DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.1

УДК 519.632.4:539.384
ББК 22.19

Дата поступления статьи: 13.07.2026
Дата принятия статьи: 03.08.2026

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ БАЗИС ЛЕЖАНДРА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА КВАДРАТЕ

Анатолий Альбертович Дуркин
Аспирант кафедры прикладной математики и компьютерных наук,
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
durkinaa@syktsu.ru
https://orcid.org/0009-0009-9118-4629
просп. Октябрьский, 55, 167001 г. Сыктывкар, Российская Федерация

Андрей Васильевич Ермоленко
Кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук,
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
ermolenkoav@syktsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-2904-1717
просп. Октябрьский, 55, 167001 г. Сыктывкар, Российская Федерация

Лев Сергеевич Шадрин
Аспирант, ассистент кафедры прикладной математики и компьютерных наук,
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина
shadrinls@syktsu.ru
https://orcid.org/0009-0000-7316-2463
просп. Октябрьский, 55, 167001 г. Сыктывкар, Российская Федерация

Цитирование: Дуркин А. А., Ермоленко А. В., Шадрин Л. С. Полиномиальный базис Лежандра для построения функции Грина бигармонического оператора на квадрате // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 2. С. 5–19.
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.1

Citation: Durkin A.A., Yermolenko A.V., Shadrin L.S. Legendre Polynomial Basis for Constructing the Green's Function of the Biharmonic Operator on a Square. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 2, pp. 5-19. (in Russian).
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.1

© Дуркин А.А., Ермоленко А.В., Шадрин Л.С., 2026

Аннотация. Работа посвящена численному построению функции Грина бигармонического оператора на единичном квадрате в условиях жесткого защемления границы. Задача моделирует изгиб тонкой упругой пластины Кирхгофа – Лява под действием произвольной поперечной нагрузки. В рамках проекционного метода Галеркина – Ритца проведено сопоставление тригонометрического базиса синус-квадратов и полиномиальной системы на основе смещенных многочленов Лежандра с весовым «пузырьковым» множителем, точно удовлетворяющим однородным краевым условиям. Показаны полнота полиномиальной системы в энергетическом пространстве $H_0^2(\Omega)$, квазиоптимальность приближения по Сеа, точность метода на полиномиальных данных и экспоненциальная (спектральная) скорость сходимости для аналитических решений. Показано, что тригонометрическая система синус-квадратов *не является полной* в $H_0^2(\Omega)$, замыкание ее линейной оболочки в энергетической норме совпадает с подпространством функций, вторая производная которых симметрична относительно середины отрезка; как следствие, приближения метода Галеркина с этим базисом сходятся лишь для решений с симметричным лапласианом и стагнируют в противном случае. Численный эксперимент подтверждает теоретические выводы и верифицирует алгоритм по классическим эталонным коэффициентам прогиба защемленной квадратной плиты (равномерная нагрузка и сосредоточенная сила). Полиномиальный базис Лежандра обеспечивает высокоточную аппроксимацию старших производных, недостижимую для тригонометрического аналога.

Ключевые слова: метод Ритца – Галеркина, жесткое защемление, изгиб пластины, энергетическое пространство, спектральная сходимость, число обусловленности, полнота координатной системы.

Введение

Расчет деформаций тонких пластин – одна из базовых задач механики деформируемого твердого тела, строительной механики и авиастроения [12]. В рамках классической теории Кирхгофа – Лява изгиб жестко защемленной пластины под действием поперечной нагрузки описывается краевой задачей для бигармонического уравнения с однородными граничными условиями, соответствующими занулению прогиба и его первой производной по нормали [12; 13].

Инструментом, позволяющим единообразно решать эту задачу при произвольной нагрузке, служит функция Грина (функция влияния) бигармонического оператора, которая с точки зрения механики пластин представляет собой прогиб от сосредоточенной единичной силы, при этом напряженно-деформированное состояние при любой распределенной нагрузке получают интегрированием по расчетной области [13]. Точное аналитическое выражение функции Грина для прямоугольника с защемлением построить не удается, как показал в классической работе В.В. Мелешко [17], задача сводится к бесконечной системе линейных уравнений типа Бубнова, разрешимой лишь численно; замкнутых формул, аналогичных формуле Боджио для круга, здесь нет, а сама функция Грина в вытянутом прямоугольнике может менять знак [16]. Поэтому на практике применяют вариационные (проекционные) методы Ритца – Галеркина [7; 8], скорость сходимости и устойчивость которых определяются выбором координатной системы [11; 18]. Так, в работе [6] при решении краевых задач для уравнений четвертого порядка строятся C^1-гладкие кусочно-квадратичные функции, коэффициенты которых находятся из вариационной постановки задачи. Базисные функции обязаны точно обращаться в нуль на границе вместе с нормальной производной (условие защемления); кроме того, поскольку энергетическая норма задачи эквивалентна норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$, координатная система должна обеспечивать приближение решения вместе с производными до второго порядка включительно в метрике $L_2(\Omega)$.

Тригонометрические системы (в частности, синус-квадраты) алгоритмически просты, однако вопросы строгой обоснованности их аппроксимационных свойств в пространстве H_0^2 исследованы не полностью. Полиномиальные системы на основе ортогональных многочленов, напротив, обеспечивают для гладких решений экспоненциальную скорость сходимости [14; 18]; это свойство лежит в основе p-версии метода конечных элементов и спектральных методов [14; 15; 19].

