УДК 514.75
ББК 22.151

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОЧТИ *ARG*-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Бодренко

В статье исследуется задача продолжения бесконечно малых почти ARG-деформаций поверхностей в аналитические деформации того же типа в евклидовых пространствах.

Ключевые слова: *деформация поверхности, средняя кривизна, G-деформация, бесконечно малая деформация, аналитическая деформация.*

Введение

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^{n+1}, $n > 1$, замкнутую ориентируемую гиперповерхность F. Введем в E^{n+1} декартову прямоугольную систему координат $(y^1, ..., y^{n+1})$. Обозначим через $\vec{r} = \vec{r}\ (M), M \in F$, радиус-вектор поверхности F, $\vec{n} = \vec{n}\ (M)$ — единичный вектор нормали к поверхности F в точке M. Пусть на F задана последовательность векторных полей $\vec{z}_{(k)} = \vec{z}_{(k)}\ (M), M \in F, \forall k \in \mathbb{N}$, функция $\gamma = \gamma(M), M \in F$. Пусть дано число $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел.

Определение 1. *Деформация $\{F^\varepsilon\}$ гиперповерхности F, определяемая уравнением:*

$$F^\varepsilon : \vec{r}^{\,\varepsilon}\ (M) = \vec{r}\ (M) + \vec{z}_{(1)}\ (M)\varepsilon, \forall M \in F,$$

где ε — параметр деформации; $\vec{r}^{\,\varepsilon}$ — радиус-вектор поверхности F^ε, называется бесконечно малой почти ареально-рекуррентной G-деформацией (коротко почти ARG-деформацией), если выполнены условия:

1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F удовлетворяет соотношению: $\delta(d\sigma) = Hn(\lambda c_{(1)} + \gamma)d\sigma$, где λ называется коэффициентом рекуррентности деформации, $H = H(M), M \in F-$ средняя кривизна F в точке M, $c_{(1)} = <\vec{z}_{(1)}, \vec{n}>$, $< .,. > -$ скалярное произведение в E^{n+1};

2) рассматриваемая деформация является G-деформацией (см. [2]), то есть при деформации сохраняется грассманов образ гиперповерхности F в том смысле, что касательные плоскости переносятся параллельно.

Определение 2. *Деформация $\{F_\varepsilon\}$ гиперповерхности F, определяемая уравнением:*

$$F_\varepsilon : \vec{r}_\varepsilon\,(M) = \vec{r}\,(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \vec{z}_{(k)}\,(M)\varepsilon^k, \forall M \in F, \varepsilon \in [0,1), \tag{1}$$

называется аналитической почти ARG-деформацией, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z^\alpha_{(k)}\varepsilon^k, \alpha = \overline{1, n+1}$, где через $z^\alpha_{(k)}$ обозначены компоненты вектора $\vec{z}_{(k)}$ во введенной системе координат в E^{n+1}, сходятся на промежутке $\varepsilon \in [0,1)$ и выполнены условия:

1) изменение $\Delta_\varepsilon(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ гиперповерхности F удовлетворяет соотношению:

$$\Delta_\varepsilon(d\sigma) = Hn(\lambda c_\varepsilon + \gamma\varepsilon)d\sigma, \tag{2}$$

где $c_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_{(k)}\varepsilon^k$, $c_{(k)} = <\vec{z}_{(k)}, \vec{n}>$;

2) рассматриваемая деформация является G-деформацией в указанном выше смысле.

В [7] исследовались свойства бесконечно малых ARG-деформаций, в [1] и [9] изучались свойства непрерывных почти ARG-деформаций. Известна проблема продолжения бесконечно малых изгибаний в аналитические ([5]), состоящая в следующем. Для всякого ли поля бесконечно малого изгибания $\vec{z}_{(1)}$ поверхности можно указать поля $\vec{z}_{(2)}, \vec{z}_{(3)}, \ldots$ такие, чтобы деформация вида (1) определяла аналитические изгибания поверхности? В такой постановке эта задача нашла положительное решение для некоторых классов поверхностей, например, в работах [4] и [3]. Поэтому естественно возникает вопрос о постановке аналогичной задачи для почти ARG-деформаций: при каких условиях бесконечно малая почти ARG-деформация допускает продолжение в аналитическую почти ARG-деформацию? Исследованию этой задачи посвящена настоящая статья.

