций (4) и (11), то есть выражение

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x) + \tilde{T}(x, \tau), \quad (12)$$

и будет представлять собой искомое асимптотическое решение начально-краевой задачи (1) – установившееся гармоническое температурное поле внутри пластины. Отметим, что анализ этого решения – непростая задача; это обусловлено сложностью формул (10), представляющих комплексную амплитуду (8) в алгебраическом или показательном

виде. Мы не станем выписывать здесь эти формулы, хотя это и нетрудно было бы сделать.

Располагая построенным решением, мы сможем ответить на любые вопросы, касающиеся свойств поля внутри пластины. Конкретная постановка вопроса будет дана в следующем пункте.

2. Задача о проходящем через пластину тепловом потоке

В ситуации, которая изображена на рисунке 1, практический интерес представляет не найденное выше установившееся гармоническое распределение температуры по толщине пластины, а плотность теплового потока, который в таком режиме через пластину передается. Имея это в виду, найдем плотность теплового потока q на нижней границе пластины $x = 0$. Эта величина и будет характеризовать тепловой поток, который передается через пластину из среды 2 в среду 1. Компоненту q_x вектора q при $x = 0$ будем обозначать просто как q . Температурное поле имеет у нас вид (12); основываясь на этом, получим для величины q формулу

$$q(\tau) = -\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \bar{q} + \tilde{q}(\tau), \text{ где}$$

$$\bar{q} = -\lambda \frac{\partial \bar{T}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} \text{ и } \tilde{q}(\tau) = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \quad (13)$$

постоянная и переменная составляющие плотности теплового потока. Перейдем к расчету этих величин.

Обратившись к формуле (4), после вычислений найдем

$$\bar{q} = \bar{k} \cdot \Delta \bar{T}, \text{ где } \bar{k} = \frac{\lambda}{d} - \quad (14)$$

коэффициент теплопередачи по постоянной составляющей.

Для расчета $\tilde{q}(\tau)$ следует обратиться к формулам (11), предварительно выписав явные и имеющие достаточно сложный вид выражения для функций (10). Непростых выкладок, связанных с получением результата на этом пути, можно избежать, если функцию $\tilde{q}(\tau)$ искать как действительную часть отвечающей ей в комплексной области функции $\dot{\tilde{q}}(\tau)$. Реализуя этот алгоритм и основываясь на формуле для комплекса (9), получим:

$$\dot{\tilde{q}}(\tau) = -\lambda \frac{\partial \dot{\tilde{T}}(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\lambda \cdot \Delta \tilde{T}}{\sin \dot{\gamma} d} \cdot \exp(-i\omega\tau) \cdot \frac{d}{dx} (\sin \dot{\gamma} x) \Big|_{x=0} =$$

$$= -\frac{\lambda \cdot \Delta \tilde{T} \cdot \dot{\gamma}}{\sin \dot{\gamma} d} \cdot \exp(-i\omega\tau) = -\bar{k} \frac{\xi + i\xi}{\sin(\xi + i\xi)} \cdot \Delta \tilde{T} \cdot \exp(-i\omega\tau). \quad (15)$$

Здесь мы использовали введенное выше понятие коэффициента теплопередачи по постоянной составляющей $\bar{k} = \lambda/d$ и приняли во внимание, что

$$\dot{\gamma} d = \frac{1+i}{\delta} d = \xi + i\xi, \quad \xi = \frac{d}{\delta} = d \sqrt{\frac{\omega}{2a}}.$$

Безразмерная величина ξ является удобной переменной для описания теплопередающих свойств пластины в гармоническом режиме. Ее физическое содержание раскрывается следующим образом. С одной стороны, поскольку величина $\delta = \sqrt{2a/\omega}$, как говорилось ранее, имеет смысл глубины проникновения температурных волн в материал пластины, то величина $\delta/d = 1/\xi$ – обратная по отношению к переменной ξ – будет иметь смысл *относительной глубины проникновения*. С другой стороны, поскольку $\xi^2 = d^2\omega/(2a)$, то, значит, квадрат безразмерной переменной ξ будет иметь смысл *относительной частоты*. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, можно ввести параметр $\omega_0 = 2a/d^2$ – характерную для пластины частоту – и писать $\xi^2 = \omega/\omega_0$. В монографии А.В. Лыкова «Теория теплопроводности» для переменной ξ^2 принято обозначение Rd и название *критерий Предводителя* [13], но этот термин распространения в литературе не получил, и пользоваться им здесь мы не будем.