Настоящая работа развивает вычислительный аппарат научной группы по решению краевых задач для бигармонического оператора [3] и служит верификационным ядром для последующего перехода к областям произвольного очертания [5]. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Обоснован полиномиальный базис Лежандра с «пузырьковым» множителем; для двумерной задачи получено явное сепарабельное представление матрицы жесткости.
2. Доказана полнота полиномиальной системы в $H_0^2(\Omega)$; установлены квазиоптимальность метода Ритца, его точность на полиномиальных данных и экспоненциальная сходимость для аналитических решений.
3. Установлена и доказана *неполнота* тригонометрической системы синус-квадратов в $H_0^2(\Omega)$ с точным описанием замыкания ее оболочки; тем самым объяснен эффект стагнации погрешности.
4. Проведена независимая верификация алгоритма по эталонным коэффициентам прогиба защемленной квадратной плиты из классической литературы.

1. Постановка задачи

Требуется построить функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ бигармонического оператора с условиями жесткого защемления на единичном квадрате:

$$\Delta^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{z}), \qquad \mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{z} = (\xi, \eta) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$G|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе $\partial\Omega$, $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)$ – двумерная дельта-функция Дирака, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Рассмотрим энергетическое пространство $H_0^2(\Omega)$ (пространство Соболева) со скалярным произведением

$$(u, v)_a = a(u, v) = \int_\Omega \Delta u(\mathbf{r})\, \Delta v(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \tag{3}$$

которому соответствует энергетическая норма $|v|_a = \sqrt{a(v, v)} = \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)}$. В силу неравенства Фридрихса эта норма эквивалентна стандартной норме пространства Соболева $\|v\|_{H^2}$ [8; 15]. Для $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ и $v \in H_0^2(\Omega)$ также справедлива формула Грина

$$\int_\Omega v\, \Delta^2 u\, d\mathbf{r} = \int_\Omega \Delta v\, \Delta u\, d\mathbf{r}.$$

С учетом фильтрующего свойства δ-функции слабая (обобщенная) формулировка задачи (1)–(2) заключается в определении функции $G(\mathbf{r}, \mathbf{z}) \in H_0^2(\Omega)$ такой, что

$$a(G(\mathbf{r}, \mathbf{z}), v(\mathbf{r})) = v(\mathbf{z}) \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{4}$$

Правая часть в (4) – линейный функционал $v \mapsto v(\mathbf{z})$; в двумерном случае он ограничен в $H_0^2(\Omega)$, поскольку по теореме вложения Соболева $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Иными словами, в отличие от мембраны, прогиб пластины под сосредоточенной силой остается ограниченным: изгибная жесткость сглаживает точечную нагрузку. По теореме Рисса о представлении функционала задача (4) имеет единственное решение $G(\cdot, \mathbf{z}) \in H_0^2(\Omega)$; подставляя $v = G$ и учитывая (3), сразу получаем, что энергия функции Грина конечна и равна ее значению в точке приложения силы:

$$|G|_a^2 = a(G, G) = G(\mathbf{z}, \mathbf{z}) < \infty.$$

Это открывает возможность применения устойчивых проекционных методов.

2. Метод Галеркина – Ритца и вычислительная схема

Для конструирования приближенного решения двумерной задачи изгиба пластины в конечномерном подпространстве $V_M \subset H_0^2(\Omega)$ используется координатная система, построенная на основе тензорного произведения:

$$\Phi_{mn}(x, y) = \phi_m(x)\phi_n(y), \qquad m, n = 1, \ldots, M, \tag{5}$$

где одномерные функции $\phi_k(t)$ подбираются таким образом, чтобы автоматически гарантировать выполнение однородных граничных условий жесткого защемления на контуре пластины:

$$\phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \qquad \phi_k'(0) = \phi_k'(1) = 0. \tag{6}$$

В настоящей работе проводится сравнительный анализ двух принципиально различных по своей аналитической природе вариантов реализации одномерной системы. Первый вариант – *тригонометрический* базис синус-квадратов:

$$\phi_m^{(1)}(x) = \sin^2(\pi m x), \tag{7}$$

элементы которого традиционно применяются в полуаналитических методах благодаря гладкости на интервале. Второй вариант – *полиномиальный* базис, построенный на базе смещенных многочленов Лежандра $P_k(x)$ (вычисляемых по классической формуле Родрига на $[0, 1]$), снабженных специальным «пузырьковым» весовым множителем для принудительного обнуления функции и ее первой производной на границах:

$$\phi_n^{(2)}(x) = x^2(1 - x)^2 P_{n-1}(x), \qquad P_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - x)^k. \tag{8}$$

Обе представленные системы удовлетворяют условиям (6), что делает их допустимыми функциями в вариационном методе Ритца – Галеркина. Однако их внутренние аппроксимационные свойства в метрике пространства Соболева кардинально различаются. Приближенную функцию Грина ищем в конечномерном подпространстве $V_M = \operatorname{span}\{\Phi_{mn}\} \subset H_0^2(\Omega)$ размерности $N = M^2$ в виде

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \sum_{m,n=1}^{M} c_{mn}(\mathbf{z})\Phi_{mn}(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Перенумеровав базис одним индексом Φ_i, $i = 1, \ldots, N$ и подставив (9) в (4) при $v = \Phi_j$, получим систему

$$\mathbf{K}\mathbf{c}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}(\mathbf{z})$$

с матрицей жесткости $K_{ij} = a(\Phi_i, \Phi_j)$ и вектором $b_j(\mathbf{z}) = \Phi_j(\mathbf{z})$, откуда

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \sum_{i,j=1}^{N} \Phi_i(\mathbf{r})\, (\mathbf{K}^{-1})_{ij}\, \Phi_j(\mathbf{z}). \tag{10}$$