Рассмотрим евклидово пространство E^n. Введем в E^n декартову прямоугольную систему координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим $C^{k,\nu}(\overline{D}), k \geq 0, 0 < \nu < 1,-$ пространство Гельдера, где D — открытый шар в E^n, с центром в начале координат, радиуса 1. Функция f, определенная на D, принадлежит классу $C^{k,\nu}(\overline{D})$ (см. [6]), если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно и конечное значение величины:

$$||f||_{(D)k,\nu} = \sum_{|i|=0}^{k} \sup_{x\in D} |\partial^{|i|} f(x)| + \sum_{|i|=k} \sup_{x_1,x_2\in D} \frac{|\partial^{|i|} f(x_1) - \partial^{|i|} f(x_2)|}{||x_1 - x_2||^\nu}.$$

Символ $\partial^{|i|} f(x)$ означает частную производную функции $f(x)$ вида $\frac{\partial^{|i|} f(x)}{\partial^{i_1} x^1 \ldots \partial^{i_n} x^n}$, где $|i| = i_1 + \ldots + i_n$ — порядок производной. Для $x \in E^n$ использовано обозначение $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2)^{1/2}$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты точки x.

Определение 3. *Конечная совокупность $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ карт F, с координатными окрестностями U_i и координатными отображениями h_i, называется допустимым атласом класса $C^{k,\nu}$ поверхности F, если:*

1) семейство множеств $\{(U_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ образует открытое покрытие F;

2) h_i есть гомеоморфизм U_i на $\overline{D}$;

3) обратное отображение $h_i^{-1}(x) \equiv (f^1(x), ..., f^{n+1}(x)), x \in D$, *удовлетворяет условию* $f^\alpha \in C^{k,\nu}(\overline{D}), \alpha = \overline{1, n+1}$;

4) при $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *отображение* $h_j \circ h_i^{-1}$ *есть диффеоморфизм гладкости* k *множества* $h_i(U_i \cap U_j)$ *на* $h_j(U_i \cap U_j)$.

Пусть F имеет допустимый атлас $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ класса $C^{3,\nu}$. На поверхности F рассмотрим пространство Гельдера $C^{p,\nu}(F), p \geq 0$.

Определение 4. *Функция* f, *определенная на* F, *принадлежит классу* $C^{p,\nu}(F)$, *если* $f \circ h_i^{-1} \in C^{p,\nu}(\overline{D}) \forall i = \overline{1, N}$. *Норму в пространстве* $C^{p,\nu}(F)$ *определяем так:* $\| f \|_{p,\nu(F)} \|_{p,\nu(F)} = \max_i \| f \circ h_i^{-1} \|_{p,\nu(D)}$.

Пусть $\gamma \in C^{0,\nu}(F)$. Будем говорить, что поверхность F допускает аналитические почти ARG-деформации в классе $C^{l,\nu}, l \geq 0$, если $z^\alpha_{(k)} \in C^{l,\nu}(F), \alpha = \overline{1, n+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Пусть F не имеет действительных асимптотических направлений. Тогда, не нарушая общности, ориентируем поверхность F единичным вектором нормали $\vec{n}$ так, чтобы ее средняя кривизна H была положительной.

Теорема 1. *Для гиперповерхности* F *существует не более чем счетное множество действительных чисел* $\Lambda = \{\lambda_s, s = 1, 2, ... : -1 = \lambda_1 < \lambda_2 < ...\}$, *не имеющее конечных предельных точек, такое, что при* $\lambda \notin \Lambda$ *верны утверждения:*

1) гиперповерхность F *допускает единственную бесконечно малую почти ARG-деформацию с коэффициентом рекуррентности* λ, *в классе* $C^{1,\nu}$;

2) существует такое число $M > 0$, *зависящее от поверхности* F, *ее допустимого атласа, чисел* ν, n, λ, *что если функция* γ *удовлетворяет условию* $\|\gamma\|_{(F)0,\nu} < M$, *то гиперповерхность* F *допускает единственное продолжение бесконечно малой почти ARG-деформации в аналитическую деформацию того же типа, с коэффициентом рекуррентности* λ, *в классе* $C^{1,\nu}$.

