www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2025.4.1

УДК 517.548+517.956
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 04.11.2025
Дата принятия статьи: 22.11.2025

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ПАРАБОЛИЧНОСТЬ ТИПА

Александр Николаевич Кондрашов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1614-0393
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В случае римановой метрики $ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(z)dx_i dx_j$, заданной в $\mathbb{R}^2 \backslash K$ (K — компакт), известно, что одним из признаков конформной параболичности абстрактной поверхности $F = (\mathbb{R}^2 \setminus K, ds^2)$ является условие гармоничности координатных функций в данной метрике: $\Delta x_1 = 0,\ \Delta x_2 = 0$. Работа посвящена обобщению этого признака.

Ключевые слова: параболичность типа, вариационная емкость, квазиконформные отображения, эллиптические операторы, метод Перрона.

1. Введение

1. Хорошо известен следующий факт (см. по этому поводу, например, [8; 14; 20]), восходящий к теории униформизации римановых поверхностей: всякая некомпактная двумерная односвязная поверхность F класса C^1 конформно эквивалентна либо плоскости $\mathbb{R}^2$, либо кругу конечного радиуса. В соответствии с этим некомпактные двумерные односвязные поверхности F делятся на два класса — поверхности *параболического типа* (те, которые конформно эквивалентны плоскости) и класс поверхностей *гиперболического типа* (те, которые конформно эквивалентны кругу). В связи с этим, естественно

© Кондрашов А.Н., 2025

preprint

возникает задача (Л. Альфорс, [21]) нахождения эффективных признаков параболичности или гиперболичности типа односвязных поверхностей. Эта задача хорошо известна, получила название «проблема типа» и хорошо отражена в литературе (см. наряду с цитированными работами, также классические статьи С. Гильдебрандта [26], Ш.Т. Яу [30], Дж. Милнора [29]).

В последние десятилетия прошлого века получил развитие подход к определению признаков параболичности или гиперболичности типа на основе модульно-емкостных оценок. В частности, в работах В.М. Миклюкова [13; 14] были найдены модульно-емкостные оценки из которых легко вытекает параболичность или гиперболичность типа абстрактной поверхности $F = (D, ds^2)$. В этих работах показано, что факт параболичности типа является ключевым при доказательстве теорем Лиувиллева типа, а также известных теорем С.Н. Бернштейна о линейности целых решений уравнения минимальных поверхностей и Л. Берса о существовании предела градиента решения, определенного над внешностью компакта в $\mathbb{R}^2$. Из недавних работ по этой тематике, отметим работу [8]. Вообще, понятие типа можно обобщать в различных направлениях. Так, хорошо известно, что знание типа граничных множеств играет ключевую роль в вопросах изучения асимптотического поведения решений эллиптических уравнений, заданных на некомпактных римановых многообразиях. В связи с этим можно отметить, например, следующие недавние работы [7; 10; 12].

Наша работа посвящена некоторым обобщениям признака параболичности типа относительно бесконечно удаленной точки, полученного автором в [9]. В отличии от упомянутых выше работ условия параболичности у нас имеют вид дифференциальных, а не модульно-емкостных соотношений. В некоторых случаях такие дифференциальные соотношения возникают естественным образом и их проверка оказывается значительно более простой нежели явное построение модульно-емкостных оценок или указанного в определении отображения. Например, в классической работе Оссермана [17] эти условия являются простыми следствиями обращения в нуль вектора средней кривизны.

2. Пусть $\Phi(z, y, X) = \Phi(x_1, x_2, y, X_1, X_2) \geq 0$, $z = (x_1, x_2), X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$ — измеримая по z, непрерывная по совокупности переменных y, X (при фиксированном z) функция, причем $\Phi(z, y, 0) = \Phi(x_1, x_2, y, 0, 0) = 0$.

Замечание 1. Выбор обозначения $z = (x_1, x_2)$, вместо ожидаемого $x = (x_1, x_2)$, связан с тем, что далее в работе будут использоваться комплекснозначные функции от переменной $z = x_1 + ix_2$ и т.п. Переменные $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ и $z = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ будут отождествляться. Другие подобные отождествления вводятся по мере необходимости аналогичным образом.

Также мы будем придерживаться следующего стандартного соглашения. Как часто бывает принято, если некоторые переменные, скажем z и ξ, связаны функциональной зависимостью, то будем это записывать используя символы тех же переменных $z = z(\xi)$ и $\xi = \xi(z)$. Функции $z(\xi)$ и $\xi(z)$ являются, при этом, взаимно обратными.

Для всякой области $D \subset \mathbb{R}^2$ определим функционал

$$I_\Phi(f, D) = \int\limits_D \Phi(z, f, \nabla f) dx_1 dx_2.$$

Здесь интеграл Лебега понимается в несобственном смысле, то есть случай неограниченности области D допускается.

preprint

Заметим, что в случае дифференцируемости Φ, для рассматриваемых функционалов $I_\Phi(f,D)$ уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\operatorname{div}\Phi_X(z,f,\nabla f)-\Phi_y(z,f,\nabla f)=0,$$

где $\Phi_X(z,y,X)=(\Phi_{X_1}(z,y,X),\Phi_{X_2}(z,y,X))$. Это уравнение описывает экстремали данного функционала.

Определение 1. *Пусть Δ — произвольная подобласть D и $P,Q\subset\Delta$ — непустые, замкнутые относительно Δ, непересекающиеся множества. Тройка множеств $(P,Q;\Delta)$ описанного вида называется конденсатором.*

Непрерывная функция $\varphi\in W^{1,2}(\Delta)$ т.ч.

$$\varphi|_P=0,\ \ \varphi|_Q=1,$$

называется *допустимой* для конденсатора $(P,Q;\Delta)$.

Определение 2. *Число*

$$\operatorname{cap}_\Phi(P,Q;\Delta)=\inf I_\Phi(\varphi,\Delta),$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым функциям, называется вариационной Φ-емкостью конденсатора $(P,Q;\Delta)$.

Из этого определения вытекает, что для любой пары конденсаторов (P,Q,Δ), (P',Q',Δ) т.ч. $P\subset P'$, $Q\subset Q'$ выполнено следующее неравенство:

$$\operatorname{cap}_\Phi(P,Q;\Delta)\le\operatorname{cap}_\Phi(P',Q';\Delta).$$

Это свойство называется свойством *монотонности* емкости.

Далее считаем, что D имеет вид $D=\mathbb{R}^2\setminus K$, где $K\subset\mathbb{R}^2$ — односвязный компакт.

Определение 3. *Последовательность ограниченных областей $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ со свойствами:*

$$1)\ \overline{D_k}\subset D_{k+1};\quad 2)\ \bigcup_{k=1}^\infty D_k=\mathbb{R}^2,$$

называется исчерпанием $\mathbb{R}^2$.

Если $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторое исчерпание $\mathbb{R}^2$, то, для всех k начиная с некоторого k_0, выполнено $K\Subset D_k$.

Определение 4. *Говорят, что область $D=\mathbb{R}^2\setminus K$ имеет Φ-параболический тип в бесконечно удаленной точке, если для любого исчерпания $\mathbb{R}^2$ последовательностью ограниченных областей $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ и для любого i, фиксированного так, что $K\Subset D_i$, выполнено*

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k>i}}\operatorname{cap}_\Phi(\overline{D}_i,\mathbb{R}^2\setminus D_k;\mathbb{R}^2)=0. \tag{1}$$

Из свойства монотонности емкости следует, что $D=\mathbb{R}^2\setminus K$ имеет Φ-параболический тип в бесконечно удаленной точке, если равенство (1) выполняется хотя бы для одного исчерпания при некотором фиксированном i т.ч. $K\Subset D_i$.

Для областей вида $D=\mathbb{R}^2\setminus K$ обозначим через $\mathcal{N}(D)$ совокупность всех функций вида $\Psi(X)=\Psi(X_1,X_2)\ge 0$ т.ч. $\Psi(0,0)=0$, относительно которых плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет Ψ-параболический тип.

Пример. Приведем примеры функций класса $\mathcal{N}(D)$.

preprint

Пусть $\Psi(X) = |X|^p = (X_1^2 + X_2^2)^{p/2}$, $p \geq 2$. Пусть $R > r > 0$. Рассмотрим кольцевой конденсатор с $P_r = \{z = (x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$, $Q_R = \{z = (x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 \geq R^2\}$, $\Delta = \mathbb{R}^2$. Оценим емкость данного конденсатора. Положим

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\ln \frac{|z|}{r}}{\ln \frac{R}{r}}, & \text{при } \ r \leq |z| \leq R, \\ 1, & \text{при } \ |z| > R, \\ 0, & \text{при } \ |z| < r. \end{cases}$$

Для этой функции, имеем

$$\mathrm{cap}_\Psi(P_r, Q_R; \Delta) \leq \int\limits_{K_{r,R}} |\nabla f|^p dx_1 dx_2 = \begin{cases} \frac{2\pi}{\ln \frac{R}{r}}, & \text{при } \ p = 2, \\ \frac{2\pi}{(p-2)\ln^p \frac{R}{r}} \left(\frac{1}{r^{p-2}} - \frac{1}{R^{p-2}} \right), & \text{при } \ p > 2, \end{cases} \tag{2}$$

где $K_{r,R} = \{z : \ r < |z| < R\}$, откуда, $\lim\limits_{R \to +\infty} \mathrm{cap}_\Psi(P_r, Q_R; \Delta) = 0$, и, как следствие Ψ-параболичность типа $\mathbb{R}^2$ в бесконечно удаленной точке.

3. Пусть $a_{ij}(z)$ $(i, j = 1, 2, \ a_{ij} = a_{ji})$ — измеримые функции, причем матрица $A = \{a_{ij}(z)\}$ всюду положительно определена. Важным модельным примером Φ является положительно определенная квадратичная форма

$$\Phi(z, X) = a(z, X) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) X_i X_j. \tag{3}$$

Здесь $z \in D, X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$. С этой формой ассоциирован функционал

$$I_a(f, D) = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) f_{x_i} f_{x_j} dx_1 dx_2 \tag{4}$$

и можно говорить об a-емкости и, значит, a-параболичности.

Если предположить, что найдется постоянная $C > 0$ т.ч.

$$\forall z \in D \ \ \forall X \in \mathbb{R}^2 \ \ a(z, X) \leq C(X_1^2 + X_2^2),$$

то, очевидно, a-параболичность будет следовать из конформной параболичности.

2. Вспомогательные факты

4. Отметим некоторые необходимые для дальнейшего элементарные факты, сформулированные в удобной для нас форме.

Лемма 1. *Предположим, что в области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана матрица измеримых функций $\{a_{ij}(z)\}$ и для некоторых функций $f(z), \varphi(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ существует интеграл*

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) f_{x_i} \varphi_{x_j} dx_1 dx_2.$$

preprint

Предположим, что

$$\xi = (\xi_1(z), \xi_2(z)), \tag{5}$$

квазиконформный гомеоморфизм D на $D' = \xi(D)$. Тогда верно равенство

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) f_{x_i} \varphi_{x_j} dx_1 dx_2 = \int\limits_{\xi(D)} \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(\xi) f_{\xi_i} \varphi_{\xi_j} d\xi_1 d\xi_2,$$

где матрица коэффициентов $(\tilde{a}_{ij}(\xi))_{i,j=1}^2$ связана с матрицей $(a_{ij}(z))_{i,j=1}^2$ формулой

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{2x_1} \\ \xi_{1x_2} & \xi_{2x_2} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Следствие 1. *Пусть с матрицей A связан дифференциальный оператор дивергентного вида*

$$L_A = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22}(z)\frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Предположим, что функция f удовлетворяет дифференциальному неравенству $L_A f \le 0$ (соотв. $L_A \ge 0$) в слабом смысле, т.е. для всякой $\varphi(z) \in W_0^{1,2}(D)$, $\varphi(z) > 0$

$$\int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) f_{x_i} \varphi_{x_j} dx_1 dx_2 \ge 0 \quad (\textit{соотв.} \quad \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z) f_{x_i} \varphi_{x_j} dx_1 dx_2 \le 0).$$

Тогда функция $f(z(\xi))$ удовлетворяет в $\xi(D)$ неравенству $L_{\tilde{A}} \le 0$ (соотв. $L_{\tilde{A}} \ge 0$ в слабом смысле, т.е. для всякой $\tilde{\varphi}(\xi) \in W_0^{1,2}(\xi(D))$, $\tilde{\varphi}(\xi) > 0$

$$\int\limits_{\xi(D)} \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(\xi) f_{\xi_i} \tilde{\varphi}_{\xi_j} d\xi_1 d\xi_2 \ge 0 \quad (\textit{соотв.} \quad \int\limits_{\xi(D)} \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(\xi) f_{\xi_i} \tilde{\varphi}_{\xi_j} d\xi_1 d\xi_2 \le 0),$$

где $L_{\tilde{A}} f$ — дифференциальный оператор дивергентного вида в $\xi(D)$, матрица $\tilde{A}$ которого связана с матрицей A соотношением (6).

Замечание 2. Из формулы (6) вытекает, что величина $\delta = \det(a_{ij}(z))$ инвариантна при невырожденных заменах переменных.

Оператор L_A, заданный в области D будем называть равномерно эллиптическим, если его характеристическая форма (3) удовлетворяет неравенству

$$C_1(X_1^2 + X_2^2) \le a(z, X) \le C_2(X_1^2 + X_2^2),$$

почти всюду в D. Если такое неравенство выполнено на всякой подобласти $D' \Subset D$, то L_A будем называть локально равномерно эллиптическим. По умолчанию далее все рассматриваемые ниже операторы такого вида предполагаются локально равномерно эллиптическими.

Для наших дальнейших целей целесообразно ввести следующее понятие.

preprint

Определение 5. *Пусть* $b(z,X) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij}(z)X_iX_j$ *— положительно определенная при каждом* $z \in D$ *квадратичная форма. Формы* (3) *и* $b(z,X)$ *мы будем называть* соизмеримыми *в* D*, если найдутся положительные постоянные* $C_1 \le C_2$*, т.ч.*

$$\forall z \in D \ \ \forall X \in \mathbb{R}^2 \ \ C_1 b(z,X) \le a(z,X) \le C_2 b(z,X).$$

Лемма 2. *Пусть в области* D *заданы две квадратичные формы*

$$a(z,X) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z)X_iX_j, \quad b(z,X) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}(z)X_iX_j,$$

с измеримыми коэффициентами. Пусть $\xi = \xi(z) : D \to D'$ *удовлетворяет условиям леммы 1 и*

$$\tilde{a}(\xi,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij}(\xi)Y_iY_j, \quad \tilde{b}(\xi,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{b}_{ij}(\xi)Y_iY_j,$$

квадратичные формы в $D' = \xi(D)$ *с матрицами коэффициентов* (6) *и*

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{2x_1} \\ \xi_{1x_2} & \xi_{2x_2} \end{pmatrix}.$$

Формы $\tilde{a}(\xi,Y)$ *и* $\tilde{b}(\xi,Y)$ *соизмеримы в* $D' = \xi(D)$ *тогда и только, когда формы* $a(z,X)$ *и* $b(z,X)$ *соизмеримы в* D*.*

Лемма 3. *Пусть форма* $a(z,Y)$ *соизмерима в области* D *с формой* $|Y|^2 = Y_1^2 + Y_2^2$*, отображение* (6) *конформное. Тогда форма* $\tilde{a}(\xi,X)$ *соизмерима в области* $D' = \xi(D)$ *с формой* $|X|^2 = X_1^2 + X_2^2$*.*

Доказательства лемм 1 и 2 легко устанавливаются непосредственной проверкой, с учетом того, что благодаря квазиконформности применение формулы замены переменных в двойном интеграле, а также цепного правила законны (см. [5, Глава 5], [27; 28]).

Доказательство леммы 3 легко вытекает из (5) и условий Коши—Римана. Действительно, пусть (6) удовлетворяет условиям леммы. В силу конформности данное отображение не вырождается внутри D и удовлетворяет в ней условиям Коши—Римана:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi_{1x_1} & = & \xi_{2x_2}, \\ \xi_{1x_2} & = & -\xi_{2x_1}. \end{array} \right. \tag{8}$$

Для удобства положим $\alpha = \xi_{1x_1}$, $\beta = \xi_{1x_2}$. Из (8) вытекает, что якобиан $J = \alpha^2 + \beta^2$. Согласно (6) и (8), имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Полагая $\cos\vartheta = \frac{\alpha}{\sqrt{J}}$, $\sin\vartheta = \frac{\beta}{\sqrt{J}}$, получаем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

preprint

Имеем далее,

$$\sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij} X_i X_j = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} Y_i Y_j, \tag{9}$$

где

$$Y_1 = \cos\vartheta\ X_1 - \sin\vartheta\ X_2, \quad Y_2 = \sin\vartheta\ X_1 + \cos\vartheta\ X_2.$$

Легко видеть $Y_1^2 + Y_2^2 = X_1^2 + X_2^2$, что вместе с равенством (9) влечет нужное.

Лемма доказана.

5. Пусть $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ — единичный круг, в котором определен равномерно эллиптический оператор

$$L_A = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22}(z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

с измеримыми коэффициентами. Говоря ниже об L_A-решениях (L_A-суперрешениях, L_A-субрешениях) мы понимаем под ними слабые решения уравнения (неравенства)

$$L_A f = 0, \quad (\text{соответственно } \ L_A f \le 0,\ L_A f \ge 0).$$

Для L_A-супер- и субрешений мы употребляем также как синонимы термины L_A-супергармоническая и L_A-субгармоническая функция. Нам потребуется следующий частный факт вытекающий из хорошо известного метода Перрона верхних и нижних функций и теоремы о представлении решений через гармонические функции и квазиконформные отображения [22, Theorem 16.1.4. стр. 429].

Лемма 4. *Пусть $[P_1, P_2] \subset \partial B_1$ — замкнутая дуга и $[P_1, P_2]^C = \partial B_1 \setminus [P_1, P_2]$ — дополняющая открытая дуга. Предположим, $\varphi(z) : \partial B_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ функция, т.ч.*

1) $\varphi|_{[P_1,P_2]} = +\infty$,

2) $\varphi(z)$ непрерывна на $[P_1, P_2]^C$, и $\varphi(z) \to +\infty$ при стремлении к P_i вдоль $[P_1, P_2]^C$.

Тогда не существует L_A-супергармонической в $\overline{B}_1$ функции $f(z)$, т.ч. $f(z)|_{\partial B_1} = \varphi(z)$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. L_A-супергармоническая функция $f(z)$ с указанными граничными свойствами существует.

Для определенности, пусть при движении по дуге $[P_1, P_2]$ окружности ∂B_1 от P_1 к P_2 движение происходит против часовой стрелки. Зафиксируем невырожденную замкнутую дугу $[Q_2, Q_1] \subset [P_1, P_2]^C$, такую, что при движении от Q_2 к Q_1 (непересекающему $[P_1, P_2]$) движение происходит против часовой стрелки. Через $[Q_2, P_2)$ и $[Q_1, P_1)$ будем обозначать полуоткрытые дуги дополняющие $[P_1, P_2] \cup [Q_2, Q_1]$ до полной окружности ∂B_1. Для дуги $[Q_2, P_2)$ при движении от Q_2 к P_2 движение происходит по часовой стрелки, а для $[Q_1, P_1)$ при движение от Q_1 к P_1 движение происходит против часовой стрелке.

Положим n_0 минимальное натуральное число большее $N = \min\limits_{x \in [Q_2,P_2) \cup [Q_1,P_1)} (f(z))$. Для всякого натурального $n > n_0$ пусть α_n такая точка дуги $[Q_2, P_2)$, что $\varphi(\alpha_n) = n$ и на поддуге $[\alpha_n, P_2)$ других точек α в которых было бы $\varphi(\alpha) = n$ нет. Аналогично, обозначим β_n точку дуги $[Q_1, P_1)$, для которой $\varphi(\beta_n) = n$ и на поддуге $[\beta_n, P_1)$ других точек β в которых было бы $\varphi(\beta) = n$ нет. Указанные точки существуют ввиду условия 2) леммы. Кроме того, отметим, что $\alpha_n \to P_2$, $\beta_n \to P_1$ при $n \to +\infty$ и кроме того на соответствующих открытых дугах (α_n, P_2) и (β_n, P_2) выполнено $\varphi(z) > n$.

preprint

В силу равномерной эллиптичности оператора L_A задача Дирихле

$$L_A u = 0, \quad u|_{\partial D'}(z) = \varphi(z)$$

разрешима для всякой области $D' \subset B_1$ с гладкой границей и непрерывной функции $\varphi(z) : \partial D' \to \mathbb{R}$. Поэтому применим метод Перрона (см. [25]) к исследованию разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией $\varphi(z)$.

Пусть $\mathcal{U}_\varphi$ класс верхних функций для функции $\varphi(z) : \partial B_1 \to \overline{\mathbb{R}}$. В силу нашего предположения $f(z) \in \mathcal{U}_\varphi$ и, значит, класс не пуст $\mathcal{U}_\varphi \neq \emptyset$. Определим функцию $f_0(z) = \inf\limits_{g(z) \in \mathcal{U}_\varphi} g(z)$. Согласно методу Перрона данная функция является L_A-гармонической. Необходимо пояснить, что $f_0(z) \not\equiv \mathrm{const}$ и $f_0(z) = +\infty$ на $[P_1, P_2]$. Первое очевидно, ввиду того что оператор A равномерно эллиптический и так как граница ∂B_1 гладкая, то все ее точки регулярны. Поэтому для точек дуги $z_0 \in [P_1, P_2]^C$ мы имеем $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B_1}} f_0(z) = \varphi(z_0)$.

Чтобы доказать второе определим на ∂B_1 последовательность функций при $n > n_0$

$$\psi_n(z) = \begin{cases} n & \text{на } [\alpha_n, P_2) \cup [\beta_n, P_2) \cup [P_1, P_2], \\ \varphi(z) & \text{на } \partial B_1 \setminus ([\alpha_n, P_2) \cup [\beta_n, P_2) \cup [P_1, P_2]), \end{cases}$$

и, соответствующую им последовательность задач Дирихле

$$L_A u_n = 0, \quad u|_{\partial B_1}(z) = \psi_n(z).$$

Функции $\psi_n(z)$ непрерывны на ∂B_1, оператор L_A равномерно эллиптический, заданный в дивергентном виде. Поэтому данные задачи имеют решения [11], которые обозначим $f_n(z)$. В силу принципа максимума-минимума и специфики граничных значений этих решений имеем

a) $\forall n > n_0 \ f_n(z) \leq f_{n+1}(z)$ в B_1;

b) $\forall n > n_0 \ f_n(z) \leq g(z)$ в $B_1 \ \ \forall g(z) \in \mathcal{U}_\varphi$.

В силу b) тогда в B_1 имеем $\forall n > n_0 \ f_n(z) \leq f_0(z)$, но тогда в силу a) $f_0(z) \to +\infty$ при $x \to [P_1, P_2]$, $z \in B_1$. Существование функции $f_0(z)$ с необходимыми свойствами установлено.

В силу теоремы 16.1.4. [22] функция $f_0(z)$ представима в виде $f_0(z) = h(w(z))$, где $w(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — квазиконформный гомеоморфизм, а h гармоническая в $w(B_1)$ функция.

Очевидно, $h|_{[P_1, P_2]} = +\infty$ и $h(w)$ ограничена снизу. Последнее невозможно, так как тогда в $w(B_1)$ существует голоморфная не равная тождественно 0 функция, обращающаяся в 0 на граничной дуге $w([P_1, P_2])$, что в свою очередь невозможно в силу теоремы единственности для голоморфных функций. Указанной функцией является

$$g(w) = \frac{1}{h(w) + ih^*(w)},$$

где $h^*(w)$ — сопряженная с $h(w)$ гармоническая функция. Лемма доказана.

3. Формы класса $\Lambda_{x_2}^{\mathrm{qc}}$

Для всякой 1-формы $\theta(X) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ через $\theta^\#$ будем обозначать вектор, т.ч. $\theta(X) = \langle \theta^\#, X \rangle$. В частности, всякой дифференциальной 1-форме $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$ будем ставить в соответствии векторное поле $\theta^\#(z) = (\theta_1(z), \theta_2(z))$.

preprint

В пространстве 1-форм $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ вводим скалярное произведение

$$\langle\theta,\omega\rangle = \langle\theta^{\#},\omega^{\#}\rangle$$

и длину

$$|\theta| = \sqrt{\langle\theta,\theta\rangle}.$$

Определение 6. *Пусть $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$ — дифференциальная форма, класса $L_{2,\mathrm{loc}}(D)$, заданная в области D. Форма $\theta(z)$ называется $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точной в D, если существует непрерывная, дифференцируемая п.в. в функция $f(z) \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ т.ч. $\theta(z) = df(z)$ п.в. в D. Всякую такую функцию $f(z)$ будем в дальнейшем называть первообразной для формы θ.*

Если $\theta(z)$ не является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точной в D, но является таковой в любой односвязной подобласти $D' \subset D$, то ее мы будем называть локально $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точной в D.

Как и гладком случае, очевидно, в случае односвязной области D всякая локально $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точная форма является $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точной.

Замечание 3. Известно ([6; 16; 24],[5, Гл. 2, п.5], [15, раздел 3.2.3]), что если $f(z) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ при $p > 2$ или $f(z) \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ и $f(z)$ монотонна по Лебегу, то требование дифференцируемости почти всюду выполняется автоматически.

Лемма 5. *Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, пересечение которой с любой прямой параллельной оси x_2 связно, определена $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$-точная форма $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$, такая, что $\theta_2(z) > 0$.*

Пусть $F(z)$ — произвольная первообразная этой формы. Тогда отображение

$$\xi(z) = x_1 + iF(z)$$

гомеоморфно переводит D в некоторую область $\xi(D)$, причем, если

$$\forall D' \Subset D \ \operatorname*{ess\,sup}_{D'} \frac{1 + |\theta(z)|^2}{\theta_2(z)} < +\infty, \tag{10}$$

то данный гомеоморфизм локально квазиконформный.

Доказательство. В силу определения первообразной от формы, п.в. в D, имеем

$$F_{x_1}(x_1,x_2) = \theta_1(z), \quad F_{x_2}(x_1,x_2) = \theta_2(z) > 0.$$

Отсюда заключаем, что функция $F(x_1,x_2)$ (строго) монотонно возрастает по x_2 при п.в. допустимых x_1, т.е. x_1 для которых $\{(x_1,x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$.

На самом деле, при указанных условиях функция $F(x_1,x_2)$ монотонно возрастает при всех x_1. Действительно, если имеется отрезок $[(x_1,x_2'),(x_1,x_2'')]$ $(x_2' < x_2'')$ на котором $F(x_1,t)$ абсолютно непрерывна по t, то $F(x_1,x_2') < F(x_1,x_2'')$, поскольку

$$F(x_1,x_2'') - F(x_1,x_2') = \int\limits_{x_2'}^{x_2''} \theta_2(x_1,t)dt > 0.$$

Если имеется отрезок $[(x_1,x_2'),(x_1,x_2'')]$ $(x_2' < x_2'')$ на котором $F(x_1,t)$ не является абсолютно непрерывной, то она все же является неубывающей на этом отрезке, т.е. для

preprint

любых $t' < t''$, $t', t'' \in [x_1', x_2'']$ $F(x_1, t') \leq F(x_1, t'')$. Действительно, ввиду непрерывности $F(z)$ в D и абсолютной непрерывности на произвольных отрезках лежащих на почти всех прямых параллельных осям координат пересекающих D (см., например, [5, Гл. 2, п. 5] или [15, раздел 3.1]), можно указать последовательность $x_1^{(n)}$, сходящуюся к x_1 и такую, что на отрезках $[(x_1^{(n)}, t'), (x_1^{(n)}, t'')]$ функция $F(z)$ будет абсолютно непрерывной, а значит

$$F(x_1^{(n)}, t') < F(x_1^{(n)}, t'').$$

После перехода к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве, получим $F(x_1, t') \leq$ $\leq F(x_1, t'')$. Однако равенство здесь невозможно, поскольку в этом случае функция $F(x_1, t)$ будет абсолютно непрерывной на отрезке $[t', t'']$.

Непрерывность, строгая монотонность по x_2 функции $F(x_1, x_2)$, а также условия наложенные на область D означают гомеоморфность отображения $\xi(z)$. Вычисляя для данного отображения величину

$$P(z) = \frac{1 + |\mu(z)|^2}{1 - |\mu(z)|^2},$$

где $\mu(z) = \frac{\xi_{\bar{z}}}{\xi_z}$ — коэффициент Бельтрами, получаем

$$P(z) = \frac{1 + |\theta^{\#}(z)|^2}{\theta_2(z)} = \frac{1 + |\theta(z)|^2}{\theta_2(z)}.$$

Поскольку, как хорошо известно, первая характеристика Лаврентьева $p(z)$ (см. [2–4]) почти всюду равна

$$p(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|},$$

и для нее верна оценка $P(z) \leq p(z) \leq 2P(z)$, то отсюда получаем нужное. Лемма доказана.

6. Всюду далее через $\Lambda^{qc}_{x_2}(D)$ ($D \in \mathbb{R}^2$ — область) будем обозначать множество $W^{1,2}_{\text{loc}}$-точных форм $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$, $\theta_2(z) > 0$, удовлетворяющих условию (10).

Замечание 4. В обозначении $\Lambda^{qc}_{x_2}(D)$ наличие переменной x_2 указывает на положительность коэффициента $\theta_2(z) > 0$ при dx_2. Аналогично, можно было бы определить класс $\Lambda^{qc}_{x_1}(D)$ 1-форм $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$, у которых $\theta_1(z) > 0$.

4. Основные результаты

Всюду далее символ D обозначает область, параболичность типа которой на бесконечности устанавливается. При этом предполагается, что она имеет вид $D = \mathbb{R}^2 \setminus K$, где K — односвязный компакт.

Для удобства формулировок введем некоторые обозначения.

1) Через Ω^+ будем обозначать множество всевозможных областей вида

$$\{(x_1, x_2) : \ x_2 > g(x_1)\}$$

preprint

не пересекающихся с K, а через Ω^- множество областей вида

$$\{(x_1, x_2) :\ x_2 < -g(x_1)\},$$

где $g(x_1) \in C(\mathbb{R})$ не пересекающихся с K. При этом в обоих случаях предполагается $g(x_1) \geq 0$.

2) Для всякой формы $\omega(z) = \omega_1(z)dx_1 + \omega_2(z)dx_2$ и функции $\lambda(z) > 0$ определим квадратичную форму

$$B_{\lambda,\omega}(z, X) = \lambda(z)X_1^2 - 2\omega_2(z)X_1X_2 + \omega_1(z)X_2^2.$$

Для формы $\theta(z) = \theta_1(z)dx_1 + \theta_2(z)dx_2$, функций $\Psi(X) \in \mathcal{N}(D)$, $\Phi(z, y, X)$, введем в рассмотрение следующую величину

$$\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^2\setminus K} \sup_{y\in\mathbb{R}, X:\Psi(X)\neq 0} \frac{\Phi(z, y, XJ)}{\theta_2(z)\Psi(X)},$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1(z) & \theta_2(z) \end{pmatrix},$$

и $X = (X_1, X_2)$ — вектор-строка.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть существуют 1-форма $\theta(z) \in \Lambda^{qc}_{x_2}(D)$ и локально точная 1-форма $\omega(z) = \omega_1(z)dx_1 + \omega_2(z)dx_2$, класса $L_{2,\mathrm{loc}}(D)$, $\omega_1(z) > 0$.*

Предположим также, что имеют место следующие соотношения:

1) для некоторой функции $\Psi \in \mathcal{N}(D)$ выполнено $\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} < \infty$,

2)

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^2\setminus K} \frac{\delta^2(z) + 1 + \omega_2^2(z) + \theta_1^2(z)}{\omega_1(z)\theta_2(z)} < +\infty, \tag{11}$$

где $\delta(z) = \omega_1(z)\theta_2(z) - \omega_2(z)\theta_1(z)$.

Тогда область D имеет Φ-параболический тип.

Далее $*$ — оператор Ходжа относительно евклидовой метрики в $\mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение.

Теорема 2. *Пусть существуют 1-форма $\theta(z) \in \Lambda^{qc}_{x_2}(D)$ и 1-форма $\omega(z) = \omega_1(z)dx_1 + \omega_2(z)dx_2$, класса $L_{2,\mathrm{loc}}(D)$, $\omega_1(z) > 0$, причем для $\omega(z)$ существует слабый дифференциал $d\omega(z)$ и в некоторой области $D_1 \in \Omega^+$ выполняется неравенство $*d\omega(z) \geq 0$, а в некоторой области $D_2 \in \Omega^-$ выполняется неравенство $*d\omega(z) \leq 0$.*

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) для некоторой функции $\Psi \in \mathcal{N}(D)$ выполнено $\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} < \infty$,

2) может быть определена измеримая функция $\lambda(z)$ такая что $\sigma(z) = \lambda\omega_1 - \omega_2^2 > 0$, причем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D_i} \left(\frac{1}{\theta_2(z)} + \frac{\theta_2(z)}{\sigma(z)}\right)\left(\lambda(z) + B_{\lambda,\omega}(z, \theta^{\#})\right) < +\infty.$$

Тогда D имеет Φ-параболический тип.

preprint

Лемма 6. *Пусть заданы* $\Psi(X) \in \mathcal{N}(D)$, $\Phi(z,y,X) \geq 0$ *и* $\theta(z) \in \Lambda^{\mathrm{qc}}_{x_2}(D)$. *Пусть* D *— область,* $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *и* $\xi = x_1 + iF(z)$, *где* $F(z)$ *первообразная формы* $\theta(z)$. *Тогда*

$$\int\limits_D \Phi(z, f(z), \nabla f(z)) dx_1 dx_2 \leq \mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} \int\limits_{\xi(D)} \Psi(\nabla_\xi f(z(\xi)) d\xi_1 d\xi_2. \tag{12}$$

Замечание 5. Здесь и далее $\nabla_\xi f(z(\xi)) = (\frac{\partial f(z(\xi)}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f(z(\xi)}{\partial \xi_2})$. Интеграл справа понимается здесь в несобственном смысле (как и интеграл слева, см. раздел 1).

Доказательство. Интегральное неравенство (12) достаточно установить для произвольной ограниченной подобласти $D_1 \Subset D$. Имеем

$$\int\limits_{D_1} \Phi(z, f(z), \nabla f(z)) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\xi(D_1)} \Phi(z(\xi), f(z(\xi)), \nabla f(z)|_{x=z(\xi)}) |J|^{-1} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{\xi(D_1)} \Phi(z(\xi), f(z(\xi)), \nabla_\xi f(z(\xi)) J) \frac{1}{\theta_2(z(\xi))} d\xi_1 d\xi_2 \leq \mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} \int\limits_{\xi(D_1)} \Psi(\nabla_\xi f(z(\xi)) d\xi_1 d\xi_2.$$

Замена переменных и применение цепного правила $\nabla f(z)|_{x=z(\xi)} = \nabla_\xi f(z(\xi)) J$ корректны в силу квазиконформности $\xi = \xi(z)$ (см. [5, Глава 5], [27; 28]). Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Пусть $F(z)$ первообразная формы $\theta(z)$ и

$$\xi(z) = \xi_1 + i\xi_2 = x_1 + iF(z). \tag{13}$$

В силу лемм 5, 6 достаточно доказать, что это отображение (13) однолистно переводит окрестность бесконечно удаленной точки плоскости переменных x_1, x_2 на окрестность бесконечно удаленной точки плоскости переменных ξ_1, ξ_2, причем так, что бесконечность переходит в бесконечность.

С учетом строго монотонноного возрастания функции $F(x_1, x_2)$ по переменной x_2 достаточно показать, что при любом $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ выполнено

$$\lim_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = +\infty, \tag{14}$$
$$\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = -\infty. \tag{15}$$

Докажем, например, соотношение (14), (15) доказывается аналогично.

Предположим противное, т.е. что (14) при некоторых x_1 не выполняется. Пусть, например, при $x_1 = x_1^0$. Зададим $c > 0$, так, чтобы компакт K лежал в полуплоскости $\{(x_1, x_2) : \ x_2 < c\}$ и обозначим через $\Pi_c = \{(x_1, x_2) : \ x_2 \geq c\}$.

Рассмотрим область $\Pi'_c = \xi(\Pi_c)$, очевидно, односвязную. Заметим, что в силу вида отображения (13) $\partial\Pi'_c = S' \bigcup \Gamma'$, где S' — график функции $\xi_2 = F(\xi_1, c)$, а Γ' — некоторое непустое множество. О структуре Γ' информации у нас весьма мало. Ясно

preprint

лишь, что это множество содержит конечную точку $(x_1^0, \lim\limits_{x_2\to+\infty} F(x_1^0, x_2))$. Ясно, также, что Π_c' не содержит точек луча

$$\{(\xi_1, \xi_2): \quad \xi_1 = x_1^0, \quad \xi_2 > \lim_{x_2\to+\infty} F(x_1^0, x_2)\}.$$

Поэтому Γ' содержит континуум точек.

Отметим равенства

$$\xi_z = \frac{1}{2}(1+\theta_2+i\theta_1), \quad \xi_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(1-\theta_2+i\theta_1), \quad \mu_{\xi|z} = \frac{1-\theta_2+i\theta_1}{1+\theta_2+i\theta_1}.$$

Отобразим конформно область Π_c' на единичный круг $B = \{w : |w| < 1\}$. Пусть $w = v_1 + iv_2 = w(\xi)$ — данное отображение. При данном отображении S' на окружности $|w| = 1$ будет соответствовать некоторая дуга, а ее дополнением (соответствующее Γ') будет также невырожденная в точку дуга Γ''.

В полуплоскости Π_c определим первообразную $G(z)$ формы ω с помощью которой определим комплекснозначную функцию

$$u = u_1 + iu_2 = x_2 - iG(z).$$

Нетрудно видеть, отображение $u(z)$ осуществляет сохраняющий ориентацию гомеоморфизм Σ_c на $u(\Sigma_c)$. Вычисляя, имеем

$$u_z = \frac{1}{2}(\omega_2 - i + i\omega_1), \quad u_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(-\omega_2 + i + i\omega_1), \quad \mu_{u|z} = \frac{-\omega_2 + i + i\omega_1}{\omega_2 - i + i\omega_1}.$$

Далее, отметим формулу

$$\mu_{u|\xi} = \frac{\mu_{u|z} - \mu_{\xi|z}}{1 - \mu_{u|z}\overline{\mu_{\xi|z}}}\frac{\xi_z}{\overline{\xi_z}}.$$

Отсюда

$$|\mu_{u|\xi}|^2 = \frac{(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1 - 1)^2 + (-\theta_1 + \omega_2)^2}{(\omega_1\theta_2 - \omega_2\theta_1 + 1)^2 + (\theta_1 + \omega_2)^2} = \frac{(\delta - 1)^2 + (-\theta_1 + \omega_2)^2}{(\delta + 1)^2 + (\theta_1 + \omega_2)^2}.$$

Далее, аналогично, имеем

$$\mu_{u|w} = \frac{\mu_{u|\xi} - \mu_{w|\xi}}{1 - \mu_{u|\xi}\overline{\mu_{w|\xi}}}\frac{w_\xi}{\overline{w_\xi}} = \mu_{u|\xi}\frac{w_\xi}{\overline{w_\xi}}.$$

Тем самым $|\mu_{u|w}|^2 = |\mu_{u|\xi}|^2$. Отсюда, с учетом (11), почти всюду в круге $|w| < 1$, имеем

$$\frac{1+|\mu_{u|w}|^2}{1-|\mu_{u|w}|^2} = \frac{1 + \frac{(\delta-1)^2+(-\theta_1+\omega_2)^2}{(\delta+1)^2+(\theta_1+\omega_2)^2}}{1 - \frac{(\delta-1)^2+(-\theta_1+\omega_2)^2}{(\delta+1)^2+(\theta_1+\omega_2)^2}} = \frac{(\delta+1)^2 + (\theta_1+\omega_2)^2 + (\delta-1)^2 + (-\theta_1+\omega_2)^2}{(\delta+1)^2 + (\theta_1+\omega_2)^2 - ((\delta-1)^2 + (-\theta_1+\omega_2)^2)}$$

$$= \frac{\delta^2(z) + 1 + \omega_2^2(z) + \theta_1^2(z)}{\omega_1(z)\theta_2(z)} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{z\in D} \frac{\delta^2(z) + 1 + \omega_2^2(z) + \theta_1^2(z)}{\omega_1(z)\theta_2(z)} < +\infty.$$

Значит отображение $u = u(w)$ квазиконформно в круге $|w| < 1$. Функция $f(w) = \frac{1}{u(w)}$ имеет ту же комплексную дилатацию, что и $u(w)$. С другой стороны, на Γ'' $f(w) \equiv 0$, что невозможно (противоречие с хорошо известным принципом соответствия границ). Тем самым соотношение (14) доказано. Следовательно доказана и теорема.

preprint

6. Доказательство теоремы 2

Пусть $F(z)$ первообразная формы $\theta(z)$ и

$$\xi(z) = \xi_1 + i\xi_2 = x_1 + iF(z). \tag{16}$$

Как и в случае предыдущей теоремы, для доказательства теоремы нужно показать, что отображение (16) однолистно переводит окрестность бесконечно удаленной точки плоскости переменных x_1, x_2 на окрестность бесконечно удаленной точки плоскости переменных ξ_1, ξ_2, причем так, что бесконечность переходит в бесконечность.

С учетом строго монотонного возрастания функции $F(x_1, x_2)$ по переменной x_2, как и в предыдущем случае, достаточно установить, что при любом $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ выполнено

$$\lim_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = +\infty, \tag{17}$$

$$\lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = -\infty. \tag{18}$$

Докажем, например, соотношение (17), (18) доказывается аналогично.

Предположим противное, т.е. что (17) при некоторых x_1 не выполняется. Пусть, например, при $x_1 = x_1^0$.

В D_1 выполняется соотношение $*d\omega \geq 0$ в слабом смысле, т.е. $\forall \varphi(z) \in W_0^{1,2}(D_1)$, $\varphi(z) > 0$, выполнено неравенство

$$\int\limits_{D_1} (\varphi_{x_2}\omega_1 - \varphi_{x_1}\omega_2) dx_1 dx_2 \geq 0. \tag{19}$$

Обозначим через $B_{\lambda,\omega}$ линейный эллиптический дифференциальный оператор, имеющий $B_{\lambda,\omega}(z, X)$ своей характеристической формой, т.е. оператор

$$B_{\lambda,\omega} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda(z)\frac{\partial}{\partial x_1} - \omega_2(z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\omega_2(z)\frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_1(z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Очевидно, условие (19) есть не что иное, как условие $B_{\lambda,\omega}$-супергармоничности в D_1 в слабом смысле функции $f(z) = x_2$.

Рассмотрим полуполосу $P = \{(x_1, x_2) : \ |x_1 - x_1^0| < c_1, \ \ x_2 > c_2\}$, где $c_1 > 0, c_2 > 0$ подобраны так, чтобы $\overline{P} \subset D_1$.

Прямой проверкой, с учетом условия 2) теоремы, несложно убедится, что после замены переменных (16), в области $\xi(D_1)$ оператору $B_{\lambda,\omega}$ будет соответствовать равномерно эллиптический оператор, который обозначим $\tilde{B}$. При этом $f(z(\xi)) = x_2(\xi)$ — будет $\tilde{B}$-супергармонической функцией в $\xi(D_1)$.

Поскольку (17) не выполняется, то $\partial\xi(P) = \xi(\partial P) \bigcup \Gamma$, где Γ — некоторый континуум. Так как $\xi(P)$ односвязная область, то по теореме Римана ее можно конформно отобразить на единичный круг B_1.

Пусть $u : \xi(P) \to B_1$ — данное отображение. При данном отображении оператору $\tilde{B}$ снова будет соответствовать равномерно эллиптический оператор (см. лемму 3), который обозначим через $\tilde{\tilde{B}}$. При этом функция $f(z(\xi(u)))$ будет $\tilde{\tilde{B}}$-супергармонической в B_1.

preprint

Кроме того, заметим, что граничному множеству Γ при отображении $u : \xi(P) \to \to B_1$ будет отвечать невырожденная дуга на ∂B_1. На этой дуге $f(z(\xi(u))) = +\infty$, а на дополняющей дуге данная функция непрерывна, причем стремится к $+\infty$ при стремлении к концевым точкам. Существование такой функции противоречит лемме 3. Теорема доказана.

7. Некоторые оценки величины $\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi}$

1) В случае когда рассматривается квадратичный функционал $\Phi(z,y,X) = a(z,X)$ и $\Psi(X) = |X|^2$, имеем оценку

$$\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} \le \operatorname*{ess\,sup}_D \frac{a_{11}(z) + a(z,\theta^{\#}(z))}{\theta_2(z)}.$$

Действительно, подставляя

$$XJ = (X_1, X_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1(z) & \theta_2(z) \end{pmatrix} = (X_1 + \theta_1 X_2, \theta_2 X_2)$$

в $\Phi(z,y,XJ) = a(z,XJ)$ и используя стандартные факты линейной алгебры, получаем

$$a(z,XJ) = a_{11}(X_1 + \theta_1 X_2)^2 + 2a_{12}(X_1 + \theta_1 X_2)\theta_2 X_2 +$$

$$+ a_{22}\theta_2^2 X_2^2 = a_{11}X_1^2 + 2(a_{11}\theta_1 + a_{12}\theta_2)X_1X_2 + a(z,\theta^{\#})X_2^2 \le$$

$$\le \operatorname{Sp}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\theta_1 + a_{12}\theta_2 \\ a_{11}\theta_1 + a_{12}\theta_2 & a(z,\theta^{\#}) \end{pmatrix}|X|^2 = (a_{11}(z) + a(z,\theta^{\#}(z)))|X|^2.$$

Отсюда следует нужное.

2) В случае когда рассматривается функционал $\Psi(X) = |X|^p$, аналогичными выкладками можно получить следующую оценку

$$\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi} < \operatorname*{ess\,sup}_{z\in D}\left(\frac{(1+|\theta(z)|^2)^{p/2}}{\theta_2(z)} \sup_{\substack{y\in\mathbb{R} \\ Y\in\mathbb{R}^2, Y\neq 0}} \frac{\Phi(z,y,Y)}{|Y|^p}\right).$$

8. Следствия теорем

В случае римановой метрики $ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(z)dx_i dx_j$, заданной в $D = \mathbb{R}^2 \setminus K$ (K — компакт), известно [9, с. 14], что одним из признаков конформной параболичности является условие гармоничности координатных функций в данной метрике:

$$\Delta x_1 = 0,\ \Delta x_2 = 0.$$

Главным следствием теоремы 2 является следующее обобщение этого результата на случай квадратичных функционалов.

Следствие 2 (теоремы 2). *Пусть в D задан линейный эллиптический оператор*

$$\mathrm{B} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(z)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

preprint

с измеримыми коэффициентами $b_{ij} = b_{ji}$, *причем его характеристическая форма* $b(z, X)$ *соизмерима с формой* $a(z, X)$. *Предположим, что форма* $\theta(z) = -a_{12}dx_1 + a_{11}dx_2 \in \Lambda^{\mathrm{qc}}_{x_2}(D)$ *и*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{R}^2\setminus K} \left(\delta(z) + \frac{1}{\delta(z)}\right) < +\infty, \ (\delta(z) = a_{22}a_{11} - a_{12}^2). \tag{20}$$

Тогда, если на множестве вида $\{(x_1, x_2) : \ |x_2| > g(x_1)\}$, *где* $g(x_1) > 0$ — *некоторая непрерывная функция, определенная при всех* $x_1 \in \mathbb{R}$, *выполняется в слабом смысле неравенство*

$$x_2 \mathrm{B} x_2 \le 0,$$

то D *имеет a-параболический тип в бесконечно бесконечно удаленной точке.*

Доказательство. Имеем $\theta^{\#}(z) = (-a_{12}(z), a_{11}(z))$ и

$$a_{11} + a(z, \theta^{\#}) = a_{11} + a_{11}a_{12}^2 - 2a_{12}^2 a_{11} + a_{22}a_{11}^2 = a_{11} - a_{12}^2 a_{11} + a_{22}a_{11}^2 = a_{11}(1 + \delta).$$

С учетом оценки 1) предыдущего пункта и условия (20) получаем нужное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алхутов, Ю. А. L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка / Ю. А. Алхутов // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 1. — С. 3–20.

2. Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 134 с.

3. Белинский, П. П. Общие свойства квазиконформных отображений / П. П. Белинский. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1974. — 100 с.

4. Волковыский, Л. И. Квазиконформные отображения / Л. И. Волковыский. — Львов : Издательство Львовского университета, 1954. — 156 с.

5. Гольдштейн, В. М. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. — М. : Наука, 1983. — 284 с.

6. Жуков, В. А. Об одном доказательстве теоремы о существовании полного дифференциала функций класса W_p^1 / В. А. Жуков // Тр. Томск. ун-та. Сер. механика, математика. — 1966. — Т. 189. — С. 13–17.

7. Зубанкова, К. А. Об асимптотическом поведении решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях / К. А. Зубанкова, Е. А. Мазепа, Н. М. Полубоярова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2023. — Т. 26, № 4. — С. 18–30.

8. Условия параболического и гиперболического типов непараметрической поверхности / В. М. Кесельман, Т. Р. Игонина, О. Ю. Козлова, О. Р. Параскевопуло // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 3. — С. 27–37.

9. Кондрашов, А. Н. Об одном признаке параболичности римановой метрики на плоскости / А. Н. Кондрашов // Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика. — 1999. — № 4. — С. 13–19.

10. Кондрашов, А. Н. Граничные классы некомпактных римановых многообразий и метод Перрона / А. Н. Кондрашов // Функц. анализ и его прил. — 2025. — Т. 59, № 2. — С. 74–111.

11. Ландис, Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.

12. Лосев, А. Г. Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2024. — Т. 27, № 3. — С. 6–14.

preprint

13. Миклюков, В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Матем. сб. — 1979. — Т. 108(150), № 2. — С. 268–289.

14. Миклюков, В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей / В. М. Миклюков // Изв. РАН. Сер. мат. — 1996. — Т. 60, № 4. — С. 111–158.

15. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с. 2-е изд., перераб.

16. Миклюков, В. М. О некоторых признаках существования полного дифференциала / В. М. Миклюков // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, № 4. — С. 805–814.

17. Оссерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Оссерман // УМН. — 1967. — Т. 22, № 4. — С. 55–136.

18. Сычев, А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения / А. В. Сычев. — Новосибирск : Наука, 1983. — 152 с.

19. Суворов, Г. Д. Семейства плоских топологических отображений / Г. Д. Суворов. — Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1965. — 265 с.

20. Зорич, В. А. О конформном типе риманова многообразия / В. А. Зорич, В. М. Кессельман // Функ. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 2. — С. 40–55.

21. Ahlfors, L. Sur le type d'une surface de Riemann / L. Ahlfors // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. — 1935. — Vol. 201. — P. 30–32.

22. Astala, K. Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane / K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin. — Princeton : Princeton University Press, 2008. — 696 p.

23. Finn, R. On equations of minimal surface type / R. Finn // Ann. of Math. — 1954. — Vol. 60, № 3. — P. 397–416.

24. Gehring, F. W. On the total differentiability of functions of a complex variable / F. W. Gehring, O. Lehto // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. A I. — 1959. — Vol. 272. — P. 3–9.

25. Heinonen, J. Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations / J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio. — New York : Clarendon Press, 1993. — 404 p.

26. Hildebrandt, S. Liouville theorems for harmonic mappings and approach to Bernstein theorems / S. Hildebrandt // Ann. Math. Stud. — 1982. — Vol. 102. — P. 107–131.

27. Malý, J. Absolutely continuous functions of several variables / J. Malý // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 231. — P. 492–508.

28. Malý, J. Sufficient conditions for change of variables in integral / J. Malý // Vodop'yanov, S. K. (ed.), Proceedings on analysis and geometry. International conference in honor of the 70th birthday of Professor Yu. G. Reshetnyak. — Novosibirsk : Russia, August 30-September 3, 1999. Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta Matematiki Im. S. L. Soboleva SO RAN., 2000. — P. 370–386.

29. Milnor, J. On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic / J. Milnor // Amer. Math. Monthly. — 1977. — Vol. 84, № 1. — P. 43–46.

30. Yau, S. T. Nonlinear analysis in geometry / S. T. Yau // L'Enseignement Mathématique. — 1987. — Vol. 33. — P. 109–158.

REFERENCES

1. Alkhutov Yu.A. L_p-Estimates of the Solution to the Dirichlet Problem for Second-Order Elliptic Equations. *Mat. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1998, vol. 189, no. 1, pp. 3-20.

2. Alfors L. Lectures on Quasiconformal Mappings. Moscow, Mir, 1969. 134 p.

3. Belinskiy P.P. General Properties of Quasiconformal Mappings. Novosibirsk, Nauka. Sibirsk. Otdel., 1974. 100 p.

4. Volkovyskiy L.I. Quasiconformal Mappings. Lvov, Lviv University Press, 1954. 156 p.

preprint

5. Goldshteyn V.M., Reshetnyak Yu.G. Introduction to the Theory of Functions with Generalized Derivatives and Quasiconformal Mappings. Moscow, Nauka, 1983. 284 p.

6. Zhukov V.A. On One Proof of the Theorem on the Existence of a Total Differential for Functions of Class W_p^1. *Tr. Tomsk. un-ta. Ser. mekhanika, matematika* [Proceedings of Tomsk University. Series: Mechanics, Mathematics], 1966, vol. 189, pp. 13-17.

7. Zubankova K.A., Mazepa E.A., Poluboyarova N.M. On the Asymptotic Behavior of Solutions of the Stationary Schrödinger Equation on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2023, vol. 26, no. 4, pp. 18-30.

8. Keselman V.M., Igonina T.R., Kozlova O.Yu., Paraskevopulo O.R. TRANSLATE TITLE INTO ENGLISH. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie*, 2024, vol. 27, no. 3, pp. 27-37.

9. Kondrashov A.N. On a Criterion of Parabolicity for a Riemannian Metric on the Plane. *Vestnik VolGU. Seriya 1: Matematika. Fizika* [Bulletin of Volgograd State University. Series 1: Mathematics. Physics], 1999, no. 4, pp. 13-19.

10. Kondrashov A.N. Boundary Classes of Non-Compact Riemannian Manifolds and Perron's Method. *Funkts. analiz i ego pril.* [Functional Analysis and Its Applications], 2025, vol. 59, no. 2, pp. 74-111.

11. Landis E.M. Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Types. Moscow, Nauka, 1971. 288 p.

12. Losev A.G. Harmonic Potentials on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 3, pp. 6-14.

13. Miklyukov V.M. On a New Approach to Bernstein's Theorem and Related Questions of Minimal Surface Type Equations. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1979, vol. 108(150), no. 2, pp. 268-289.

14. Miklyukov V.M. Some Criteria of Parabolicity and Hyperbolicity for Boundary Sets of Surfaces. *Izv. RAN. Ser. mat.* [Izvestiya: Mathematics], 1996, vol. 60, no. 4, pp. 111-158.

15. Miklyukov V.M. Introduction to Nonsmooth Analysis. Volgograd, VolSU Publ., 2008. 424 p.

16. Miklyukov V.M. On Some Criteria for the Existence of a Total Differential. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2010, vol. 51, no. 4, pp. 805-814. Translated in: Siberian Math. J., 51:4 (2010), 639–647

17. Osserman R. Minimal Surfaces. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1967, vol. 22, no. 4, pp. 55-136.

18. Sychev A.V. Moduli and Space Quasiconformal Mappings. Novosibirsk, Nauka, 1983. 152 p.

19. Suvorov G.D. Families of Plane Topological Mappings. Novosibirsk, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences Publ., 1965. 265 p.

20. Zorich V.A., Kesselman V.M. TRANSLATE TITLE INTO ENGLISH. *Funk. analiz i ego pril.*, 1996, vol. 30, no. 2, pp. 40-55.

21. Ahlfors L. Sur Le Type D'une Surface de Riemann. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 1935, vol. 201, pp. 30-32.

22. Astala K., Iwaniec T., Martin G. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*. Princeton, Princeton University Press, 2008. 696 p.

23. Finn R. On Equations of Minimal Surface Type. *Ann. of Math.*, 1954, vol. 60, no. 3, pp. 397-416.

24. Gehring F.W., Lehto O. On the Total Differentiability of Functions of a Complex Variable. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. A I*, 1959, vol. 272, pp. 3-9.

25. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*. New York, Clarendon Press, 1993. 404 p.

26. Hildebrandt S. Liouville Theorems for Harmonic Mappings and Approach to Bernstein Theorems. *Ann. Math. Stud.*, 1982, vol. 102, pp. 107-131.

27. Malý J. Absolutely Continuous Functions of Several Variables. *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, vol. 231, pp. 492-508.

preprint

28. Malý J. Sufficient conditions for change of variables in integral. *Vodop'yanov, S. K. (ed.), Proceedings on analysis and geometry. International conference in honor of the 70th birthday of Professor Yu. G. Reshetnyak*. Novosibirsk, Russia, August 30-September 3, 1999. Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta Matematiki Im. S. L. Soboleva SO RAN., 2000, pp. 370-386.

29. Milnor J. On Deciding Whether a Surface Is Parabolic Or Hyperbolic. *Amer. Math. Monthly*, 1977, vol. 84, no. 1, pp. 43-46.

30. Yau S.T. Nonlinear Analysis in Geometry. *L'Enseignement Mathématique*, 1987, vol. 33, pp. 109-158.

SOME RELATIONS THAT ENSURE THE PARABOLICITY OF THE TYPE

Alexander N. Kondrashov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
ankondr@mail.ru, alexander.kondrashov@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1614-0393
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract.

This paper investigates sufficient conditions for the parabolicity type of the domain $\mathbb{R}^2 \setminus K$, where K is a compact set, with respect to a general variational functional I_Φ. A known criterion for the conformal parabolicity of a Riemannian metric requires that the coordinate functions be harmonic. We significantly generalize this result by establishing new differential, rather than modul-capacitary, conditions for Φ-parabolicity at infinity. The work introduces and studies a special class of differential 1-forms, $\Lambda^{\mathrm{qc}}_{x_2}(D)$, which generate quasiconformal mappings used to construct appropriate mapping functions. The main results, formulated as Theorems 1 and 2, provide verifiable criteria involving the interplay between the functional Φ, a form Ψ of parabolic type, and auxiliary differential forms θ and ω. These criteria are expressed via the essential boundedness of certain quantities, such as $\mathcal{V}_{\theta,\Phi,\Psi}$, and differential inequalities involving the Hodge operator. The proofs leverage techniques from quasiconformal mapping theory, potential theory (including Perron's method), and the calculus of variations. A key corollary generalizes the harmonic coordinate condition to the case of quadratic functionals associated with uniformly elliptic operators in divergence form. The obtained conditions are shown to be checkable in specific model situations.

Key words: parabolicity type, variational capacity, quasiconformal mappings, elliptic operators, Perron's method.

preprint