Сепарабельная структура матрицы жесткости. Для тензорного базиса (5) с $\Delta\Phi_{mn} = \phi''_m\phi_n + \phi_m\phi''_n$ элемент $K_{(mn),(pq)} = \int_\Omega \Delta\Phi_{mn}\Delta\Phi_{pq}\, d\mathbf{r}$ выражается через три матрицы, элементы которых – одномерные интегралы:

$$A_{mp} = \int_0^1 \phi''_m\phi''_p\, dx, \quad B_{mp} = \int_0^1 \phi''_m\phi_p\, dx = -\int_0^1 \phi'_m\phi'_p\, dx, \quad C_{mp} = \int_0^1 \phi_m\phi_p\, dx, \tag{11}$$

где симметрия B вытекает из (6) интегрированием по частям. Прямое вычисление дает $K_{(mn),(pq)} = A_{mp}C_{nq} + 2B_{mp}B_{nq} + C_{mp}A_{nq}$; при лексикографической нумерации $i = M(m - 1) + n$, $j = M(p - 1) + q$ – той же, что и в (10), – это тождество принимает компактную кронекерову форму

$$\mathbf{K} = A \otimes C + 2\, B \otimes B + C \otimes A. \tag{12}$$

Поясним оценку объема вычислений: при прямой сборке матрица $\mathbf{K}$ содержит $N^2 = M^4$ элементов, каждый из которых вычисляется как двумерный интеграл по Ω, тогда как представление (12) требует лишь трех матриц (11) размера $M \times M$, то есть $O(M^2)$ одномерных интегралов, после чего $\mathbf{K}$ собирается по (12) без дополнительного численного интегрирования; это и служит основой эффективной реализации.

Вычислительный алгоритм построения G_N:

1. задать число M базисных функций на направление;
2. вычислить одномерные матрицы (11) и собрать $\mathbf{K}$ по (12);
3. выполнить факторизацию $\mathbf{K}$ (для симметричной положительно определенной матрицы – разложение Холецкого);
4. для заданного положения точечного источника $\mathbf{z}$ (точки приложения единичной сосредоточенной силы) найти $\mathbf{c}(\mathbf{z}) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{z})$ и при необходимости вычислить $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ по (10).

Для системы (7) матрицы (11) вычисляются в замкнутом виде следующим образом:

$$A_{mp} = 2\pi^4 m^4 \delta_{mp}, \quad B_{mp} = -\tfrac{1}{2}\pi^2 m^2 \delta_{mp}, \quad C_{mp} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\delta_{mp};$$

для системы (8) все интегралы (11) суть интегралы от многочленов и вычисляются точно (в рациональной арифметике).

3. Теоретический анализ сходимости и аппроксимационных свойств

Согласно классической лемме Сеа [15], приближенное решение u_M, полученное методом Ритца – Галеркина в конечномерном подпространстве $V_M = \operatorname{span}\{\Phi_{mn}\} \subset H_0^2(\Omega)$, является a-ортогональной проекцией точного решения u на это подпространство. Это гарантирует квазиоптимальность приближения, то есть минимизацию погрешности в энергетической норме:

$$|u - u_M|_a = \inf_{v \in V_M} |u - v|_a. \tag{13}$$

Таким образом, сходимость и скорость вычислительного метода целиком определяются аппроксимационной способностью выбранной координатной системы, что требует детального исследования плотности линейных оболочек исследуемых базисов.

Доказательство полноты полиномиальной системы. Покажем, что полиномиальная система (8) полна в $H_0^2(\Omega)$. Это означает, что замыкание ее линейной оболочки $\overline{V}_M$ по норме $|\cdot|_a$ совпадает со всем пространством $H_0^2(\Omega)$. Доказательство проведем в два этапа. На первом этапе рассмотрим одномерный случай на отрезке $[0,1]$. Множество функций $\mathrm{span}\{\phi_n^{(2)}(x)\}$ совпадает со всем пространством многочленов, делящихся на $x^2(1-x)^2$, что автоматически обеспечивает выполнение однородных граничных условий защемления $\phi(0) = \phi(1) = 0$, $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$. Множество финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(0,1)$ плотно в $H_0^2(0,1)$, поэтому достаточно уметь приближать произвольную функцию $u \in C_0^\infty(0,1)$. Ее вторая производная u'' непрерывна. На основании аппроксимационной теоремы Вейерштрасса [11], непрерывная функция u'' может быть со сколь угодно высокой точностью приближена алгебраическим многочленом $q_k(x)$ степени k. Двукратное интегрирование приближающего многочлена $q_k(x)$ дает новый многочлен $Q_{k+2}(x)$, вторые производные которого близки к u'' в метрике $L_2(0,1)$.

Для точного удовлетворения граничным условиям к $Q_{k+2}(x)$ добавляется полиномиальная поправка степени не выше 3:

$$\tilde{Q}(x) = Q_{k+2}(x) + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0. \tag{14}$$

Поскольку исходная функция $u(x)$ удовлетворяет условиям защемления на концах отрезка, поправочные коэффициенты α_i стремятся к нулю при улучшении точности приближения теоремы Вейерштрасса. Полученный посредством модификации (14) многочлен $\tilde{Q}(x)$ строго делится на $x^2(1-x)^2$ и принадлежит $\mathrm{span}\{\phi_n^{(2)}(x)\}$, что доказывает плотность одномерного базиса в $H_0^2(0,1)$. На втором этапе перейдем к двумерной области $\Omega = [0,1]\times[0,1]$. Рассуждение аналогично, однако проведем его независимо, поскольку полнота одномерной системы в $H_0^2(0,1)$ сама по себе не влечет полноты тензорной системы (5) в $H_0^2(\Omega)$. Заметим, что $\mathrm{span}\{\Phi_{mn}\}$ совпадает с множеством многочленов вида $b(x,y)\,r(x,y)$, где $b(x,y) = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ – двумерный «пузырьковый» множитель, а r – произвольный многочлен. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$; это множество плотно в $H_0^2(\Omega)$. Функция $w = u/b$ также принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, поскольку u обращается в нуль в окрестности границы, где мал знаменатель b. По теореме о приближении полиномами Бернштейна непрерывно дифференцируемых функций вместе с производными (одномерный результат см. в [9]; двумерный вариант получается последовательным применением оператора Бернштейна по каждой переменной) существует последовательность многочленов r_k, сходящаяся к w в $C^2(\overline{\Omega})$. Тогда $b\,r_k \in \mathrm{span}\{\Phi_{mn}\}$ и по формуле Лейбница

$$\|u - b\,r_k\|_{H^2} \le C\,\|b\|_{C^2(\overline{\Omega})}\,\|w - r_k\|_{C^2(\overline{\Omega})} \to 0,$$

а в силу эквивалентности норм сходимость имеет место и в энергетической метрике. Полнота полиномиальной системы доказана.

Анализ аппроксимационных свойств и неполноты тригонометрического базиса. Исследуем плотность линейной оболочки тригонометрической координатной системы (7) в пространстве $H_0^2(0,1)$. Обозначим подпространство $\mathcal{V}^{(1)} = \overline{\mathrm{span}\{\phi_m^{(1)}(x)\}_{m\ge1}}$ как замыкание этого базиса в энергетической норме $|v|_a = \|v''\|_{L_2}$. Для явного описания структуры $\mathcal{V}^{(1)}$ воспользуемся линейным оператором двукратного дифференцирования $T : H_0^2(0,1) \to L_2(0,1)$, определяемым как $Tv = v''$. Данный оператор осуществляет изометрическое отображение пространства $H_0^2(0,1)$ на подпространство функций из $L_2(0,1)$, ортогональных единице и линейной

функции [15]:

$$L_2^{\perp} = \left\{ \varphi \in L_2(0,1) : \int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 x\varphi(x)\,dx = 0 \right\}. \tag{15}$$

Действие оператора T на одномерный тригонометрический базис (7) приводит к соотношению:

$$T\phi_m^{(1)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^2(\pi m x)\right) = 2\pi^2 m^2 \cos(2\pi m x). \tag{16}$$

Таким образом, в силу (16) образ линейной оболочки системы синус-квадратов под действием изометрии T порождает систему косинусов $\{\cos(2\pi m x)\}_{m\geq 1}$, лежащую в подпространстве (15). Согласно классической теории рядов Фурье [13], замыкание этой системы в $L_2(0,1)$ не совпадает со всем пространством, а ограничивается лишь функциями, обладающими свойством четности (симметрии) относительно середины отрезка $x = 1/2$. Возвращаясь в исходное пространство с помощью обратного оператора T^{-1}, мы получаем, что замыкание тригонометрической схемы в энергетической норме образует замкнутое собственное подпространство:

$$\mathcal{M} = \left\{ v \in H_0^2(0,1) : v''(x) = v''(1-x) \text{ п.в.} \right\} \subset H_0^2(0,1). \tag{17}$$

Поскольку в $H_0^2(0,1)$ существуют функции, вторая производная которых несимметрична относительно точки $x = 1/2$ (например, $v(x) = x^2(1-x)^2(1+0,5x)$), система (7) принципиально не является полной. На практике это означает, что при выходе точного решения задачи изгиба за пределы класса симметрии $\mathcal{M}$ (17) (что неизбежно при произвольной несимметричной или сосредоточенной нагрузке), численный метод Галеркина столкнется со стагнацией погрешности, которая зафиксируется на некотором конечном уровне и не уменьшится при росте числа гармоник M. В то же время полиномиальный базис Лежандра (8), будучи полным в силу теоремы Вейерштрасса [11], свободен от данного ограничения и гарантирует монотонную сходимость к любому физическому решению.

Влияние на численные расчеты. Обнаруженное фундаментальное различие в аппроксимационных свойствах базисов оказывает следующее влияние на результаты компьютерного моделирования.

Стагнация тригонометрической схемы. В силу неполноты системы синус-квадратов решения, построенные методом Галеркина, сходятся к точному решению лишь при строгой симметрии лапласиана точного решения относительно центра области $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, как в случае равномерной нагрузки $f \equiv 1$ [12]. При любом несимметричном воздействии решение выходит за пределы подпространства $\mathcal{M}$. В результате проекционная погрешность в силу (13) принципиально стагнирует, оставаясь отделенной от нуля фиксированной величиной независимо от числа удерживаемых гармоник M.

Спектральная сходимость полиномиальной схемы. Полный полиномиальный базис Лежандра гарантирует монотонную сходимость погрешности к нулю для любых нагрузок. Для аналитических (регулярных) решений метод Ритца демонстрирует экспоненциальную скорость сходимости $|u - u_M|_a \leq Ce^{-\gamma M}$, $\gamma > 0$, кардинально снижая ошибку при минимальном росте размерности матрицы жесткости [18]. Это также обеспечивает прецизионную точность вычисления изгибающих моментов и напряжений, напрямую зависящих от вторых производных прогиба.

4. Численный эксперимент

Реализация выполнена на языке Python (библиотеки NumPy/SciPy) [4]; все одномерные интегралы полиномиального базиса вычисляются точно, интегралы тригонометрического базиса – по замкнутым формулам, а нормы погрешностей – квадратурой Гаусса – Лежандра высокого порядка, так что квадратурная ошибка исключена и наблюдаемая погрешность отражает только аппроксимацию базиса. Для оценки точности решается краевая задача

$$\Delta^2 w(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \qquad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{18}$$

методом изготовленных решений (МИР): по заданной функции w_i вычисляется правая часть $f_i = \Delta^2 w_i$ задачи (18), после чего проекция $F_j = \int_\Omega f_i \Phi_j \, d\mathbf{r}$ подставляется в систему $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$; такое представление эквивалентно свертке с функцией Грина (10) при точном интегрировании. Используются полиномиальная и трансцендентная тестовые функции

$$w_1 = x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2(1 + 0{,}5x + 0{,}3y), \qquad w_2 = x^2(1-x)^2 y^2(1-y)^2 e^{x+y}. \tag{19}$$

Относительные погрешности измеряются в нормах $L_2(\Omega)$ и $H_0^2(\Omega)$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\|w - w_i\|_{L_2}}{\|w_i\|_{L_2}} \times 100\%, \qquad \varepsilon_2 = \frac{|w - w_i|_{H_0^2}}{|w_i|_{H_0^2}} \times 100\%, \tag{20}$$

где w – численное решение при заданном M.

Точность приближения контролируют двумя взаимодополняющими способами. *Поточечный контроль* сравнивает численное и эталонное значения в отдельных физически значимых точках – прогиб в центре, максимальный прогиб, изгибающий момент в заданном сечении; он нагляден, вычислительно дешев и напрямую сопоставляется с табличными коэффициентами (α_q, α_P ниже), однако локален, например, малая ошибка в удачно выбранной точке (например, в центре, где симметричные погрешности взаимно компенсируются) способна замаскировать значительные отклонения производных в остальной области. *Интегральный контроль* измеряет погрешность в нормах функциональных пространств и потому характеризует решение целиком; его мы и принимаем за основной для гладких тестов.

Выбор норм (20) не случаен. Энергетическая норма $|\cdot|_{H_0^2} = \|\Delta \cdot\|_{L_2}$ естественна по трем причинам. Во-первых, именно в ней вариационная задача корректна и справедлива оценка квазиоптимальности (13), поэтому все результаты о сходимости формулируются и проверяются в этой же метрике. Во-вторых, она контролирует вторые производные, а с ними изгибающие моменты и напряжения, то есть наиболее чувствительные к погрешности и практически важные величины; это самый строгий из употребительных критериев. В-третьих, в силу вложения Соболева $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ в двумерном случае малость погрешности в H_0^2 мажорирует и поточечную погрешность прогиба, так что энергетическая норма охватывает поточечный контроль сверху.

Норма L_2 включена как более слабая дополнительная характеристика самого поля прогиба. Совместно две нормы ограничивают погрешность с двух сторон – L_2 отвечает за поле прогиба, H_0^2 – за поле напряжений. Отметим методически важный нюанс, связывающий оба способа. Для гладких (изготовленных) решений сингулярностей нет, и энергетическая норма служит наиболее строгим диагностическим критерием. Напротив, для функции Грина при сосредоточенной силе точное решение имеет особенность типа $r^2 \ln r$: его энергия конечна и

Таблица 1

Относительная погрешность (20) и число обусловленности $\varkappa(\mathbf{K})$ для полиномиальной функции w_1

	Синус-квадраты $\Phi^{(1)}$			Лежандр $\Phi^{(2)}$		
M	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$	$\varkappa(\mathbf{K})$	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$	$\varkappa(\mathbf{K})$
2	6,642	17,715	$1{,}9 \cdot 10^1$	$9{,}6 \cdot 10^{-13}$	$9{,}8 \cdot 10^{-13}$	$1{,}3 \cdot 10^1$
4	6,278	13,815	$4{,}3 \cdot 10^2$	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$3{,}2 \cdot 10^{-12}$	$2{,}9 \cdot 10^2$
6	6,268	13,180	$2{,}9 \cdot 10^3$	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$4{,}7 \cdot 10^{-12}$	$4{,}8 \cdot 10^3$
8	6,267	12,999	$1{,}1 \cdot 10^4$	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$5{,}9 \cdot 10^{-12}$	$6{,}4 \cdot 10^4$
10	6,267	12,930	$3{,}3 \cdot 10^4$	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$7{,}1 \cdot 10^{-12}$	$5{,}8 \cdot 10^5$
12	6,267	12,898	$7{,}9 \cdot 10^4$	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$8{,}2 \cdot 10^{-12}$	$3{,}9 \cdot 10^6$

Таблица 2

Относительная погрешность (20) для трансцендентной функции w_2 (число обусловленности совпадает с табл. 1)

	Синус-квадраты $\Phi^{(1)}$		Лежандр $\Phi^{(2)}$	
M	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$	$\varepsilon_1, \%$	$\varepsilon_2, \%$
2	21,124	43,247	1,970	7,149
4	20,934	41,072	$8{,}9 \cdot 10^{-3}$	$6{,}6 \cdot 10^{-2}$
6	20,928	40,746	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$
8	20,928	40,655	$1{,}9 \cdot 10^{-8}$	$3{,}5 \cdot 10^{-7}$
10	20,928	40,620	$1{,}3 \cdot 10^{-11}$	$3{,}4 \cdot 10^{-10}$
12	20,928	40,604	$1{,}4 \cdot 10^{-12}$	$9{,}2 \cdot 10^{-12}$

равна $|G|_a^2 = G(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ (см. разд. 1), однако $G \notin H^3(\Omega)$, поэтому спектральная скорость сходимости теряется, а замкнутого эталонного выражения для прямого вычисления энергетической погрешности нет. Осмысленным критерием остается поточечная величина $G_N(\mathbf{z}; \mathbf{z})$ – прогиб в точке приложения силы, сопоставляемый с эталоном α_P. Поэтому в верификации мы намеренно сочетаем оба подхода: интегральные нормы – для гладких тестов методом изготовленных решений, поточечные значения – для эталонных коэффициентов защемленной плиты. Результаты приведены в таблицах 1 и 2.

Данные таблиц подтверждают теорию. Для полиномиального базиса функция w_1 воспроизводится с машинной точностью при всех рассмотренных M (точность на полиномиальных данных), а для аналитической w_2 погрешность убывает экспоненциально – на два-три порядка при каждом увеличении M на 2 – и уже при $M = 12$ достигает машинного уровня. Потолок точности в арифметике конечной разрядности контролируется величиной $\varepsilon_{\text{mach}}\, \varkappa(\mathbf{K})$, поэтому существенны законы роста обусловленности: для почти a-ортогональной системы синус-квадратов $\varkappa(\mathbf{K})$ растет как $O(M^4)$ – это собственная обусловленность оператора четвертого порядка, – тогда как для неортогонализованного полиномиального базиса рост существенно быстрее (в исследованном диапазоне $\sim M^9$), и при больших M целесообразен переход к специальным комбинациям многочленов Лежандра [18]. Тригонометрический базис ведет себя принципиально иначе: погрешность в энергетической норме *стагнирует* (около 13 % для w_1 и 41 % для w_2) и не убывает при росте M. В полном соответствии с теоретическим анализом неполноты это объясняется несимметричностью лапласиана решений (19), множители $0{,}5x + 0{,}3y$ и e^{x+y} нарушают симметрию относительно центра, и решение имеет ненулевую проекцию на ортогональное дополнение к замыканию тригонометрической оболочки. Полулогарифмический график сходимости (см. рис. 1) наглядно демонстрирует контраст экспоненциального убывания и стагнации.

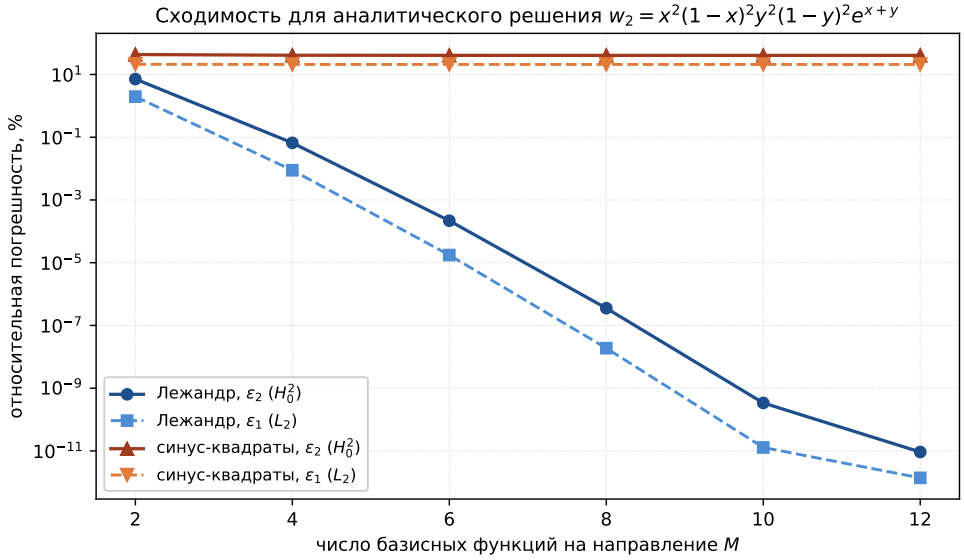


Рис. 1. Сходимость для аналитического решения w_2: экспоненциальное убывание погрешности полиномиального базиса Лежандра и стагнация тригонометрического базиса синус-квадратов (полулогарифмический масштаб)

Таблица 3

Верификация прогиба в центре при равномерной нагрузке (α_q) и значение функции Грина при центральной силе (α_P). Эталон: α_q = 0,00126532 [17], α_P = 0,00560 [12]

	α_q (равномерная нагрузка)		α_P (сосредоточенная сила)	
M	синус-квадраты	Лежандр	синус-квадраты	Лежандр
2	0,00122214	0,00132921	0,00525521	0,00467300
4	0,00125860	0,00126449	0,00551626	0,00509948
6	0,00126327	0,00126527	0,00556875	0,00533618
8	0,00126445	0,00126531	0,00558746	0,00543798
10	0,00126488	0,00126532	0,00559620	0,00549252
12	0,00126506	0,00126532	0,00560098	0,00552492
14	0,00126516	0,00126532	0,00560388	0,00554573

Верификация по эталонным решениям. Метод изготовленных решений проверяет внутреннюю согласованность, но не гарантирует правильности вычисленной функции Грина как физической величины. Для независимой верификации сопоставим результаты с классическими эталонными коэффициентами прогиба защемленной квадратной плиты ($\nu = 0{,}3$, сторона $a = 1$, жесткость $D = 1$), приведенными в справочной литературе [12; 17]. Рассмотрим два эталонных случая. *Равномерная нагрузка* $f \equiv 1$: прогиб в центре $w_c = \alpha_q$ сопоставляется с классическим значением Тимошенко $\alpha_q = 0{,}00126$ [12] и уточненным значением метода суперпозиции $\alpha_q = 0{,}00126532$ [17]. *Центральная сосредоточенная сила*: величина $G_N((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ есть в точности прогиб защемленной плиты в точке приложения единичной силы, сравниваемый с табличным коэффициентом $\alpha_P = 0{,}00560$ [12]. Результаты сведены в таблицу 3; поверхность построенной функции Грина показана на рисунке 2.

В случае равномерной нагрузки полиномиальный базис воспроизводит эталонное значение $0{,}00126532$ со всеми шестью значащими цифрами уже при $M = 10$; тригонометрический базис здесь также сходится (поскольку лапласиан прогиба при симметричной нагрузке симметричен относительно центра), но заметно медленнее. В случае сосредоточенной силы

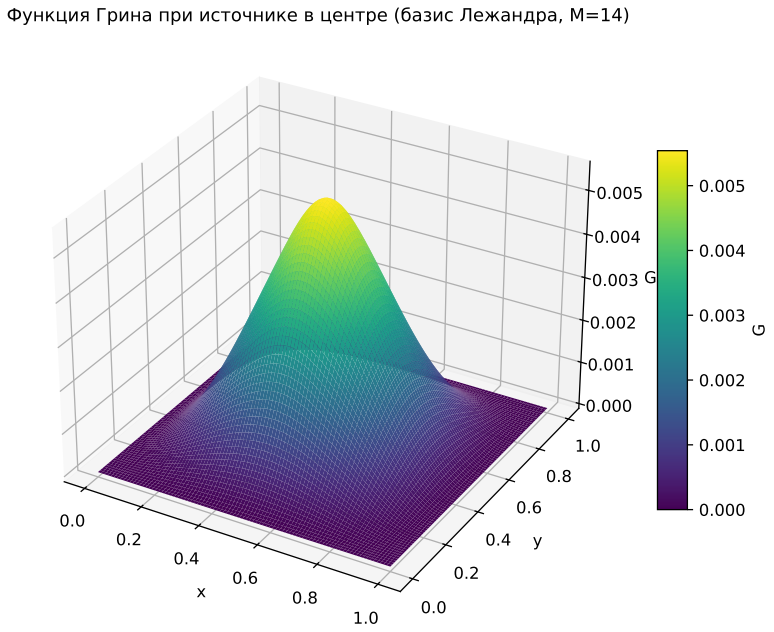


Рис. 2. Функция Грина $G_N(\mathbf{r}; (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ бигармонического оператора при источнике в центре квадрата; полиномиальный базис Лежандра, $M = 14$

решение сингулярно, спектральная скорость теряется, и сходимость обоих базисов становится алгебраической. Отметим, что величина $G_N(\mathbf{z}; \mathbf{z}) = \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b} = a(G_N, G_N)$ есть квадрат энергетической нормы ритцевской проекции, поэтому для вложенных подпространств она монотонно возрастает с ростом M и приближает точное значение $G(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = |G|_a^2$ *снизу*; обе последовательности таблицы 3 демонстрируют именно такое поведение, давая гарантированные нижние оценки. Табличный эталон $0{,}00560$ округлен: продолжение расчета до $M = 80$ для тригонометрической системы (сходящейся в данном симметричном случае) дает уточненное значение $\approx 0{,}005612$, к которому снизу стремится и полиномиальный базис, чья точность при сосредоточенной силе дополнительно ограничена ростом обусловленности. Совпадение с двумя независимыми классическими эталонами подтверждает корректность построенной функции Грина.

5. Обсуждение

Проведенный анализ выявляет качественное различие двух координатных систем. Полиномиальный базис Лежандра с «пузырьковым» множителем полон в энергетическом пространстве, точен на полиномиальных данных и сходится экспоненциально для аналитических решений, что и наблюдается в эксперименте. Единственное практическое ограничение – рост обусловленности; диагональное масштабирование снижает $\varkappa(\mathbf{K})$ лишь в несколько раз, так что рост носит принципиальный характер и преодолевается переходом к специальным комбинациям многочленов Лежандра, порождающим разреженные хорошо обусловленные матрицы [18].

Тригонометрическая система синус-квадратов, напротив, *не полна* в $H_0^2(\Omega)$, ее энергетическое замыкание – собственное подпространство функций, лапласиан которых симметричен относительно центра области, поэтому приближения Галеркина сходятся лишь для решений с этим свойством, а для типичных несимметричных задач погрешность стагнирует. Этот вывод носит методический характер и предостерегает от использования «удобных» тригонометри-

ческих базисов без проверки их полноты в нужной метрике. Отметим, что верификация по двум независимым эталонам контролирует правильность функции Грина как физической величины, а не только согласованность численной схемы.

Предложенная схема Ритца с полиномиальным базисом Лежандра наиболее эффективна при аналитических нагрузках, где она обеспечивает спектральную точность при минимальном числе базисных функций, что недостижимо для тригонометрических и низкопорядковых сеточных методов. Благодаря кронекеровой структуре матрицы жесткости ее сборка сводится к быстрым одномерным квадратурам, а однократная факторизация позволяет мгновенно находить функцию Грина для любых положений источника, что крайне важно для контактных задач теории пластин [2], где положение реакции заранее неизвестно. Кроме того, данный базис аппроксимирует лапласиан прогиба, изгибающие моменты и поперечные силы с той же высокой точностью, что и сам прогиб, в то время как тригонометрический аналог здесь неэффективен из-за своей доказанной неполноты.

Однако при разрывных краевых условиях, входящих углах или сингулярных нагрузках метод теряет высокую скорость сходимости, уступая локальной версии метода конечных элементов со сгущением сетки, а для областей сложной многосвязной формы становится целесообразнее применять сеточные подходы, методы граничных интегральных уравнений [1] или метод R-функций [10]. По этим причинам разработанный алгоритм позиционируется как высокоточное вычислительное ядро для канонической области – единичного квадрата. На этой базовой геометрии методика полностью верифицируется и тестируется по классическим эталонам перед последующим обобщением на расчетные области произвольной формы.

В заключение отметим, что рассмотренный теоретический аппарат и численные тесты подтверждают вычислительную эффективность предложенного полиномиального базиса, что позволяет рекомендовать разработанное алгоритмическое ядро для интеграции в спектральные методы расчета тонкостенных элементов конструкций сложной геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 494 с.

2. Григолюк, Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М. : Машиностроение, 1980. – 415 с.

3. Ермоленко, А. В. Численное решение неоднородного бигармонического уравнения / А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Вып. 3 (44). – С. 64–78.

4. Ермоленко, А. В. О применении библиотек Python для расчета пластин / А. В. Ермоленко, К. С. Осипов // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – Вып. 4 (33). – С. 86–95.

5. Ермоленко, А. В. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона в произвольной области / А. В. Ермоленко, Я. А. Поздеев // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 4 (53). – С. 84–94. – DOI: https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

6. Клячин, А. А. Построение C^1-гладких кусочно-квадратичных функций при решении краевых задач уравнений 4-го порядка / А. А. Клячин // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2022. – Т. 25, № 3. – С. 5–14. – DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.1

7. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.

8. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.

9. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. – 688 с.

10. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев : Наукова думка, 1982. – 552 с.

11. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Физматлит, 2005. – 480 с.

12. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.

13. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.

14. Babuška, I. The p-Version of the Finite Element Method / I. Babuška, B. A. Szabó, I. N. Katz // SIAM J. Numer. Anal. – 1981. – Vol. 18, № 3. – P. 515–545. – DOI: https://doi.org/10.1137/0718033

15. Ciarlet, P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems / P. G. Ciarlet. – Amsterdam : North-Holland, 1978. – 530 p.

16. Gazzola, F. Polyharmonic Boundary Value Problems / F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers. – Berlin : Springer, 2010. – 423 p.

17. Meleshko, V. V. Bending of an Elastic Rectangular Clamped Plate: Exact versus „Engineering" Solutions / V. V. Meleshko // Journal of Elasticity. – 1997. – Vol. 48, № 1. – P. 1–50. – DOI: https://doi.org/10.1023/A:1007472709175

18. Shen, J. Efficient Spectral-Galerkin Method I. Direct Solvers of Second- and Fourth-Order Equations Using Legendre Polynomials / J. Shen // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – Vol. 15, № 6. – P. 1489–1505. – DOI: https://doi.org/10.1137/0915089

19. Shen, J. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications / J. Shen, T. Tang, L.-L. Wang. – Berlin : Springer, 2011. – 470 p. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7

REFERENCES

1. Benerdzhi P., Batterfild R. *Boundary Element Methods in Applied Sciences*. Moscow, Mir Publ., 1984. 494 p.

2. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Contact Problems of the Theory of Plates and Shells*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 415 p.

3. Yermolenko A.V., Kozhageldiev N.V. Numerical Solution of the Inhomogeneous Biharmonic Equation. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2022, iss. 3 (44), pp. 64-78.

4. Yermolenko A.V., Osipov K.S. On Using Python Libraries to Calculate Plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2019, iss. 4 (33), pp. 86-95.

5. Yermolenko A.V., Pozdeev Ya.A. On the Numerical Solution of the Dirichlet Problem for the Poisson Equation in an Arbitrary Domain. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2024, iss. 4 (53), pp. 84-94. DOI: https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_84

6. Klyachin A.A. Construction of C^1-Smooth Piecewise Quadratic Functions for Solving Boundary Value Problems of 4-th Order Equations. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2022, vol. 25, no. 3, pp. 5-14. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.1

7. Marchuk G.I. *Methods of Computational Mathematics*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 608 p.

8. Mikhlin S.G. *Variational Methods in Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 512 p.

9. Natanson I.P. *Constructive Function Theory*. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 688 p.

10. Rvachev V.L. *Theory of R-Functions and Some of Its Applications*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1982. 552 p.

11. Suetin P.K. *Classical Orthogonal Polynomials*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 480 p.

12. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.

13. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 735 p.

14. Babuška I., Szabó B.A., Katz I.N. The p-Version of the Finite Element Method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1981, vol. 18, no. 3, pp. 515-545. DOI: https://doi.org/10.1137/0718033

15. Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Amsterdam, North-Holland, 1978. 530 p.

16. Gazzola F., Grunau H.-C., Sweers G. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Berlin, Springer, 2010. 423 p.

17. Meleshko V.V. Bending of an Elastic Rectangular Clamped Plate: Exact Versus „Engineering" Solutions. *Journal of Elasticity*, 1997, vol. 48, no. 1, pp. 1-50. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1007472709175

18. Shen J. Efficient Spectral-Galerkin Method I. Direct Solvers of Second- and Fourth-Order Equations Using Legendre Polynomials. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1994, vol. 15, no. 6, pp. 1489-1505. DOI: https://doi.org/10.1137/0915089

19. Shen J., Tang T., