



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.4.2>

УДК 517.922

ББК В.161.674

Дата поступления статьи: 27.10.2025

Дата принятия статьи: 28.10.2025



## **АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ВЫБОРА МЕТОДА ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ<sup>1</sup>**

**Алевтина Викторовна Келлер**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики,

Воронежский государственный технический университет

[alevtinak@inbox.ru](mailto:alevtinak@inbox.ru)

<https://orcid.org/0009-0005-5840-9727>

ул. 20-летия Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

**Алена Александровна Замышляева**

Доктор физико-математических наук, директор Института естественных и точных наук,

Южно-Уральский государственный университет

[zamyshliaevaaa@susu.ru](mailto:zamyshliaevaaa@susu.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-4530-4820>

пр. Ленина, 76, 454080, г. Челябинск, Российская Федерация

**Наталья Александровна Манакова**

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой уравнений математической физики,

Южно-Уральский государственный университет

[manakovana@susu.ru](mailto:manakovana@susu.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-8078-8026>

пр. Ленина, 76, 454080, г. Челябинск, Российская Федерация

**Иван Алексеевич Колесников**

Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования,  
Южно-Уральский государственный университет  
asp23kia8@susu.ru  
пр. Ленина, 76, 454080, г. Челябинск, Российская Федерация

**Аннотация.** Восстановление динамически искаженного сигнала на малом временном промежутке является сложной обратной задачей динамических измерений. При наличии помех различной природы выходной сигнал зашумлен, что делает задачу еще более сложной. К настоящему времени сложилась теория оптимальных динамических измерений, в рамках которой для восстановления динамически искаженных сигналов используются методы теории оптимального управления, уравнений соболевского типа, стохастических дифференциальных уравнений, разрабатываются численные методы. Ранее авторами был получен ряд результатов, развивающих численные методы нахождения входного сигнала как решения задачи оптимального управления – оптимального динамического измерения, выполнен ряд исследований по применению цифровых фильтров для фильтрации шума выходного сигнала, разработан новый алгоритм численного решения задачи оптимального динамического измерения. При наличии шумов в выходном сигнале важным является не только эффективность алгоритма восстановления сигнала с учетом инерционности измерительного устройства, но и выбор наиболее эффективного цифрового фильтра. В статье предложен алгоритм обеспечения выбора одного из трех фильтров: скользящей средней, Савицкого – Голея (основанном на методе наименьших квадратов) с последующей реализацией алгоритма нахождения оптимального динамического измерения и MSA-метода (метода авторов, основанного на сплайн-методе с последующим усреднением). MSA-метод не является только цифровым фильтром, в нем комплексно реализуется фильтрация шумов и алгоритм поиска оптимального динамического измерения, кроме того, он может быть использован и при отсутствии шумов, и при иных помехах. Новизна результатов заключается в систематическом и комплексном подходе к оценке эффективности и применимости методов фильтрации шума в рамках решения задачи восстановления динамически искаженного сигнала. Приводятся необходимые теоретические сведения, общие схемы алгоритмов, данные эксперимента, результаты обработки экспериментальных данных по предлагаемым алгоритмам.

**Ключевые слова:** оптимальные динамические измерения, цифровая фильтрация сигнала, алгоритм, вычислительные эксперименты, система леонтьевского типа.

## Введение

Методы и математические модели теории оптимальных динамических измерений (ОДИ) разработаны для решения задачи восстановления входящего сигнала  $u$  по известным выходному сигналу  $y$  и математической модели измерительной динамической системы. Теория ОДИ построена на использовании при решении задач динамических измерений методов автоматического управления [9], оптимального управления [15] и дескрипторных систем [1; 13]. Математической концепцией теории ОДИ является моделирование второй обратной задачи динамических измерений – нахождение входного сигнала по известным выходному сигналу (наблюдению) и математической модели измерительного устройства (ИУ) – как задачи оптимального управления, то есть прямой математической задачи. Инерционность ИУ, шумы и помехи проявляются в запаздывании, меньшей амплитуде и зашумленности выходного сигнала (рис.1). Поэтому при инженерной разработке измерительных устройств восстановление быстро меняющегося во времени входного сигнала при включении ИУ оценивается, прежде всего, по амплитуде для обеспечения надежности работы датчиков.

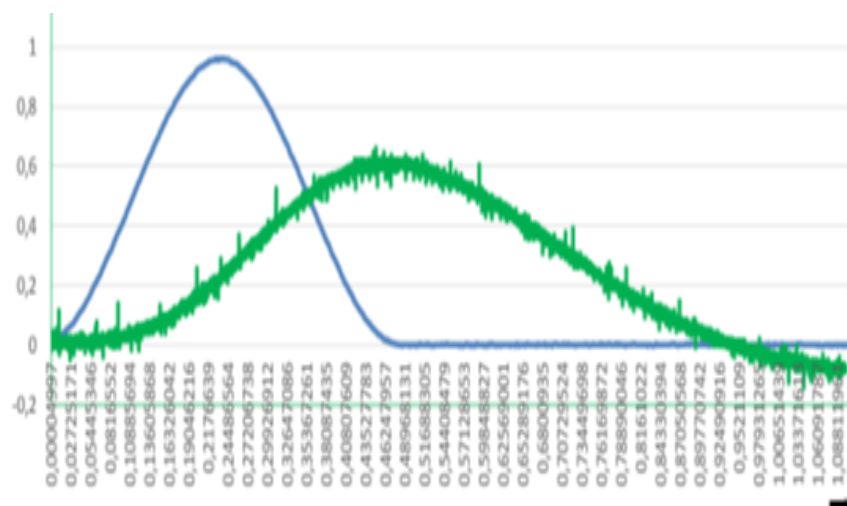


Рисунок 1. Входной и зашумленный выходной сигнал

Постановка задачи и первые аналитические результаты, ставшие математической основой теории ОДИ, принадлежат А.Л. Шестакову и Г.А. Свиридую [15]. Были начаты численные исследования с решения задачи ОДИ в упрощенной постановке – учитывалась или только инерционность ИУ [8], или инерционность ИУ с резонансными помехами в его цепях [14]. Математическую модель поиска ОДИ при отсутствии каких-либо помех (т.е. с учетом только инерционности измерительной динамической системы) будем называть базовой моделью теории ОДИ. Алгоритм численного решения этой задачи строится на синтезе алгоритмов численного решения задачи оптимального управления для системы леонтьевского типа и сплайн-методе. Этот алгоритм будем называть базовым алгоритмом нахождения ОДИ. Входной и выходной сигналы в базовой модели будем называть ОДИ и полезным наблюдением соответственно. Заметим, что полезные сигналы являются детерминированными.