Как будет видно из дальнейшего, значение $\xi = 1$ (глубина проникновения волны δ равна толщине пластины d , или, что то же самое, частота волны ω равна характерной частоте ω_0) является той границей, движение от которой в одну и другую стороны позволит говорить о характерных свойствах тепловых волн при «низких» и «высоких» частотах.

Теперь мы должны выделить из полученного выражения для $\dot{\tilde{q}}(\tau)$ действительную часть. Перепишем для этого формулу (15) в следующем виде:

$$\dot{\tilde{q}}(\tau) = \dot{\tilde{k}}(\xi) \cdot \Delta\tilde{T} \cdot \exp(-i\omega\tau), \quad (16)$$

где

$$\dot{\tilde{k}}(\xi) = -\bar{k} \frac{\xi + i\xi}{\sin(\xi + i\xi)} - \quad (17)$$

комплексный коэффициент теплопередачи по переменной составляющей.

Его физическое содержание выявляется следующим образом. Выделив у этого коэффициента модуль $\tilde{k}(\xi)$ и аргумент $\tilde{\varphi}(\xi)$ и переписав его в виде

$$\dot{\tilde{k}}(\xi) = \tilde{k}(\xi) \cdot \exp[i\tilde{\varphi}(\xi)], \quad (18)$$

мы для плотности теплового потока (16) получим выражение

$$\dot{\tilde{q}}(\tau) = \tilde{k}(\xi) \cdot \exp[i\tilde{\varphi}(\xi)] \cdot \Delta\tilde{T} \cdot \exp(-i\omega\tau).$$

Взяв отсюда действительную часть, будем иметь, что переменная часть плотности теплового потока на нижней поверхности пластины определяется выражением

$$\tilde{q}(\tau) = \tilde{k}(\xi) \cdot \Delta\tilde{T} \cdot \cos[\omega\tau - \tilde{\varphi}(\xi)]. \quad (19)$$

Переменная часть температуры среды 2 изменяется по закону

$$\tilde{T}(\tau) = \Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau,$$

поэтому мы делаем вывод, что модуль и аргумент комплексного коэффициента теплопередачи $\dot{\tilde{k}}(\xi)$ показывают, каким образом амплитуда и начальная фаза переменной части температуры второй среды $\Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau$ преобразуются соответственно в амплитуду и начальную фазу переменной части плотности теплового потока на нижней границе пластины.

Таким образом, этот комплексный коэффициент имеет смысл частотной характеристики пластины, у которой соответствующим образом определены понятия входного и выходного сигналов.

В итоге окончательное выражение для полной плотности теплового потока на нижней поверхности пластины оказывается таким:

$$q(\tau) = \bar{k} \cdot \Delta \bar{T} + \tilde{k}(\xi) \cdot \Delta \tilde{T} \cdot \cos[\omega\tau - \tilde{\varphi}(\xi)]. \quad (20)$$

Далее будем говорить о втором слагаемом в правой части этой формулы. Оно характеризует переменную часть потока. Для понимания полученного результата мы должны проанализировать зависимости $\tilde{k}(\xi)$ и $\tilde{\varphi}(\xi)$. Эти функции дают модуль и аргумент комплексного коэффициента теплопередачи $\dot{\tilde{k}}(\xi)$, определенного формулой (17). Формула (17) содержит тригонометрическую функцию от комплексной переменной; ввиду этого анализ зависимости (17) наталкивается на значительные трудности и может быть проведен только численными методами. Именно так и поступают в теории электромагнетизма, в задачах, где речь идет о прохождении плоских электромагнитных волн сквозь плоскостойкие среды [8]. Но в задачах для тепловых волн, в отличие от задач для волн электромагнитных, комплексные переменные, от которых вычисляются тригонометрические функции, всегда имеют одинаковые действительные и мнимые части (в нашем случае это переменная $\xi + i\xi$), что упрощает анализ и сводит его к построению двух действительных функций от одной действительной переменной. Некоторые из таких тригонометрических функций табулированы, в качестве примера можно указать на [13]. Но функция (17), несмотря на ее очевидную важность для анализа классической задачи о прохождении плоских тепловых волн сквозь плоский слой, к числу табулированных не принадлежит, и потому ниже мы будем опираться на ее компьютерный анализ. Прежде чем результаты такого анализа будут приведены, укажем на существование пределов, которые легко устанавливаются с помощью известных свойств тригонометрических функций комплексной переменной [1]:

$$\tilde{k}(\xi) \rightarrow \bar{k} \text{ и } \tilde{\varphi}(\xi) \rightarrow -\pi \text{ при } \xi \rightarrow 0+ \text{ (предел справа); } \tilde{k}(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

