МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА – ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАД ПОЛОСООБРАЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ

Акопян Рипсиме Сергоевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Волгоградского государственного аграрного университета
akrim111@yandex.ru
Проспект Университетский, 26, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена асимптотическому поведению минимальных поверхностей. Получены оценки возможного предельного поведения гауссовой кривизны минимальных поверхностей, заданных над полосообразной областью.

Ключевые слова: уравнения минимальных поверхностей, полосообразная область, гауссова кривизна, асимптотическое поведение, голоморфные функции.

Различные задачи асимптотического поведения минимальных поверхностей изучались во многих работах (см., например: [1–3; 5; 6; 8–11]), в том числе рассматривались вопросы допустимой скорости стабилизации и теоремы Фрагмена – Линделефа.

1. Пусть $z = f(x, y) - C^2$ – решение уравнения минимальных поверхностей

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'_x(x,y)}{\sqrt{1+\left|\nabla f(x,y)\right|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_y(x,y)}{\sqrt{1+\left|\nabla f(x,y)\right|^2}}\right)=0, \qquad (1)$$

заданное над областью $\Pi = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < +\infty, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\}$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\theta(x), \varphi_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\theta(x),$ $\varphi(x), \theta(x)$ – непрерывно дифференцируемые при $x > 0$ функции, удовлетворяющие условиям:

$$\theta(x) > 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \theta'(x) = 0 .$$

Символами $\partial'\Pi$ и $\partial''\Pi$ обозначим участки границы $\partial\Pi$:

$$\partial'\Pi = \partial\Pi \cap \{(x,y) \in R^2 : x = 0\}, \quad \partial''\Pi = \partial\Pi \setminus \partial'\Pi.$$

Предположим, что решение $f(x,y) \in C^1(\overline{\Pi})$ и удовлетворяет на границе $\partial''\Pi$ следующему условию:

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial''\Pi} = f_x'(x,y) \cdot n_x + f_y'x,y) \cdot n_y = 0, \tag{2}$$

где $n = (n_x, n_y)$ – внешняя нормаль.

На вертикальном участке $\partial'\Pi$ границы решение произвольно.

Для любого $x > 0$ введем в рассмотрение величину

$$\mu(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{1 + f_y'^2(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}}\, dy.$$

Заметим, что уравнение минимальных поверхностей (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1 + f_y'^2(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_x'(x,y) f_y'(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}}\right) = 0, \tag{3}$$

(см., например, [7]).

Возьмем $x_2 > x_1 > 0$ произвольным образом. Используя граничное условие (2) и соотношение (3), можно получить следующее равенство [1]

$$\mu(x_2) - \mu(x_1) =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (1 + \varphi_2'^2(x)) f_x'^2(x, \varphi_2(x))}\, \varphi_2'(x) dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (1 + \varphi_1'^2(x)) f_x'^2(x, \varphi_1(x))}\, \varphi_1'(x) dx. \tag{4}$$

2. Комплекснозначную функцию $h(x,y) = h_1(x,y) + ih_2(x,y)$ называют голоморфной в метрике поверхности, если она удовлетворяет системе уравнений Бельтрами в метрике этой поверхности [12, p. 10]. В случае графиков решений (1) эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{f_x'(x,y) f_y'(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) - \frac{1 + f_x'^2(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1 + f_y'^2(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) - \frac{f_x'(x,y) f_y'(x,y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y).$$

Зафиксируем произвольно точку $(x_0, y_0) \in \overline{\Pi}$ и введем в рассмотрение однозначную в $\overline{\Pi}$ функцию $v(x,y)$, существование которой следует из соотношения (3),

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{f_x'(t,s) f_y'(t,s)}{\sqrt{1 + |\nabla f(t,s)|^2}}\, dt + \frac{1 + f_y'^2(t,s)}{\sqrt{1 + |\nabla f(t,s)|^2}}\, ds. \tag{5}$$

Известно, что отображение $w = u + iv$, где $u = x$, $v = v(x, y)$,
является голоморфным в метрике поверхности $z = f(x, y)$ и осуществляет введение на графике изотермических координат (u, v) [7]. Подынтегральное дифференциальное выражение (5) обозначим через dv.