1. Вывод уравнений почти *ARG*-деформаций

Пусть (U, h) — произвольная карта допустимого атласа $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ поверхности F. Тогда F локально задается системой уравнений

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, ..., x^n), (x^1, ..., x^n) \in D, f^\alpha \in C^{3,\nu}(\overline{D}), \alpha = \overline{1, n+1}.$$

Будем пользоваться обозначениями, предложенными в книге [8]. Пусть $y^\alpha_\varepsilon, y^\alpha, n^\alpha$ — компоненты векторов $\vec{r}_\varepsilon, \vec{r}, \vec{n}$ во введенной системе координат в E^{n+1}, соответственно. Положим

$$z^\alpha_{(k)} = a^i_{(k)} y^\alpha_{,i} + c_{(k)} n^\alpha, \alpha = \overline{1, n+1}, \forall k \in \mathbb{N},$$

где $c_{(k)} = c_{(k)}(M), a^i_{(k)} = a^i_{(k)}(M)$ — неизвестные функции, знак i" означает ковариантную производную по переменной x^i в метрике гиперповерхности.

Обозначим через g_{ij}— метрический тензор гиперповерхности F, b_{ij}— тензор второй основной формы гиперповерхности F. Получим

$$z^\alpha_{(k)},_j = (a^i_{(k)},_j - c_{(k)} b_{jm} g^{mi}) y^\alpha,_i + (a^i_{(k)} b_{ij} + c_{(k)},_j) n^\alpha. \tag{3}$$

Так как F не имеет действительных асимптотических направлений и ориентирована так, что ее средняя кривизна H положительна, то ее вторая основная форма положительно определена. Обозначим через $\tilde{b}^{ij}$ тензор, обратный тензору b_{ij}, то есть удовлетворяющий условию $\tilde{b}^{ij} b_{kj} = \delta^i_k$, где δ^i_k — символы Кронекера. Тогда получим, что условие сохранения грассманова образа имеет вид:

$$a^i_{(k)} = -\tilde{b}^{ij}\partial_j c_{(k)}, i = \overline{1,n}, \forall k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где символ ∂_j означает частную производную по переменной x^j.

Условие (2) эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\delta^k g = 2\lambda n H c_{(k)} g + T_{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где $g = det\|g_{ij}\|, \delta^k g$ — вариация k-го порядка величины g при деформации $\{F_\varepsilon\}$, $T_{(1)} = 2nH\gamma g$,

$$T_{(k)} = (nH)^2 g(2\lambda\gamma c_{(k-1)} + \gamma^2 W_{(k-1)} + \lambda^2 \sum_{l=1}^{k-1} c_{(l)}c_{(k-l)}), k \geq 2, \tag{6}$$

где $W_{(1)} = 1, W_{(k)} = 0$ при $k \geq 2$.

Используя определение вариации k-го порядка, имеем:

$$\delta^k g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}(y^\alpha,_i z^\beta_{(k)},_j + y^\beta,_j z^\alpha_{(k)},_i) + Q_{(k)ij}, \forall k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $\delta_{\alpha\beta} = 1$, при $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$, при $\alpha \neq \beta$,

$$Q_{(1)ij} = 0, Q_{(k)ij} = \delta_{\alpha\beta} \sum_{l=1}^{k-1} z^\alpha_{(l)},_i z^\beta_{(k-l)},_j, k \geq 2. \tag{8}$$

Используя свойства определителя, выразим вариацию $\delta^k g$ через вариации элементов g_{ij}:

$$\delta^k g = 2gg^{ij}\delta_{\alpha\beta} y^\alpha,_i z^\beta_{(k)},_j + gg^{ij}Q_{(k)ij} + P_{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где для удобства введены следующие обозначения: $P_{(1)} = 0$,

$$P_{(k)} = \sum_{s=2}^{n} \sum_{I_s, J_s} (-1)^{sgn(I_s J_s)} M_{I_s J_s} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=k \\ l_1,\ldots,l_s \geq 1}} (\prod_{p=1}^{s} \delta^{l_p} g_{i_p j_p}), k \geq 2, \tag{10}$$

суммирование ведется по всевозможным размещениям индексов $I_s = (i_1, ..., i_s)$ и всевозможным сочетаниям индексов $J_s = (j_1, ..., j_s)$. Индексы $i_1, ..., i_s, j_1, ..., j_s$ могут принимать значения от 1 до n. Величина $M_{I_s J_s}$ есть минор $(n-s)$-го порядка матрицы $\|g_{ij}\|$, получающийся вычеркиванием из нее строк и столбцов с номерами $i_1, ..., i_s$ и $j_1, ..., j_s$, соответственно. $(-1)^{sgn(I_s J_s)}$ — знак, с которым входит в разложение определителя g слагаемое вида $M_{I_s J_s} \prod_{p=1}^{s} g_{i_p j_p}$.

Рассмотрим на F дифференциальный оператор L, записываемый в координатной форме в виде:

$$L = -\frac{1}{nH\sqrt{g}} \partial_k(\sqrt{g}\tilde{b}^{ik}\partial_i) + 1.$$

Учитывая формулы $nH = g^{im}b_{im}$, $\partial_i(\ln\sqrt{g}) = \Gamma^j_{ij}$, где Γ^k_{ij}— символы Кристоффеля гиперповерхности F в метрике g_{ij}, и полагая $\mu = \lambda + 2$, подставим (9) в (5). Получаем уравнения, описывающие аналитические почти ARG-деформации гиперповерхности F, с коэффициентом рекуррентности λ.

$$Lc_{(p)} = \mu c_{(p)} + (T_{(p)} - gg^{ij}Q_{(p)ij} - P_{(p)})/(2nHg), \forall p \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

где $T_{(p)}, Q_{(p)ij}, P_{(p)}$ определены формулами $(6), (8)$ и (10), с учетом формул $(3), (4)$ и (7).

Уравнение бесконечно малых почти ARG-деформаций гиперповерхности F описывается уравнением (11) при $p = 1$.

2. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Применяя результаты из [7] и [6], получим, что если поверхность F имеет допустимый атлас класса $C^{3,\nu}$, то существует не более чем счетное множество действительных чисел $\Pi = \{\mu_s, s = 1, 2, ... : 1 = \mu_1 < \mu_2 < ...\}$, не имеющее конечных предельных точек, такое, что при $\mu \notin \Pi$ операторное уравнение $Lf = \mu f + \varphi, \varphi \in$ $\in C^{0,\nu}(F)$ на F относительно неизвестной функции f имеет единственное решение класса $C^{2,\nu}(F)$. Положим $\Lambda = \{\lambda_s : \lambda_s = \mu_s - 2, s = 1, 2, ...\}$ и зафиксируем число $\lambda \notin \Lambda$. Тогда существует единственная бесконечно малая почти ARG-деформация с коэффициентом рекуррентности λ гиперповерхности F в классе $C^{1,\nu}$. Утверждение 1) теоремы доказано.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Построим последовательность полей деформаций $\{z^{\alpha}_{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ по функции $c_{(1)}$, которая является решением уравнения (11) при $p = 1$. Найдем поле деформации $z^{\alpha}_{(k)}, k \geq 2$, считая поля $z^{\alpha}_{(1)}...z^{\alpha}_{(k-1)}$ известными из уравнений (4) и (11) при $p = 1, 2, ..., k - 1$. Получим, что если функции $c_{(1)}, ..., c_{(k-1)}, k \geq 2$, принадлежат классу $C^{2,\nu}(F)$, то функции $T_{(k)}, Q_{(k)ij}, P_{(k)}$ определены и принадлежат классу $C^{0,\nu}(F)$. Последовательность искомых тензорных полей деформации $z^{\alpha}_{(k)}$ класса $C^{1,\nu}(F)$ построена.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in C^{2,\nu}(F)$ является решением уравнения $Lf = \mu f + \varphi$ при $\mu \neq 1, \varphi \in C^{0,\nu}(F)$. Тогда имеет место оценка: $\|f\|_{(F)2,\nu} \leq K_0 \|\varphi\|_{(F)0,\nu}$, где постоянная K_0 определяется поверхностью F, числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$.*