Графики модуля $\tilde{k}(\xi)$ и аргумента $\tilde{\varphi}(\xi)$ комплексного коэффициента теплопередачи $\dot{\tilde{k}}(\xi)$ показаны на рисунке 2.

Анализ формулы для $\dot{\tilde{k}}(\xi)$ показывает, что, начиная примерно с $\xi = 2$, зависимость $\tilde{\varphi}(\xi)$ приблизительно можно считать линейной; разрывы первого рода на графике этой функции обусловлены необходимостью приводить аргумент комплексного выражения к диапазону $-\pi < \tilde{\varphi} \leq \pi$.

Наконец, следует отметить, что формулу (17) для частотной характеристики пластины $\dot{\tilde{k}}(\xi)$ можно представить выражением

$$\dot{\tilde{k}}(\xi) = -\bar{k} \frac{1}{\text{sinc}(\xi + i\xi)},$$

в котором $\text{sinc}(z) = (\sin z)/z$ – распространение известной в математике функции $\text{sinc}(x) = (\sin x)/x$ («кардинальный синус») на случай комплексной переменной z , при дополнительном условии, что действительная и мнимая части у этой переменной совпадают. Как уже говорилось, важная роль этой функции в задачах о плоских температурных волнах до сих пор в литературе отмечена не была.

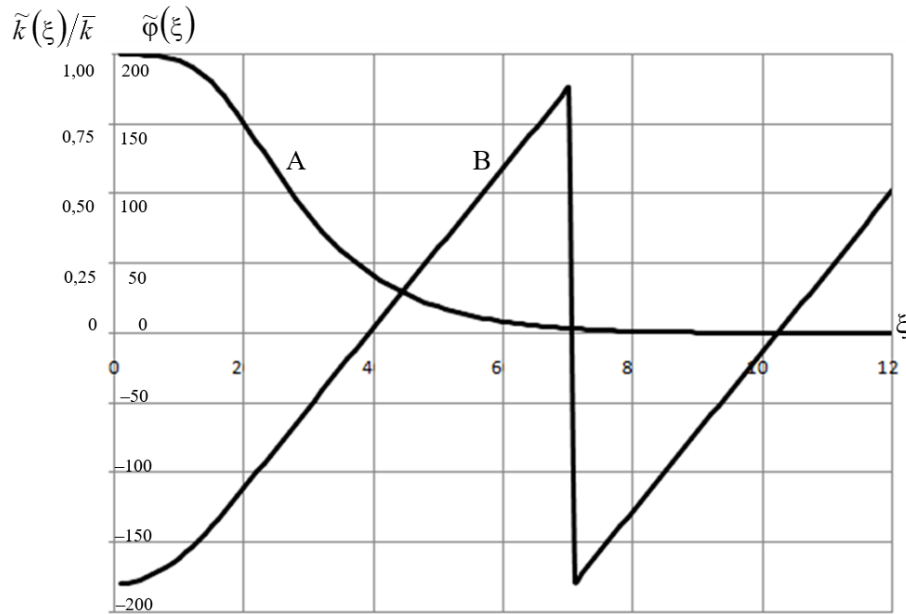


Рис. 2. Графики модуля (А) и аргумента (В, град) комплексного коэффициента теплопередачи; $\xi^2 = \omega/\omega_0$ – относительная частота; $\omega_0 = 2a/d^2$

3. Обсуждение результатов

Из физических соображений ясно, что на низкой частоте, когда $\omega \rightarrow 0$, или, что то же самое, $\xi \rightarrow 0$, описание переменной части температурного поля и описание его постоянной части перестанут различаться, и тогда, говоря про переменную часть, мы сможем утверждать, что распределение температуры по толщине пластины в любой интересующий нас момент будет следовать линейному закону. Поскольку температура на верхней поверхности пластины и температура на ее нижней поверхности для переменной части поля будут равны

$$\tilde{T}(d) = \Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau, \quad \tilde{T}(0) = 0,$$

то, значит, неизменная по толщине пластины плотность теплового потока в каждый момент времени будет вычисляться по формуле

$$\tilde{q}(\tau) = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = -\lambda \frac{\Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau}{d} = -\bar{k} \cdot \Delta\tilde{T} \cdot \cos \omega\tau,$$

что в точности совпадает с переменной частью в формуле (20), если положить в ней

$$\tilde{k}(0) = \bar{k} \text{ и } \tilde{\varphi}(0) = -\pi.$$

Рассматривая теперь область высоких частот, то есть полагая $\xi \rightarrow \infty$, и учитывая, что при этом $\tilde{k}(\xi) \rightarrow 0$, мы с помощью формулы (20) устанавливаем наличие предела $\tilde{q}(\tau) \rightarrow 0$. Таким образом, высокочастотные колебания температуры на одной из поверхностей пластины, в отличие от низкочастотных колебаний, уже не будут вызывать колебаний теплового потока на другой поверхности.

Как видно из рисунка 2, в качестве частоты ω , введение которой позволит придать смысл понятиям «низкие» и «высокие» частоты, можно взять частоту $\omega_0 = 2a/d^2$, на

которой переменная ξ имеет значение $\xi = \sqrt{\omega/\omega_0} = 1$ (при этом глубина проникновения тепловой волны δ будет равна толщине пластины d). Подсчет по нашим формулам дает для этого случая

$$\tilde{k} = \bar{k} \cdot 0,978; \quad \tilde{\varphi} = -161^\circ.$$

Таким образом, в этой ситуации теплопередающие свойства стенки для постоянного и переменного тепловых потоков оказываются примерно одинаковыми. Отвечающий такому режиму период колебаний τ_0 , который может быть назван *постоянной времени пластины для тепловых процессов*, будет определяться толщиной пластины d , температуропроводностью материала пластины $a = \lambda/(c\rho)$ и находиться из соотношения

$$\tau_0 = 2\pi/\omega_0 = \pi d^2/a.$$

Увеличивая период колебаний по сравнению с рассчитанным по этой формуле, мы в еще большей степени будем приближаться к режиму, характерному для постоянных тепловых потоков; наоборот, при уменьшении периода относительно этого характерного значения мы будем наблюдать монотонное уменьшение амплитуды колебаний теплового потока на нижней границе пластины при неизменной амплитуде колебаний температуры на ее верхней границе.

Проведем расчет постоянной времени τ_0 для двух случаев, для стенки из *меди* ($d = 1$ см, $a = 0,1145 \cdot 10^{-3}$ м²/с) и для стенки из *строительного кирпича* ($d = 10$ см, $a = 0,25 \cdot 10^{-6}$ м²/с). Тогда получим значения

$$\tau_0 = 2,744 \text{ с и } \tau_0 = 1,454 \text{ сут}$$

соответственно. Эти примеры дают представление об ожидаемых тепловых эффектах при рассмотрении переменных температурных полей в следующих ситуациях: в первом случае – при работе теплообменных аппаратов рекуперативного типа (в них обмен теплом между двумя средами происходит через разделяющую их металлическую стенку), а во втором случае – при моделировании изменений тепловых режимов помещений внутри зданий при изменении состояния окружающей среды [6; 18]. Рассмотрим второй случай подробнее. Пусть, например, одна из поверхностей стенки находится под воздействием внешней среды, которая обеспечивает периодическое, происходящее по гармоническому закону, изменение температуры поверхности, а другая поверхность есть граница помещения, в котором температуру следует поддерживать на одном и том же уровне. Ясно, что выполнить это условие постоянства температуры в помещении можно лишь при наличии системы кондиционирования, которая будет отводить (подводить) входящий в помещение (выходящий из помещения) тепловой поток, переменную составляющую которого и можно рассчитать по полученным здесь формулам.

Обобщая проведенный анализ, можно в качестве переменной части $\tilde{T}$ рассмотреть не гармоническое, а импульсное температурное поле. Пусть, как и всюду ранее, температура нижней поверхности пластины $\tilde{T}(0) = 0$, а температура верхней поверхности $\tilde{T}(d, \tau) = \tilde{T}_i(\tau)$ имеет вид импульса произвольной формы и длительности τ_i . Верхнюю границу спектра входного сигнала, как известно, можно оценить частотой $\omega_b = 2\pi/\tau_i$ [7]. Значит, если $\tau_i > \tau_0$, то

$$\omega_b = 2\pi/\tau_i < \omega_0 = 2\pi/\tau_0.$$

Но тогда, согласно рисунку 2, частотная характеристика для всех гармоник «обрезанного» спектра будет приближенно определяться формулой

$$\dot{\bar{k}}(\omega) \approx \bar{k} \cdot \exp(-i\pi) = -\bar{k},$$

и значит, для спектров входного и выходного сигналов будет выполняться приближенное соотношение

$$\dot{\bar{q}}(\omega) \approx -\bar{k} \cdot \dot{\bar{T}}_n(\omega).$$

Отсюда вытекает, что для оригиналов этих функций будем иметь

$$\tilde{q}(\tau) \approx -\bar{k} \cdot \tilde{T}_n(\tau).$$

Это означает, что передача тепла через пластину в каждый момент времени происходит так же, как и в случае стационарного поля, то есть переменный характер температуры среды 2, возбуждающей тепловые волны, можно не принимать во внимание.

Если же $\tau_n < \tau_0$, то с усилением этого неравенства тепловые импульсы на верхней границе пластины уже не будут вызывать импульсов теплового потока на ее нижней границе.

В заключение укажем на применение полученных в статье результатов для решения обратных задач теории теплопроводности (задач идентификации), то есть для определения теплофизических характеристик материалов по результатам измерения параметров температурных полей в специальном образом организованных экспериментах [11; 16; 21].

Заключение

Для плоской стенки при граничных условиях первого рода дано обобщение понятия коэффициента теплопередачи на случай, когда температура одной из поверхностей имеет составляющую, изменяющуюся во времени по гармоническому закону. Обобщенный коэффициент теплопередачи имеет комплексный характер и устанавливает связь между амплитудами и начальными фазами двух гармонических функций – температурой на одной из поверхностей стенки и плотностью теплового потока на другой поверхности. С точностью до вещественного множителя этот коэффициент выражается через функцию, которая является распространением известной в математике функции $\text{sinc}(x) = (\sin x)/x$ на область комплексной переменной x . Это обстоятельство до настоящего времени в литературе отмечено еще не было. Модуль и аргумент комплексного коэффициента записаны как функции безразмерной переменной, квадрат которой имеет смысл относительной частоты колебаний. Результаты статьи найдут применение при анализе работы устройств, в которых обмен теплом между двумя средами происходит через разделяющую их стенку, при моделировании колебаний температуры внутри зданий, вызванных колебаниями температуры окружающей среды, при решении обратных задач теории теплопроводности. Еще одним применением полученной в статье частотной характеристики плоского слоя может быть исследование нестационарных тепловых полей в слоистых средах. В качестве примера можно указать на задачи теории теплоизоляции и задачи математического моделирования тепловых процессов в

промерзающе-протаивающих грунтах, актуальных при планировании хозяйственной деятельности в области распространения мерзлых пород. Известные в литературе результаты исследования тепловых полей в слоистых средах позволяют рассчитывать коэффициент теплопередачи и термическое сопротивление многослойной конструкции, если характеристики с такими названиями известны для каждого слоя в отдельности. Однако применять полученные для таких задач формулы можно лишь в случае стационарных температурных полей. Если же условие стационарности не выполнено, то мы будем иметь распространяющийся в слоистой среде температурный волновой процесс, вследствие чего анализ теплопередающих свойств конструкции очевидным образом усложнится и искомые коэффициент теплопередачи и термическое сопротивление уже нельзя будет простым образом выразить через заданные и введенные для стационарных полей характеристики отдельных слоев. Решить такую задачу можно, если взять за основу частотную характеристику плоского слоя, полученную в настоящей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М. : Наука, 1979. — 832 с.
2. Афанасьев, А. М. Обобщение задачи Фурье о температурных волнах в полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2021. — Т. 24, № 2. — С. 13–12. — DOI: <http://dx.doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21>
3. Афанасьев, А. М. Задача о тепломассообмене полупространства с воздушным потоком при периодическом изменении температуры воздуха / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 2. — С. 14–28. — DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.2>
4. Афанасьев, А. М. Решение задач геокриологии на основе формул для затухающих гармонических волн тепломассопереноса в однородном полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Инженерно-физический журнал. — 2023. — Т. 96, № 2. — С. 392–400.
5. Афанасьев, А. М. Решение задач геокриологии на основе обобщенной теории Фурье для температурных волн в полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — 2024. — Т. 27, № 4. — С. 83–93. — DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.4.83-93>
6. Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование процесса теплопередачи через многослойные ограждающие конструкции зданий / Ф. Г. Ахмадиев, Р. Ф. Гиззятов // Инженерно-физический журнал. — 2022. — Т. 95, № 5. — С. 1155–1165.
7. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. — М. : Высш. шк., 1983. — 536 с.
8. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М. : Наука, 1970. — 856 с.
9. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко. — М. : Наука, 1979. — 384 с.
10. Зоммерфельд, А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики / А. Зоммерфельд. — М. : Изд-во иностр. лит., 1950. — 457 с.
11. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. — М. : Наука, 1964. — 488 с.
12. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. — М. : Издательская группа URSS, 2023. — 416 с.
13. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высш. шк., 1967. — 600 с.

14. Михеев, М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. — М. : Бастет, 2010. — 344 с.
15. Морс, Ф. М. Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. — М. : Изд-во иностр. лит., 1960. — 886 с.
16. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. — М. : Наука, 1989. — 544 с.
17. Пехович, А. И. Расчеты теплового режима твердых тел / А. И. Пехович, В. М. Жидких. — Л. : Энергия, 1976. — 352 с.
18. Радиационно-конвективный теплообмен здания с окружающей средой при воздействии солнечного излучения / Б. И. Басок, В. Г. Новиков, Б. В. Давыденко, Т. Г. Беляева, М. П. Новицкая, Р. Я. Сороковой // Инженерно-физический журнал. — 2020. — Т. 93, № 1. — С. 48–57.
19. Соколов, А. К. Решение обратной задачи теплопроводности для симметричного температурного поля пластины, аппроксимированного степенными функциями / А. К. Соколов // Известия РАН. Энергетика. — 2017. — № 6. — С. 108–118.
20. Стрэттон, Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. — М.; Л. : ОГИЗ-Гостехиздат, 1948. — 539 с.
21. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.
22. Франк, Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2 / Ф. Франк, Р. Мизес. — Л.; М. : ОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит., 1937. — 998 с.
23. Шимони, К. Теоретическая электротехника / К. Шимони. — М. : Мир, 1964. — 773 с.
24. Эккерт, Э. Р. Теория тепло- и массообмена / Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк. — М.; Л. : Госэнергоиздат, 1961. — 680 с.

STEADY-STATE HEAT TRANSFER THROUGH A FLAT WALL IN THE MODE OF HARMONIC SURFACE TEMPERATURE CHANGE

Anatoliy M. Afanasev

Doctor of Sciences (Engineering), Professor,
Department of Information Security,
Volgograd State University
a.m.afanasiev@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3703-3167>
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. A steady-state temperature field in a flat wall is investigated in a situation where harmonic fluctuations in the temperature of one of the surfaces are superimposed on a constant temperature difference between the wall surfaces. The concept of a complex coefficient of heat transfer over a variable component, the concept of a frequency characteristic of the plate and the corresponding characteristic period of oscillation, which is called the time constant of the plate for thermal processes, is introduced. This value turns out to be a function of the thermophysical characteristics of the wall material and its thickness. The modulus and argument of the complex heat transfer coefficient are presented as functions of a dimensionless variable, the square of which has the meaning of the relative frequency of the heat wave, and the inverse value has the meaning of the relative depth of penetration. It is shown that for oscillations with periods exceeding the time constant of the plate, heat transfer through it occurs in approximately the same way as in the case of stationary fields. If the oscillation period is less than the time constant, then with an increase in this inequality, the intensity of the heat flux transmitted through the plate decreases monotonously and tends to zero. As an example, the heat transfer characteristics in the harmonic mode for walls made of copper and building bricks are calculated. The results obtained will find application in the theory of heat exchangers of the regenerative type, in the theory of algorithms for calculating fluctuations in indoor temperature and humidity caused by fluctuations in environmental characteristics, in the theory of methods for determining the thermophysical characteristics of materials based on measurement data, i.e. when solving inverse problems of the theory of thermal conductivity.

Key words: mathematical physics, theory of thermal conductivity, plane-layered media, heat waves, harmonic mode, frequency response, heat transfer coefficient, heat exchangers.