Рассмотрим отображение $w(x, y)$ на границе $\partial''\Pi$. Будем иметь:

$$v(x,\varphi_1(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,\varphi_1(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi_1(x_0))} dv + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi_1'^2(x))f_x'^2(x,\varphi_1(x))}\varphi_1'(x)dx,$$

$$v(x,\varphi_2(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,\varphi_2(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi_2(x_0))} dv + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi_2'^2(x))f_x'^2(x,\varphi_2(x))}\varphi_2'(x)dx.$$

Таким образом, используя равенство (4), получим

$$v(x,\varphi_2(x)) - v(x,\varphi_1(x)) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{1+f_y'^2(x,y)}{\sqrt{1+\left|\nabla f(x,y)\right|^2}}\, dy = \mu(x).$$

Обозначим $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}(v(x,\varphi_2(x)) + v(x,\varphi_1(x)))$.

Отображение $w(x, y)$ есть диффеоморфизм $\overline{\Pi}$ на $\overline{\Pi}_w$ [2]:

$$\Pi_w = \left\{(u,v) \in R^2 : 0 < u < +\infty, \Phi_1(u) < v < \Phi_2(u)\right\},$$

где $\Phi_1(u) = \Phi(u) - \dfrac{1}{2}\mu(u)$, $\Phi_2(u) = \Phi(u) + \dfrac{1}{2}\mu(u)$. Причем для непрерывно дифференцируемых при $u > 0$ функций $\Phi(u)$, $\mu(u)$ будут выполнены условия: $\mu(u) > 0$, $\lim\limits_{u\to+\infty} \Phi'(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} \mu'(u) = 0$.

Если функция $h(x, y)$ голоморфна в метрике поверхности $f(x, y)$, то сложная функция $h(x(u,v), y(u,v))$ будет голоморфной в области Π_w в традиционном понимании. Здесь $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – отображение, обратное к отображению $w(x, y)$.

Пользуясь теоремами типа Фрагмена – Линделефа для функций, голоморфных в полосообразных областях (см.: [4, с. 223, 228]), сформулируем вспомогательную теорему. Обозначим

$$N(x) = \exp\{\pi \int\limits_0^x \frac{1+\Phi'^2(t)+\frac{1}{12}\mu'^2(t)}{\mu(t)} dt\}. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть функция* $h(x, y)$ – *голоморфна в метрике поверхности* $z = f(x, y)$ *в области* Π*, непрерывна и ограничена в ее замыкании и удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) $\dfrac{\log|h(x,y)|}{N(x)} \to -\infty$, $(x, y) \to \infty$, $(x, y) \in L$,

где L – кривая, начинающаяся в какой-либо конечной точке границы области Π *и идущая в бесконечность, оставаясь в области* Π*;*

б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\log|h(x,\varphi_1(x))h(x,\varphi_2(x))|}{N(x)\mu(x)} dx = -\infty$,

то $h(x, y) \equiv 0$.

Доказательство: а) пусть образом кривой L при отображении $w = u + iv$ является кривая L_w, лежащая в Π_w. Причем при $(x, y) \to \infty$, $(x, y) \in L$ для образов будет выполняться, что $(u, v) \to \infty$, $(u, v) \in L_w$. Тогда голоморфная в Π_w функция

$$\widetilde{h}(u, v) \equiv h(x(u, v), y(u, v))$$

непрерывна и ограничена в $\overline{\Pi}_w$ и удовлетворяет условию

$$\frac{\log\left|\widetilde{h}(u, v)\right|}{N(u)} \equiv \frac{\log\left|h(x(u, v), y(u, v))\right|}{N(u)} \equiv \frac{\log\left|h(x, y)\right|}{N(x)} \to -\infty,$$

при $(u, v) \to \infty$, $(u, v) \in L_w$.