Доказательство. В силу вида оператора L имеет место неравенство Шаудера (см. [6]):

$$\|f \circ h_i^{-1}\|_{(D)2,\nu} \leq K_i(\|\varphi \circ h_i^{-1}\|_{(D)0,\nu} + \max_D |f \circ h_i^{-1}| + \|f \circ h_i^{-1}\|_{(\partial D)2,\nu}), i = \overline{1, N}.$$

Используя определения нормы в пространстве Гельдера (см. [6]), свойства атласа $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$ и тот факт, что поверхность F является замкнутой, получим

$$\|f \circ h_i^{-1}\|_{(\partial D)2,\nu} \leq M_0 \max_{j=\overline{1,N}} \|f \circ h_j^{-1}\|_{(D)2,\nu}, \forall i = \overline{1, N}.$$

При этом постоянные $M_0, K_i, i = \overline{1, N}$ определяются поверхностью F, числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$. Имеем неравенство ([6]):

$$\max_D |f \circ h_i^{-1}| \leq \max\Big(\max_{\partial D} |f \circ h_i^{-1}|; \max_D \frac{|\varphi \circ h_i^{-1}|}{|\mu - 1|}\Big).$$

Так как F — компакт, то $\exists M^* \in F : |f(M^*)| = \max_F |f|$. Значит, существует окрестность U_l такая, что $M^* \in U_l$. Но тогда получим оценку:

$$\max_D |f \circ h_i^{-1}| \leq \max_D |f \circ h_l^{-1}| \leq \max_D \frac{|\varphi \circ h_l^{-1}|}{|\mu - 1|}, \forall i = \overline{1, N}.$$

Используя приведенные выше неравенства, получим доказательство леммы 1.

Покажем, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z^{\alpha}_{(k)} \varepsilon^k, \alpha = \overline{1, n+1}$ сходятся на промежутке $\varepsilon \in [0, 1)$.

Для норм функций $c_{(k)}$ в пространстве $C^{2,\nu}(F)$, используя лемму, получим оценки:

$$\|c_{(1)}\|_{(F)2,\nu} \leq M_1 \|\gamma\|_{(F)0,\nu}, \|c_{(2)}\|_{(F)2,\nu} \leq M_2 \|\gamma\|^2_{(F)0,\nu},$$

$$\|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu} \leq K\Big(\frac{1}{2}\|\gamma\|_{(F)0,\nu}\|c_{k-1}\|_{(F)2,\nu} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1}\|c_{(l)}\|_{(F)2,\nu}\|c_{(k-l)}\|_{(F)2,\nu} +$$

$$+\sum_{s=2}^{n}\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=k\\ l_1,\ldots,l_s\geq 1}}\prod_{p=1}^{s}(\|c_{(l_p)}\|_{(F)2,\nu} + \sum_{l=1}^{l_p-1}\|c_{(l)}\|_{(F)2,\nu}\|c_{(l_p-l)}\|_{(F)2,\nu})\Big), k\geq 3.$$

При этом постоянные M_1, M_2, K определяются поверхностью F, числами μ, n, ν и атласом $\{(U_i, h_i)\}_{i=\overline{1,N}}$. Обозначим $q = \frac{4}{3}\pi^2$. Введем в рассмотрение новую постоянную S. Выберем постоянную S достаточно большой, удовлетворяющей неравенствам:

$$\frac{2SK+1}{(2SK)^2 q} < 1, \frac{(2SK+1)^2(q^n - q)}{S^3(2K)^2(q-1)} \leq 1, S > 1. \tag{12}$$

Пусть функция γ такова, что ее норма в пространстве $C^{0,\nu}(F)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\gamma\|_{(F)0,\nu} \leq \min\Big(1/(2M_1SKq), 1/(2SKq), 1/(\sqrt{8M_2SKq})\Big).$$

Покажем, что в этом случае нормы функций $c_{(p)}$ в пространстве $C^{2,\nu}(F)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\|c_{(p)}\|_{(F)2,\nu} \leq \frac{1}{2SKqp^2}, \forall p \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Очевидно, что нормы функций $c_{(1)}$ и $c_{(2)}$ в пространстве $C^{2,s}(F)$ удовлетворяют неравенству (13). Предположим, что это неравенство выполняется для $p = \overline{1, k-1}$, $k \geq 2$, покажем, что оно выполняется при $p = k$.

Используя метод математической индукции, проверяем верность следующего неравенства при $k \geq 2$ для $1 \leq s \leq k$:

$$\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=k\\ l_1,\ldots,l_s\geq 1}}\frac{1}{l_1^2\ldots l_s^2} \leq \frac{q^{s-1}}{k^2}. \tag{14}$$

Принимая во внимание неравенства (12) и (14), получим:

$$\|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu} \leq K\Big(\frac{1}{(2SK)^2qk^2} + \sum_{s=2}^{n}\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=k\\ l_1,\ldots,l_s\geq 1, s\leq k}}\frac{1}{l_1^2\ldots l_s^2}\Big(\frac{2SK+1}{(2SK)^2q}\Big)^s\Big) \leq$$

$$\leq K\Big(\frac{1}{(2SK)^2qk^2} + \Big(\frac{2SK+1}{(2SK)^2q}\Big)^2\frac{(q^n-q)}{(q-1)k^2}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4SKqk^2} + \frac{K}{4SK^2q^2} \leq \frac{1}{2SKqk^2}.$$

Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|c_{(k)}\|_{(F)2,\nu}\varepsilon^k$ сходится на промежутке $\varepsilon \in [0,1)$. Следовательно, в силу формулы (4), сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_{(k)}^{\alpha}\varepsilon^k, \alpha = \overline{1, n+1}$, на промежутке $\varepsilon \in [0,1)$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, А. И. Непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1996. — № 2. — С. 13–16.
2. Зубков, А. Н. Непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. Н. Зубков, В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1989. — Т. 45, № 1. — С. 20–27.
3. Исанов, Т. Г. О продолжении бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны / Т. Г. Исанов // Сибирский математический журнал. — 1979. — Т. 20, № 6. — С. 1261–1268.
4. Колегаева, Е. М. О продолжении бесконечно малых изгибаний поверхностей в аналитические изгибания при внешних связях / Е. М. Колегаева, В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1989. — Т. 45, № 2. — С. 30–39.
5. Кон-Фоссен, С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом / С. Э. Кон-Фоссен. — М. : Физматгиз, 1959. — 304 с.
6. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 576 с.
7. Фоменко, В. Т. ARG-деформации гиперповерхностей в римановом пространстве / В. Т. Фоменко // Ред. Сиб. мат. журн. Деп. в ВИНИТИ 16.11.1990. — 1990. — № 5805. — С. 1–22.
8. Эйзенхарт, Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. — М. : Изд-во ин. лит., 1948. — 316 с.
9. Bodrenko, A. I. Some properties of continuous almost ARG-deformations / A. I. Bodrenko // Russian Mathematics. — 1996. — V. 40, № 2. — P. 11–14.

ANALYTIC ALMOST *ARG*-DEFORMATIONS OF SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

A.I. Bodrenko

The problem of analytic continuation of infinitesimal almost ARG-deformations of surfaces in Euclidean spaces is studied in this article.

Key words: *deformation of surface, mean curvature, G-deformation, infinitesimal deformation, analytical deformation.*