В последние годы исследования ведутся по разработке численных алгоритмов, позволяющих решать задачу ОДИ при зашумленности выходного сигнала. На практике, как на выходе измерительного устройства, так и во входном сигнале, присутствуют аддитивные случайные шумы, их воздействие отражается в получаемом экспериментально

выходном сигнале. Будем считать, что экспериментально полученный выходной сигнал в фиксируемый момент времени представим суммой полезного выходного сигнала и случайного сигнала, моделирующего шум. Задачу численного поиска ОДИ при наличии случайных шумов предлагается решать с использованием двух подходов на основе базового алгоритма нахождения ОДИ. Первый заключается в использовании цифровых фильтров (например, [11]) для выходного сигнала и получения приближенного «полезного наблюдения» с последующим применением базового алгоритма нахождения ОДИ [16]. Сложность подбора параметров цифровых фильтров привела к разработке численного метода авторов статьи – MSA-метода, в котором использованы теорема отсчетов Котельникова [3; 5], разбиение множества отсчетов на несколько непересекающихся подмножеств, формируемых как систематическая выборка, применение численного алгоритма нахождения ОДИ на каждом подмножестве, усреднение результата в каждой точке множества [2]. Это позволяет избежать потерю информации о сигнале при однократном применении теоремы Котельникова и на основе базового алгоритма получить статистическую совокупность значений входных сигналов, включающих приближенное ОДИ и случайную величину шума для каждого момента времени. Последующая статистическая обработка позволяет получить оценку входного сигнала в каждый момент времени, а затем и выделить искомое ОДИ.

При применении к зашумленным сигналам различных цифровых фильтров сложилась практика сравнительного анализа их эффективности с учетом особенностей решаемых задач [4; 6]. Целью данной статьи стала разработка алгоритмического обеспечения выбора метода цифровой фильтрации при обработке результатов динамических измерений. Приводятся результаты апробации разработанного алгоритма на данных реального эксперимента. Сравнительный анализ получаемых результатов с тестовым входным сигналом позволяет сопоставить эффективность используемых методов и подходов по оценке динамической погрешности.

## 1. Математическое моделирование оптимальных динамических измерений

Математическая модель измерительного устройства при отсутствии помех и (или) шумов представляет собой систему леонтьевского типа

$$\begin{cases} L\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием Шоултера – Сидорова

$$\left[ (\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (x(0) - x_0) = 0, \quad (2)$$

где  $L$  и  $A$  – квадратные матрицы состояний  $x(t)$  и взаимовлияния скоростей состояния  $\dot{x}(t)$  ИУ, в некоторых случаях возможно, что  $\det L = 0$ ,  $y(t)$  – вектор-функция наблюдения;  $C$  – прямоугольная матрица, характеризующая взаимосвязь состояния системы и наблюдения;  $B$  – прямоугольная матрица, определяющая условие измерения входного сигнала,  $u(t)$  – вектор-функция измерений (рис. 2).

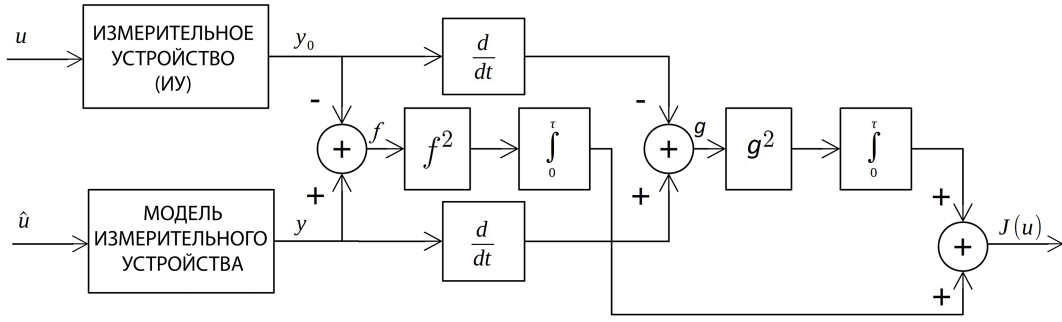


Рисунок 2. Структурные элементы математической модели оптимальных динамических измерений

Система леонтьевского типа (1), являясь конечномерным аналогом уравнений соболевского типа с одной стороны, и вырожденной дескрипторной системой с постоянными коэффициентами с другой, позволяет наиболее полно описать измерительную динамическую систему. Система леонтьевского типа допускает вырожденность матрицы  $L$  и позволяет описывать, например, сложную итерационную динамическую измерительную систему (рис. 3). Следует отметить, что большинство измерительных устройств моделируются невырожденной системой дифференциальных уравнений. Использование системы леонтьевского типа в качестве модели измерительного устройства позволяет расширить круг решаемых задач, например, при работе с измерительными приборами, представляющими собой сложный комплекс датчиков.

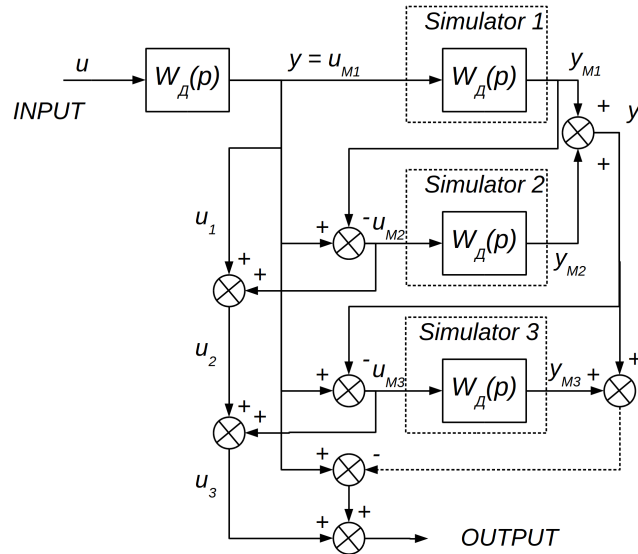


Рисунок 3. Схема сложной итерационной динамической измерительной системы [13]

Для представления детерминированной модели ОДИ введем пространство состояний  $X = \{x \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ , пространство наблюдений  $Y = C[X]$ , пространство измерений  $U = \{u \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2((0, \tau), \mathbb{R}^n)\}$ , выделим в нем замкнутое выпуклое множество допустимых моделируемых измерений

$$\mathfrak{A}_\partial = \left\{ u \in U : \sum_{q=0}^1 \int_0^\tau \|u^{(q)}(t)\|^2 dt \leq d \right\}, \quad (3)$$

которое содержит априорную информацию о входном сигнале (аналог энергии сигнала на промежутке измерения).

В моделях теории автоматического управления (ТАУ) [9] функция управления включена как внешнее воздействие в систему (1), поэтому входной сигнал в задаче оптимального управления моделируется функцией управления. Начальное состояние ИУ  $x_0$  в (2) принимается равным нулю. Функционал штрафа содержит оценку расхождения между экспериментально полученным выходным сигналом (наблюдением) и моделируемым наблюдением, как сложной функции, зависящей также от моделируемого входного сигнала (см. рис. 2)

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|y^{(q)}(u, t) - y_0^{(q)}(t)\|^2 dt, \quad (4)$$

где  $y_0(t) = \text{col}(y_{01}(t), \dots, y_{0r}(t))$  – наблюдения, полученные в ходе эксперимента,  $y(u, t)$  – моделируемые наблюдения (т.е. полученные в ходе математического моделирования процесса восстановления динамически искаженных сигналов),  $\|\cdot\|$  – евклидова норма  $\mathbb{R}^n$ . Физический смысл (4) определяет задачу нахождения

$$J(v) = \min_{u \in \mathfrak{A}_\theta} J(u), \quad (5)$$

где точка минимума  $v(t)$  функционала (4) называется оптимальным динамическим измерением или решением задачи ОДИ (1) – (5). Заметим, что тестовый сигнал  $v^*(t)$  известен только при проведении модельных экспериментов, которые проводятся для оценки эффективности разрабатываемых численных методов и программных алгоритмов. На практике о  $v(t)$  имеются лишь косвенные сведения.

В результате поиска минимума функционала определяется искомая функция входного сигнала, обеспечивающая минимальную квадратическую ошибку динамических измерений.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** [15] Пусть  $L$ ,  $A$  и – квадратные матрицы порядка  $n$ , матрица  $A$  является  $(L, p)$ -регулярной,  $\det A \neq 0$ . Тогда для любого  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  существует единственное решение  $v \in \mathfrak{A}_\theta$  задачи (1) – (5), при этом  $x(v) \in X$  удовлетворяет системе (1), условию (2) и определяется формулой

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \sum_{q=0}^p \left( A^{-1} \left( (kL_k^L(A))^{p+1} - \mathbb{I}_n \right) L \right) \times \right. \\ \left. \times A^{-1} \left( \mathbb{I}_n - (kL_k^L(A))^{p+1} \right) (Bu)^{(q)} + \left( \left( L - \frac{t}{k} A \right)^{-1} L \right)^k x_0 + \right. \\ \left. + \int_0^t \left( \left( L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} L \right)^k \left( L - \frac{t-s}{k} A \right)^{-1} \times (kL_k^L(A))^{p+1} Bu(s) ds \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lim_{k \rightarrow \infty} (kL_k^L(A))^{p+1}$  – проектор,  $L_k^L(A)$  – левая резольвента оператора  $A$ .

Аналитические и численные исследования задачи ОДИ при наличии шумов привели к разработке двух направлений ее решения. Первое базируется на теории стохастических уравнений соболевского типа и производной Нельсона–Гликлиха [10], в рамках

второго разрабатываются численные методы с использованием цифровых фильтров [12]. В измерительное устройство моделируется стохастической системой леонтьевского типа

$$\begin{aligned} L \overset{\circ}{\xi} &= A\xi + B(u + \varphi), \\ \eta &= C\xi + v, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь матрицы  $L, A, B, C$  имеют тот же смысл, что и в (1), случайные процессы  $\varphi$  и  $v$  определяют шумы в цепях и на выходе ИУ, соответственно,  $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – вектор-функция полезного входного сигнала,  $\varphi$  – стохастический процесс, моделирующий шум, причем частоты полезного сигнала отличны от частот шума,  $\overset{\circ}{\xi}$  – производная Нельсона – Гликлиха. Пусть матрица  $A$  –  $(L, p)$ -регулярна,  $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , и начальные состояния ИУ описываются начальным условием Шоултера – Сидорова:

$$\left[ (\alpha L - A)^{-1} L \right]^{p+1} (\xi(0) - \xi_0) = 0, \quad (8)$$

где  $\xi_0 = \sum_{k=0}^n \xi_{0,k} e_k$ ,  $\xi_{0,k}$  – попарно независимые гауссовские случайные величины, а  $\{e_k\}_{k=1}^n$  является ортонормированным базисом в  $\mathbb{R}^n$ .

Для постановки и решения стохастической задачи ОДИ используем следующие обозначения и определения. Случайной величиной будем называть измеримое отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  – полное вероятностное пространство. Случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образуют гильбертово пространство  $\mathbf{L}_2$  со скалярным произведением  $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$ . Если  $\xi \in \mathbf{L}_2$  имеют нормальное (гауссово) распределение, то обозначим это  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ , где  $\mathbf{E}\xi = 0$  и  $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$ .

Отображение  $\eta : \mathcal{T} \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть одномерным стохастическим процессом. Его значение  $\eta = \eta(t, \cdot)$  при каждом фиксированном  $t \in \mathcal{T}$  является случайной величиной, т.е.  $\eta(t, \cdot) \in \mathbf{L}_2$ , называемой сечением стохастического процесса. А значение стохастического процесса  $\eta = \eta(\cdot, \omega)$  при каждом фиксированном  $\omega \in \Omega$  называется выборочной траекторией. Непрерывный стохастический процесс, чьи (независимые) сечения гауссовы, называется гауссовым.

Важнейшим примером непрерывного гауссова стохастического процесса служит винеровский процесс  $\beta = \beta(t)$ , моделирующий броуновское движение на прямой в теории Эйнштейна – Смолуховского представленный формулой

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin \frac{\pi}{2} (2k+1)t, \quad (9)$$

где  $\xi_k \sim N(0, [\frac{\pi}{2}(2k+1)]^{-2})$  – независимые нормально распределенные величины. Сечения стохастического процесса  $\beta$  являются нормально распределенными случайными величинами с  $\mathbf{E}\beta(t)=0$  и  $\mathbf{D}\beta(t) = \sigma^2 t$  при некотором  $\sigma > 0$ . Сечения стохастического процесса  $\overset{\circ}{\beta}$  распределены по нормальному закону с параметрами  $(0, \frac{\sigma^2}{4t})$ , то есть  $\overset{\circ}{\beta}(t) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{4t})$ . В силу чего производную Нельсона – Гликлиха  $\overset{\circ}{\beta}$  броуновского движения  $\beta$  из (9) будем называть одномерным «белым шумом».

Справедлива следующая

**Теорема 2.** [7] Для любой вектор-функции  $u \in C^{p+1}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^n)$ , начальных значений  $\xi_0$  и стохастического процесса  $\varphi \in C^{p+1}\mathbf{L}_2(\mathcal{T}, \mathbb{R}^n)$ , независимых для любого  $t \in \mathcal{T}$ ,



существует единственное решение  $\xi$  задачи (7), (8), заданное формулой

$$\xi(t) = \xi_u(t) + \xi_\varphi(t), \quad \xi_u \in C^1(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n), \quad \xi_\varphi \in C^1 \mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbb{R}^n),$$

где  $\xi_u$  – это детерминированная, а  $\xi_\varphi$  – это стохастическая часть решения

$$\xi_u(t) = \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q B u(s) ds + \sum_{q=0}^p (A^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) L)^q A^{-1} (Q - \mathbb{I}_n) B u^{(q)}(t),$$

$$\xi_\varphi(t) = U^t \xi_0 \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q B \varphi(s) ds + \sum_{q=0}^p (A^{-1} (\mathbb{I}_n - Q) L)^q A^{-1} (Q - \mathbb{I}_n) B \overset{\circ}{\varphi}^{(q)}(t).$$

Здесь  $U^t = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( (L - \frac{t}{r} A)^{-1} L \right)^r$ ,  $Q = \lim_{r \rightarrow \infty} (r L_r^L(A))^p$ ,  $L_r^L(A) = L(L - \frac{1}{r} A)^{-1}$ , а  $\mathbb{I}_n$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Разделяя задачу на детерминированную и стохастическую показывается существование единственного решения стохастической системы леонтьевского типа.

Рассмотрим задачу управления (5), где функционал штрафа

$$J(u) = J(\eta(u)) = \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| \overset{\circ}{\eta}^{(k)}(t) - \eta_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt \quad (10)$$

отражает близость реального наблюдения  $\eta_0(t)$  и виртуального наблюдения  $\eta(t)$ , полученного на основе математической модели ИУ. Поскольку входной сигнал подвержен шуму в цепях и на выходе ИУ, виртуальное наблюдение  $\eta(t)$  является стохастическим процессом. Обозначим через  $\tilde{\eta}_0(t)$  стохастический процесс  $\eta_0(t) - \bar{\eta}_0(t)$  с нулевым математическим ожиданием, где  $\bar{\eta}_0(t)$  – полезное наблюдение. Преобразуем функционал штрафа:

$$\begin{aligned} J(u) &= \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| \overset{\circ}{\eta}^{(k)}(t) - \eta_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt = \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| C \overset{\circ}{\xi}^{(k)}(t) + \overset{\circ}{v}^{(k)} - (\bar{\eta}_0^{(k)}(t) + \tilde{\eta}_0^{(k)}(t)) \right\|^2 dt = \\ &= \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \left\| C \xi_u^{(k)}(t) - \bar{\eta}_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt + \sum_{k=0}^1 \int_0^\tau \mathbf{E} \left\| C \overset{\circ}{\xi}_\varphi^{(k)}(t) + \overset{\circ}{v}^{(k)} - \tilde{\eta}_0^{(k)}(t) \right\|^2 dt. \end{aligned}$$

Таким образом, шумы и случайные начальные условия не влияют на оптимальное динамическое измерение как точку минимума функционала штрафа, они влияют только на его значение.

В рамках второго подхода, при реализации численных методов, используется допущение о том, что если о наличии шумов возможно судить только по зашумленности сигнала, то допускается считать, что шумовые помехи воздействуют только на выходе ИУ, поэтому  $\varphi = 0$ . Классические цифровые фильтры применяются к наблюдаемому зашумленному сигналу, в результате чего получаем «полезное» (сглаженное) наблюдение. Это позволяет для восстановления входного сигнала перейти от решения стохастической задачи ОДИ (5), (7), (8), (10) к решению детерминированной задаче (1) – (5). Вместе с тем, недостатки цифровых фильтров – эффект запаздывания и технические сложности подбора параметров – могут нивелироваться наличием тестовых сигналов.



Повторимся, что воссоздать реальные условия работы ИУ не всегда возможно, поэтому авторами статьи ранее был предложен иной подход, названный MSA-метод. На основании теоремы отсчетов Котельникова формируется из данных зашумленного сигнала  $M$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых формируется как систематическая выборка. Решая  $M$  детерминированных задач ОДИ, для каждого отсчета получаем  $M$  приближенных значений восстановленного сигнала, к этой совокупности для получения окончательного решения могут применяться различные статистические методы усреднения, что позволяет получать различные модификации MSA-метода.

## 2. Алгоритмическое обеспечение

Рассмотрим алгоритм работы комплекса программ, позволяющего осуществить сравнение и выбор цифрового фильтра, на рис. 4 представлена его блок-схема. Заметим, что алгоритм описан для трех фильтров, но может быть использован и для большего числа, прежде всего, классических цифровых фильтров и их комбинаций.

Общими начальными данными для всех вариантов поиска ОДИ являются, матрицы системы  $A, B, C$  массив значений выходного сигнала  $Y_0 = Y_{0i}$  в узловых точках  $t_i, i = 0, 1, \dots, n$  выходного сигнала и  $t_{i+1} - t_i = \delta, t_0 = 0, t_n = \tau$ .

*Сплайн-метод решения задачи ОДИ* подробно представленный в [2], является основным и используется в каждом варианте применения цифрового фильтра. Кратко представим этот метод. Отрезок  $[0, \tau]$  делится на  $M$  равных отрезков разбиения. На каждом из них строятся интерполяционные полиномы  $y_{0M}^\ell(t)$  степени  $\ell \leq (n-1)/M$ . Затем на каждом отрезке разбиения решается задача ОДИ, используя численный алгоритм решения дискретной задачи ОДИ [8].

При реализации сплайн метода приближенное измерение ищется на основе метода Ритца в виде многочлена, степень которого, как правило, не превосходит степени интерполяционного многочлена  $y_j^\ell(t)$  (в данном алгоритме равной одному или трем) и выбирается с учетом вычислительной мощности и заданного шага дискретизации. Основная процедура сводится к поиску такого массива коэффициентов искомого многочлена, при котором достигается минимум функционала  $J$  (4). В алгоритме для этого реализуется итерационный метод покоординатного многошагового спуска с памятью, при подборе шага используются результаты предшествующей итерации с выполнением проверки условий ограничений на принадлежность множеству допустимых измерений. Завершается процедура нахождения минимума функционала штрафа по достижению абсолютной величины разности значений функционала последней и предпоследней итерации цикла меньшего значения, чем заданная погрешность. Приближенное ОДИ  $v_k^\ell(t)$  находится в виде полинома степени  $\ell$ , с условием непрерывности  $v_k^\ell(\tau_k) = v_{k+1}^\ell(t_{0,k+1})$ , правая граничная точка  $k$ -го отрезка разбиения совпадает с левой точкой  $(k+1)$ -го отрезка разбиения. В результате получается непрерывная на  $[0, \tau]$  сплайн-функция  $\tilde{v}^\ell(t) = \bigcup_k v_k^\ell(t)$ .

Кратко опишем MSA-метод [2]. Важным является первый шаг выбора интервала  $\Delta$ , который называется интервалом дискретизации алгоритма во времени. Интервал  $\Delta$  определяет величину  $M = \Delta/\delta$  основных циклов алгоритма. В каждом цикле из  $Y_0$  формируются непересекающиеся подмножества  $Y_{0j}, j=1, \dots, M$ , а объединение всех  $Y_{0j}$  составляет  $Y_0$ . Элементы каждого подмножества выбираются с интервалом  $\Delta$ , начиная с  $t_{0+j-1}$ . На каждом цикле задача ОДИ решается сплайн-методом. В результате получаем приближенные оптимальные динамические измерения  $v_k^\ell(t), k = 1, \dots, M$ . Используя эти значения для каждой узловой точки, определяем простое среднее арифметическое

значение  $\tilde{v}_1(t_i)$ , которое принимается в качестве результата решения задачи  $\tilde{v}_1$ .

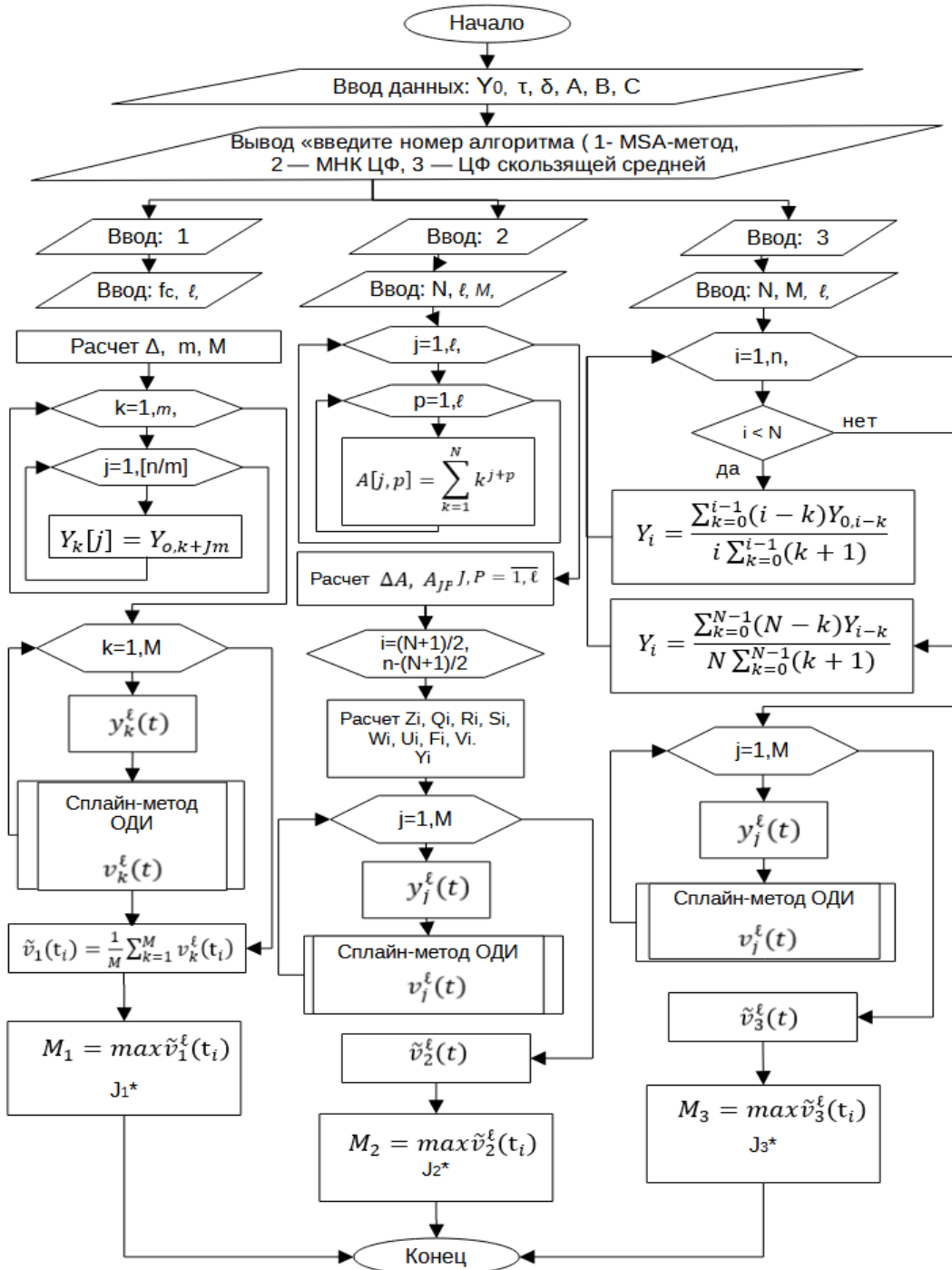


Рисунок 4. Алгоритм выбора метода цифровой фильтрации

В [16] были показаны результаты применения различных модификаций *метода скользящих средних* для решения задачи ОДИ – простое скользящее среднее, взвешенное линейно-сглаженное скользящее среднее с увеличением (или уменьшением) весовых коэффициентов до текущего значения, являющегося наибольшим в наборе по

$N$  точкам, взвешенное линейно сглаженное скользящее среднее с увеличением весовых коэффициентов до текущего значения, являющегося наибольшим (или средним) в наборе по  $N$  точкам. В результате сравнения модификаций, наиболее эффективным был признан фильтр взвешенного линейно сглаженного скользящего среднего с увеличением весовых коэффициентов до текущего значения, являющегося наибольшим в наборе по  $N$  точкам, основная формула расчета имеет вид

$$y_{0i} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (N-k) Y_{i-k}}{N \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)}. \quad (11)$$

Реализация *МНК фильтра* при различных его параметрах описана в [16]. Был выбран МНК фильтр третьего порядка, система решается методом Крамера с расчетом алгебраических дополнений  $Z_i, Q_i, R_i, S_i$  и определителей  $W_i, U_i, F_i, V_i$  для каждой  $i$ -ой расчетной точки, а затем и полезного наблюдения  $Y_i$ .

При сравнении фильтров часто используют такие показатели, как MSE – средний квадрат ошибки, BNR – отношение исходного стандартного отклонения шума к среднеквадратичному шуму сглаженных данных в области базовой линии; максимальное значение среднеквадратичной погрешности в области пика и др., ряд исследователей отмечают, что для правильного выбора фильтра ясного критерия нет [4]. При решении задачи ОДИ сложность оценка эффективности фильтра обусловлена его влиянием не только на подавление шума, но и влиянии его на погрешность решения задачи ОДИ. Предлагается для сравнения использовать максимальное значение входного сигнала (скачка при включении ИУ), и слагаемое функционала качества  $J^*$

$$J(u) = \sum_{q=0}^1 \int_0^{\tau} \|y^{(q)}(u, t) - y_0^{(q)}(t)\|^2 dt = J^* + \int_0^{\tau} \|y'(u, t) - y'_0(t)\|^2 dt.$$

Это обусловлено тем, что второе слагаемое при быстро меняющемся сигнале дает большие значения расхождения производных.

### 3. Обработка результатов эксперимента

Опишем результаты натурного эксперимента. Датчик моделируется системой дифференциальных уравнений вида (7), где

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тестовый сигнал представляет собой один период синуса с амплитудой 0,48V, частотой 2Hz, с фазовым сдвигом 270 градусов и смещением на 0,48V:  $u = 0,48 \sin(4\pi t + 3\pi/2) + 0,48$ ;  $t \in [0; 2]$ , представленный на рис. 1 синим цветом.

В результате стендовых испытаний получен набор  $\{Y_{0i}\}$ , содержащий 40000 точек и зашумленный выходной сигнал, представленный на рис. 1 зеленым цветом. В данном численном эксперименте положим  $\delta=0,00005$  и  $n=40000$ .

Представим результаты численного эксперимента по восстановлению входного сигнала MSA-методом. На рис. 5 представлен результат одной итерации MSA-метода решения задачи ОДИ, красным цветом изображен восстановленный сигнал, зеленым цветом – тестовый сигнал.

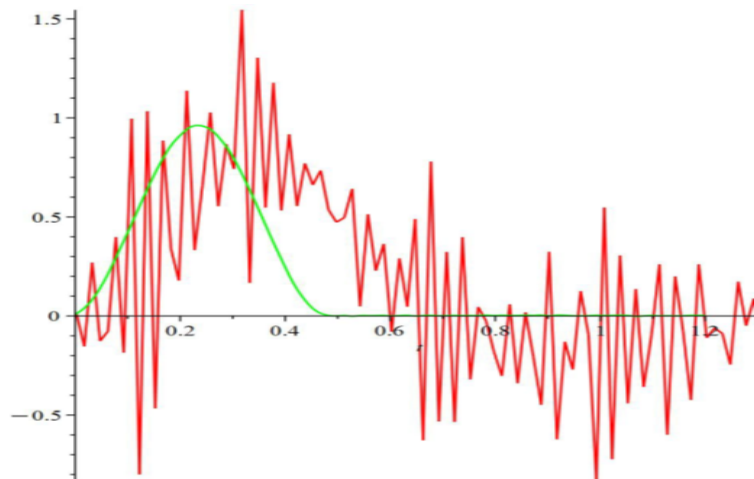


Рисунок 5. Результат вычислительного эксперимента MSA-метод, 1 реализация

На рис. 6 представлен восстановленный сигнал после применения алгоритма усреднения. Синий сигнал изображен восстановленный сигнал при количестве отрезков разбиения  $M=30$ , красным цветом изображен восстановленный сигнал при  $M=90$ , зеленым цветом – тестовый сигнал.

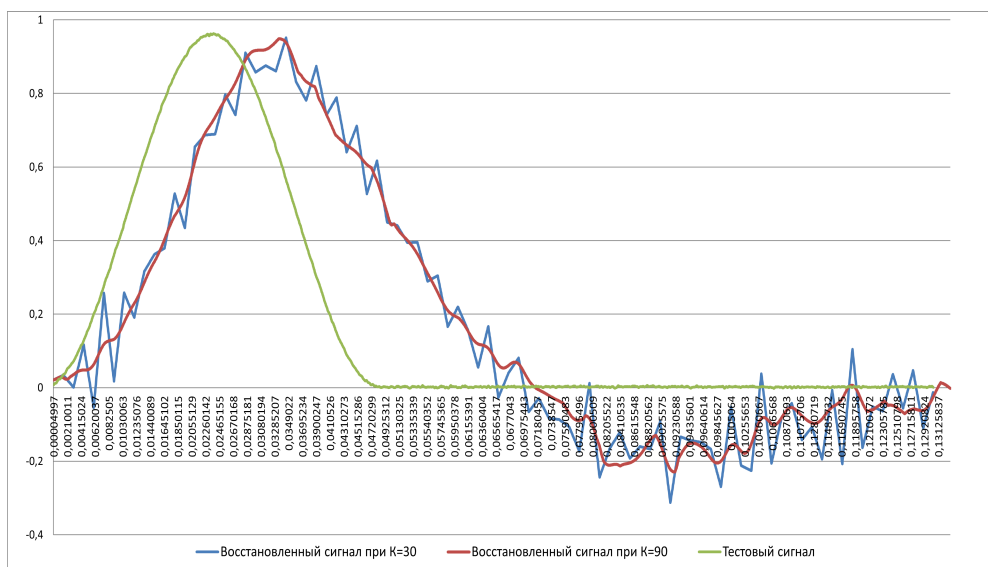


Рисунок 6. Результат вычислительного эксперимента (MSA-метод)

В результате применения цифрового фильтра, основанного на методе скользящей средней, было получено полезное наблюдение (на рис. 7 выделено желтым цветом).

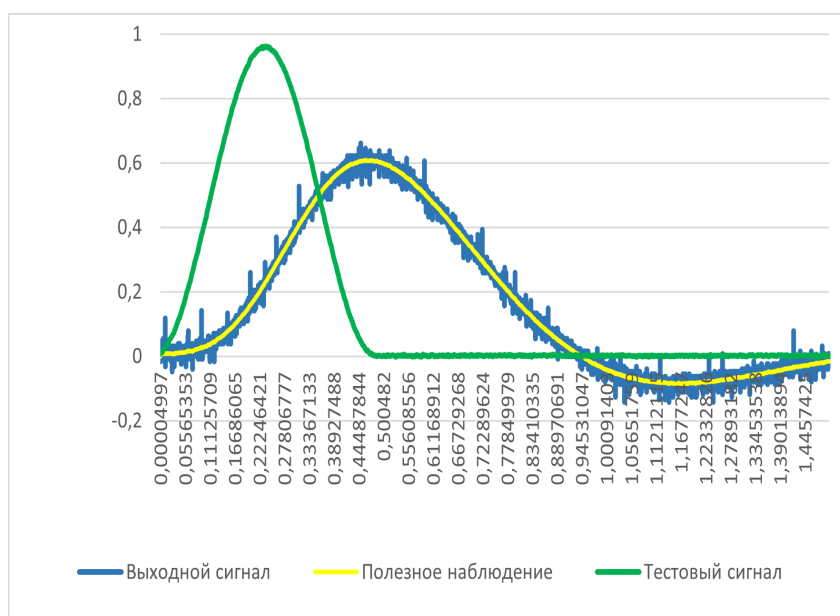


Рисунок 7. Результат вычислительного эксперимента (цифровой фильтр скользящей средней)

После применения сплайн метода ОДИ, был получен приближенный восстановленный сигнал ОДИ (см. рис. 8).

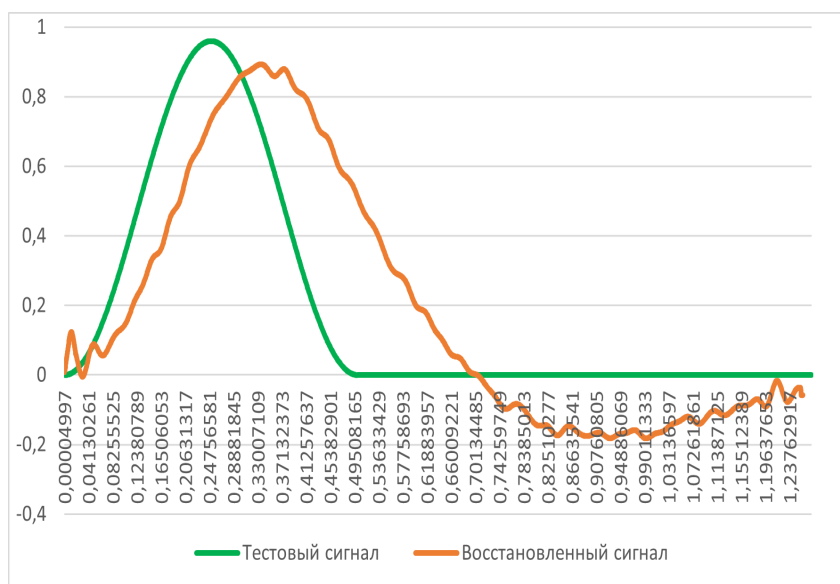


Рисунок 8. Результат вычислительного эксперимента (метод скользящей средней и сплайн метод)

В результате применения цифрового фильтра, основанного на методе наименьших квадратов, было получено полезное наблюдение (на рис. 9 выделено желтым цветом).

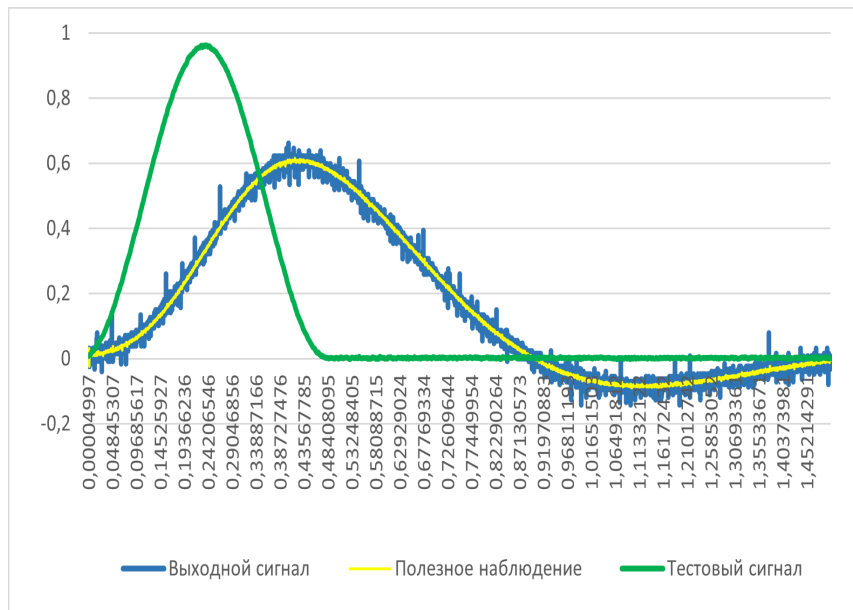


Рисунок 9. Результат вычислительного эксперимента (цифровой МНК фильтр)

После применения сплайн метода ОДИ, был получен приближенный восстановленный сигнал ОДИ (см. рис 10).

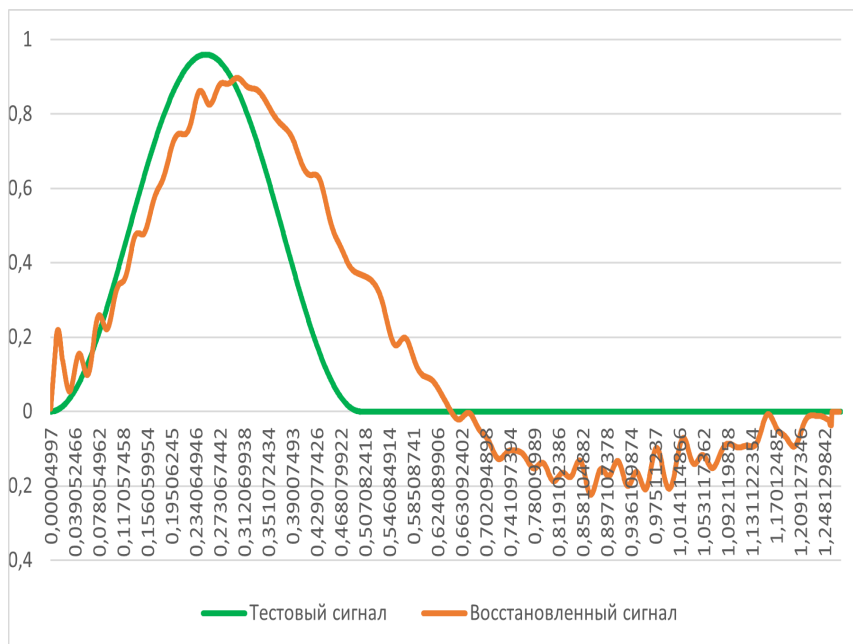


Рисунок 10. Результат вычислительного эксперимента (МНК фильтр и сплайн метод)

Для контроля работы алгоритмов по восстановленному и контрольному входных сигналов, решая задачу (1), (2) были получены приближенное и полезное наблюдения. На рис. 11 синим цветом изображено полезное наблюдение, красным цветом – восстановленное сплайн-методом. Результат расчета показал высокую степень точности работы алгоритмов.

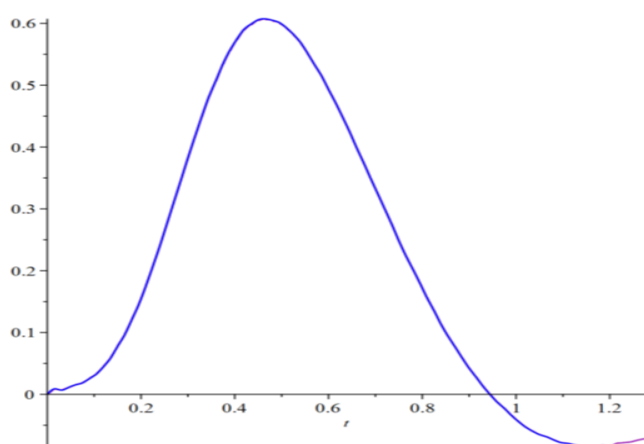


Рисунок 11. Результат вычислительного эксперимента

#### 4. Заключение

Результаты вычислительных экспериментов показывают адекватность математических моделей и эффективность вычислительных методов (см. табл. 1). Полученные результаты свидетельствуют о том, что для восстановления пика входного сигнала наилучшим является MSA-фильтр, а для нивелирования запаздывания МНК-фильтр.

Таблица 1. Сравнительный анализ результатов вычислительного эксперимента

	Максимальное значение сигнала	Значение $t_i$ при максимальном значении
Контрольный сигнал	0,96	0,25
Восстановленный сигнал (MSA-метод)	0,9485976	0,3450720
Восстановленный сигнал (метод скользящей средней)	0,89346	0,3349464
Восстановленный сигнал (МНК-фильтр)	0,896927	0,30081922

#### ПРИМЕЧАНИЕ

<sup>1</sup> Исследование частично выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-11-20037).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов, А. А. Deskрипторные системы и проблемы управления / А. А. Белов, А. П. Курдюков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 272 с.
2. Восстановление динамически искаженного сигнала на основе теории оптимальных измерений / А. Л. Шестаков, А. А. Замышляева, Н. А. Манакова, А. В. Келлер, Г. А. Свиридюк // Автоматика и телемеханика. — 2021. — № 12. — С. 125–137. — DOI: <https://doi.org/10.31857/S0005231021120084>
3. Зиятдинов, С. И. Восстановление сигналов по его выборкам на основе теоремы отсчетов Котельникова / С. И. Зиятдинов // Известия высших учебных заведений. Прибо-



ростроение. — 2010. — Т. 53, № 5. — С. 44–47.

4. Каламбет, Ю. А. Фильтрация шумов. Сравнительный анализ методов / Ю. А. Каламбет, Ю. П. Козьмин, А. С. Самохин // Аналитика. — 2017. — Т. 36, № 5. — С. 88–100. — DOI: <https://doi.org/10.22184/2227-572X.2017.36.5.88.101>

5. Котельников, В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи (Приложение) / В. А. Котельников // Успехи физических наук. — 2006. — Т. 49, № 7. — С. 736–744. — DOI: <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n07ABEH006160>

6. Кудяева, Ф. Х. Сравнительный анализ методов фильтрации шума при низкотемпературном воздействии на биоткани / Ф. Х. Кудяева // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2025. — Т. 28, № 3. — С. 50–56. — DOI: <https://orcid.org/0000-0002-1026-3280>

7. Развитие теории оптимальных динамических измерений. / Е. В. Бычков, С. А. Загребина, А. А. Замышляева, Н. А. Манаква, А. В. Келлер, М. А. Сагадеева, Г. А. Свиридюк // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2022. — Т. 15, № 3. — С. 19–33. — DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220302>

8. Шестаков, А. Л. Численное решение задачи оптимальных динамических измерений / А. Л. Шестаков, А. В. Келлер, Е. И. Назарова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 107–115. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117912010079>

9. Шестаков, А. Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях / А. Л. Шестаков. — Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2013. — 257 с.

10. Gliklikh, Yu. E. On Existence of Solutions to Stochastic Differential Inclusions with Current Velocities II / Yu. E. Gliklikh, A. V. Makarova // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2016. — Vol. 1. — P. 48–60. — DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem160106>

11. Keller, A. V. Optinsl dynamic measurement method using the Savitsky – Golay digital filter / A. V. Keller // Differential Equations and Control Processes. — 2021. — Vol. 1. — P. 1–15.

12. Keller, A. V. Methods of Automatic and Optimal Control in Dynamic Measurements / A. V. Keller, I. A. Kolesnikov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2023. — Vol. 10, № 4. — P. 3–25. — DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem230401>

13. Khudyakov, Yu. V. On mathematical model of the measurement transducers / Yu. V. Khudyakov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2016. — Vol. 3, № 3. — P. 68–73.

14. The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signal / A. L. Shestakov, G. A. Sviridyuk, A. V. Keller, Yu. V. Khudyakov // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2015. — Vol. 113. — P. 183–195.

15. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology / A. L. Shestakov, A. V. Keller, A. A. Zamyshlyayeva, N. A. Manakova, S. A. Zagrebina, G. A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2020. — Vol. 7, № 1. — P. 3–23. — DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem200101>

16. Restoration of dynamically distorted signal using the theory of optimal dynamic measurement and digital filtering / A. L. Shestakov, A. V. Keller, A. A. Zamyshlyayeva, N. A. Manakova, O. N. Tsyplenkova, O. V. Gavrilova, K. V. Perevozchikova // Measurement: Sensors. — 2021. — Vol. 18. — P. 100178.

## REFERENCES

1. Belov A.A., Kurdyukov A.P. Descriptor Systems and Control Problems. Moscow, FIZMATLIT, 2015. 272 p.

2. Shestakov A.L., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Keller A.V., Sviridyuk G.A. Reconstruction of a Dynamically Distorted Signal Based on the Theory of Optimal Dynamic Measurements. *Avtomatika i telemekhanika*, 2021, no. 12, pp. 2143–2154. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0005231021120084>

3. Ziatdinov S.I. Signal Reconstruction Based on the Kotelnikov Sampling Theorem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie*, 2010, vol. 53, no. 5, pp. 44-47.
4. Kalambet Yu.A., Kozmin Yu.P., Samokhin A.S. Noise Filtering. Comparative Analysis of Methods. *Analitika*, 2017, vol. 36, no. 5, pp. 88-100. DOI: <https://doi.org/10.22184/2227-572X.2017.36.5.88.101>
5. Kotelnikov V.A. On the Transmission Capacity of «ether» and Wire in Electric Communications. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2006, vol. 49, no. 7, pp. 736-744. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n07ABEH006160>
6. Kudaeva F.Kh. Comparative Analysis of Noise Filtering Methodq under Low Temperature Exposure on Bio-Tissue. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2025, vol. 28, no. 3, pp. 50-56. DOI: <https://orcid.org/0000-0002-1026-3280>
7. Bychkov E.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Keller A.V., Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A. Development of the Theory of Optimal Dynamic Measurements. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software], 2022, vol. 15, no. 3, pp. 19-33. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp220302>
8. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Avtomatika i telemekhanika*, 2012, no. 1, pp. 97-104. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117912010079>
9. Shestakov A.L. Methods of the Theory of Automatic Control in Dynamic Measurements. Chelyabinsk, SUSU Pubish center, 2013. 257 p.
10. Gliklikh Yu.E., Makarova A.V. On Existence of Solutions to Stochastic Differential Inclusions with Current Velocities II. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 1, pp. 48-60. DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem160106>
11. Keller A.V. Optinsl Dynamic Measurement Method Using the Savitsky – Golay Digital Filter. *Differential Equations and Control Processes*, 2021, vol. 1, pp. 1-15.
12. Keller A.V., Kolesnikov I.A. Methods of Automatic and Optimal Control in Dynamic Measurements. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, vol. 10, no. 4, pp. 3-25. DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem230401>
13. Khudyakov Yu.V. On Mathematical Model of the Measurement Transducers. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 68-73.
14. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V., Khudyakov Yu.V. The Numerical Algorithms for the Measurement of the Deterministic and Stochastic Signal. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2015, vol. 113, pp. 183-195.
15. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Optimal Measurements Theory as a New Paradigm in the Metrology. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 3-23. DOI: <https://doi.org/10.14529/jcem200101>
16. Shestakov A.L., Keller A.V., Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Tsypchenkova O.N., Gavrilova O.V., Perevozchikova K.V. Restoration of Dynamically Distorted Signal Using the Theory of Optimal Dynamic Measurement and Digital Filtering. *Measurement: Sensors*, 2021, vol. 18, pp. 100178.

**ALGORITHMIC APPROACH TO SELECTING DIGITAL FILTERING METHODS  
FOR PROCESSING DYNAMIC MEASUREMENT RESULTS****Alevtina V. Keller**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Applied  
Mathematics and Mechanics,  
Voronezh State Technical University  
alevtinak@inbox.ru  
<https://orcid.org/0009-0005-5840-9727>  
20 let Oktyabrya street, 84, 394006, Voronezh, Russian Federation

**Alena A. Zamyshlyayeva**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Institute of Natural and  
Exact Sciences,  
South Ural State University  
zamyshliaevaaa@susu.ru  
<https://orcid.org/0000-0002-4530-4820>  
Pr. Lenina, 76, 454080, Chelyabinsk, Russian Federation

**Natalya A. Manakova**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of  
Mathematical Physics Equations,  
South Ural State University  
manakovana@susu.ru  
<https://orcid.org/0000-0001-8078-8026>  
Pr. Lenina, 76, 454080, Chelyabinsk, Russian Federation

**Ivan A. Kolesnikov**

Graduate student, Department of Mathematical and Computer Modelling,  
South Ural State University  
asp23kia8@susu.ru  
Pr. Lenina, 76, 454080 Chelyabinsk, Russian Federation

**Abstract.**

The restoration of dynamically distorted signals over short time intervals represents a complex inverse problem in dynamic measurements. In the presence of various types of noise, the output signal becomes corrupted, further complicating the task. To date, the theory of optimal dynamic measurements has been developed, employing methods from optimal control theory, Sobolev-type equations, and stochastic differential equations, alongside advanced numerical techniques. Previously, the authors conducted multiple studies advancing numerical methods for retrieving the input signal as a solution to the optimal control problem of dynamic measurement and proposed a new numerical algorithm for its resolution. When noise is present in the output signal, it is crucial not only to ensure the efficiency of the signal recovery algorithm, considering the measuring device's inertia, but also to select the most effective digital filter. This article presents an algorithm within a software tool that facilitates the selection of

one of three filters: a moving average filter, the Savitzky—Golay filter (based on the least squares method) followed by the optimal dynamic measurement algorithm, and the MSA method (an author-developed technique based on spline methods followed by averaging). The MSA method is not merely a digital filter; it integrates comprehensive noise filtering with an algorithm for optimal dynamic measurement. Moreover, it can be applied both in the presence and absence of noise and other disturbances. The novelty of these results lies in a systematic and comprehensive evaluation of the effectiveness and applicability of noise filtering methods for restoring dynamically distorted signals. This article provides the necessary theoretical background, general algorithmic schemes, experimental data, and results demonstrating the performance of the proposed approaches.

**Key words:** Optimal dynamic measurements, digital signal filtering, algorithm, computational experiments, Leontief-type system.