Таким образом, для голоморфной в полосообразной области Π_w функции $\widetilde{h}(u, v)$ оказываются справедливыми условия теоремы типа Фрагмена – Линделефа [4, с. 223], согласно которой $\widetilde{h}(u, v) \equiv 0$. Последнее возможно лишь в случае, когда $h(x, y) \equiv 0$ в области Π;

б) ясно, что

$$\widetilde{h}(u, \Phi_1(u)) \equiv h(x(u, \Phi_1(u)), y(u, \Phi_1(u))) \equiv h(x, \varphi_1(x)),$$

$$\widetilde{h}(u, \Phi_2(u)) \equiv h(x(u, \Phi_2(u)), y(u, \Phi_2(u))) \equiv h(x, \varphi_2(x))$$

и

$$\int_0^\infty \frac{log\left|\widetilde{h}(u, \Phi_1(u))\widetilde{h}(u, \Phi_2(u))\right|}{N(u)\mu(u)} du = \int_0^\infty \frac{log\left|h(x, \varphi_1(x))h(x, \varphi_2(x))\right|}{N(x)\mu(x)} dx = -\infty.$$

Таким образом, голоморфная в Π_w функция $\widetilde{h}(u, v)$ удовлетворяет всем условиям известной теоремы [там же, с. 228], согласно которой $\widetilde{h}(u, v) \equiv 0$. Следовательно, $h(x, y) \equiv 0$ в области Π.

Теорема доказана.

3. Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\chi(x, y) = \frac{f'_x(x, y)}{1 + \sqrt{1 + \left|\nabla f(x, y)\right|^2}} - i\frac{f'_y(x, y)}{1 + \sqrt{1 + \left|\nabla f(x, y)\right|^2}}.$$

Известно [12, p. 113], что данная функция является голоморфной в метрике минимальной поверхности $z = f(x, y)$. Введем функцию

$$g(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{1 + f'^2_x(t, s)}{\sqrt{1 + \left|\nabla f(t, s)\right|^2}} dt + \frac{f'_x(t, s) f'_y(t, s)}{\sqrt{1 + \left|\nabla f(t, s)\right|^2}} ds.$$

Известно (см.: [ibid.]), что через производную голоморфной в метрике поверхности функции $\chi(x, y)$ по параметру $\varsigma = \xi + i\eta$, где $\xi = x + g(x, y)$, $\eta = y + v(x, y)$, выражается гауссова кривизна $K(x, y)$, причем

$$\left|\chi'_\varsigma(x, y)\right|^2 = \frac{-K(x, y)(1 + \left|\nabla f(x, y)\right|^2)^2}{(1 + \sqrt{1 + \left|\nabla f(x, y)\right|^2})^4} \le -K(x, y). \qquad (7)$$

Используя теорему 1 для голоморфной в метрике поверхности функции $\chi'_\varsigma(x,y)$, выводим, что для гауссовой кривизны минимальной поверхности $K(x,y)$ будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $L-$*кривая, начинающаяся в какой-либо конечной точке границы области* Π *и идущая в бесконечность, оставаясь в области* Π.

Если $K(x,y)$ *ограничена в* $\overline{\Pi}$ *и* $\dfrac{\log(-K(x,y))}{N(x)} \to -\infty, \quad x \to +\infty, \quad (x,y) \in L,$ *то* $f(x,y)-$ *линейная функция.*

Доказательство. Имеем, что $\chi'_\varsigma(x,y)-$ голоморфна в метрике поверхности $f(x,y)$, а также ограничена в $\overline{\Pi}$, что следует из (7) и ограниченности $K(x,y)$, причем

$$\frac{\log\left|\chi'_\varsigma(x,y)\right|}{N(x)} \le \frac{\log(-K(x,y))}{N(x)} \to -\infty, \qquad x \to +\infty, \quad (x,y) \in L, .$$

Таким образом, используя теорему 1 (случай а)) для функции $\chi'_\varsigma(x,y)$, заключаем, что $\chi'_\varsigma(x,y) \equiv 0$. Следовательно, из (7) получаем, что $K(x,y) \equiv 0$ и $f(x,y)$ есть линейная функция.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $K(x,y)$ *ограничена в* Π *и непрерывна в ее замыкании и, кроме того, удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty \frac{\log\left|K(x,\varphi_1(x))K(x,\varphi_2(x))\right|}{N(x)\mu(x)}dx = -\infty,$$

то $f(x,y)-$ *линейная функция.*

Доказательство. Имеем, что для функции $\chi'_\varsigma(x,y)$ выполнены все условия теоремы 1 (случай б)), причем

$$\int_0^\infty \frac{\log\left|\chi'_\varsigma(x,\varphi_1(x))\chi'_\varsigma(x,\varphi_2(x))\right|}{N(x)\mu(x)}dx \le \int_0^\infty \frac{\log\left|K(x,\varphi_1(x))K(x,\varphi_2(x))\right|}{N(x)\mu(x)}dx = -\infty, .$$

Следовательно, $\chi'_\varsigma(x,y) \equiv 0$. Тогда $K(x,y) \equiv 0$ и $f(x,y)$ есть линейная функция.

Теорема доказана.

Аналогичные результаты о допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны рассмотренной выше минимальной поверхности были получены в [1]. Частный случай минимальных поверхностей, заданных над полуполосой, представлен в работах [2–3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. О допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности над полосообразной областью / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2012. – № 2. – С. 4–8.

2. Акопян, Р. С. Теоремы типа Фрагмена – Линделефа для минимальной поверхности над полуполосой / Р. С. Акопян // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2001. – № 6. – С. 65–75.

3. Акопян, Р. С. Условия стабилизация минимальной поверхности над полуполосой / Р. С. Акопян // Докл. РАН. – 1999. – № 368 (5). – С. 583–585.

4. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

5. Миклюков, В. М. Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Граничные задачи математической физики. – Киев : Наукова Думка, 1983. – С. 137–146.

6. Миклюков, В. М. Об одном новом подходе к теореме Берштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей / В. М. Миклюков // Мат. сб. – 1979. – № 108 (2). – С. 263–289.

7. Осерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Осерман // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. XXII, № 4. – С. 55–136.

8. Пелих, В. И. Теоремы Фрагмена – Линделефа на минимальных поверхностях / В. И. Пелих // Геометрический анализ и его приложения: Научные школы Волгоградского государственного университета. – 1999. – № 1. – С. 352–368.

9. Collin, P. Le Problème de Dirichlet pour lequation des surfaces minimales sur des domains non bornès / P. Collin and R. Krust // Bull. Soc. Math. France. – 1991. – № 199. – С. 443–462.

10. Hwang, J. F. A uniqueness theorem for the minimal surface equation / J. F. Hwang // Pacific J. of Math. – 1996. – № 176 (2). – С. 357–365.

11. Langevin, R. A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications / R. Langevin and H. Rosenberg // Duke Math. J. – 1988. – № 57 (3). – С. 819–828.

12. Nitsche, J. C. C. Vorleungen über Minimalflächen / J. C. C. Nitsche. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1975.

REFERENCES

1. Akopjan R. S. *O dopustimoj skorosti stremlenija k nulju gaussovoj krivizny minimal'noj poverhnosti nad polosoobraznoj oblast'ju* [About the permissible speed of convergence to zero Gaussian curvature of a minimal surface area of strip-]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 2, pp. 4–8.

2. Akopjan R. S. *Teoremy tipa Fragmena – Lindelefa dlja minimal'noj poverhnosti nad polupolosoj* [Theorem Phragmen – Lindel of for minimal surface over a half-strip]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2001, no. 6, pp. 65–75.

3. Akopjan R. S. *Uslovija stabilizacija minimal'noj poverhnosti nad polupolosoj* [Terms of stabilization of a minimal surface over a half-strip]. *Doklady RAN*, 1999, no. 368 (5), pp. 583–585.

4. Evgrafov M. A. *Asimptoticheskie ocenki i celye funkcii* [Asymptotic estimates and entire functions]. Moscow, Science, 1979, 320 p.

5. Mikljukov V. M. *Nekotorye voprosy kachestvennoj teorii uravnenij tipa minimal'noj poverhnosti* [Some problems of the qualitative theory of equations of minimal surface]. Boundary value problems of mathematical physics, Kiev, Naukova Dumka, 1983, pp. 137–146.

6. Mikljukov V. M. *Ob odnom novom podhode k teoreme Bershtejna i blizkim voprosam uravnenij tipa minimal'nyh poverhnostej* [On a new approach to Bernstein's theorem and related questions for equations of minimal surface]. *Mat. Sb.*, 1979, no. 108 (2), pp. 263–289.

7. Oserman R. *Minimal'nye poverhnosti* [Minimal surfaces]. *Uspehi mat. nauk*, 1967, vol. XXII, no. 4, pp. 55–136.

8. Pelih V. I. *Teoremy Fragmena – Lindelefa na minimal'nyh poverhnostjah* [Phragmen – Lindelof on minimal surfaces]. *Geometricheskij analiz i ego prilozhenija: Nauchnye shkoly Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1999, no. 1, pp. 352–368.

9. Collin, P., Krust, R. Le Problème de Dirichlet pour lequation des surfaces minimalessur des domains non bornès. Bull. Soc. Math. France, 1991, no. 199, pp. 443–462.

10. Hwang, J. F. A uniqueness theorem for the minimal surface equation. Pacific J. of Math., 1996, no. 176 (2), pp. 357–365.

11. Langevin R., Rosenberg R. A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications. Duke Math. J., 1988, no. 57 (3), pp. 819–828.

12. Nitsche, J. C. C. Vorleungenüber Minimalflächen. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1975.

FRAGMÉN – LINDELОF TYPE THEOREMS FOR THE MINIMAL SURFACE OVER STRIP DOMAIN

Akopyan Ripsime Sergoevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Further Mathematics
Volgograd State Agrarian University
akrim111@yandex.ru
Prospect Universitetsky, 26, 400002 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Estimations of possible asymptotic behavior of Gaussian curvature the minimal surfaces given over strip domain are received in this paper.

To research of solutions of equation of the minimal surfaces given over unbounded domains, many works (see, for example, [1–3; 5; 6; 8–11]) in which various tasks of asymptotic behavior of the minimal surfaces were studied, including questions of admissible speed of stabilization and theorem by Fragmen – Lindelef are devoted. As our object of research there are solutions of equation of the minimal surfaces given over strip domain and satisfying some zero boundary values. We use a traditional approach for the solution of a similar kind of tasks consisting in construction of auxiliary conformal mapping which appropriate properties are studied.

Let $z = f(x, y)$ be the C^2 – solution of the equation of minimal surfaces (1) given over strip domain $\Pi = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < +\infty, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$, where $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\theta(x), \varphi_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\theta(x)$, $\varphi(x), \theta(x) -$ continuously differentiable when $x > 0$ functions, satisfying the conditions: $\theta(x) > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \theta'(x) = 0$.

Let us denote by the symbols $\partial'\Pi$ and $\partial''\Pi$ sectors of the boundary $\partial\Pi$:

$$\partial'\Pi = \partial\Pi \cap \{(x, y) \in R^2 : x = 0\}, \quad \partial''\Pi = \partial\Pi \setminus \partial'\Pi.$$

Assume that the solution $f(x, y) \in C^1(\overline{\Pi})$ and satisfies the condition (2).

The following theorem is valid for the Gaussian curvature of minimal surfaces $K(x, y)$. Let $N(x)$ is determined by the formula (6).

Theorem. *Let $L-$ curve starting at any endpoint of the border domain Π and going to infinity, remains in Π .*

If $K(x, y)$ is bounded in $\overline{\Pi}$, and

$$\frac{\log(-K(x, y))}{N(x)} \to -\infty, \qquad x \to +\infty, \quad (x, y) \in L,$$

then $f(x, y)$ is a linear function.

Similar results of the speed of approach to zero of Gaussian curvature considered above the minimal surface were obtained in [1]. The special example of minimal surfaces, defined over a semistrip, was presented in [2; 3].

Key words: equations of the minimal surfaces, strip domain, Gaussian curvature, asymptotic behavior, holomorphic functions.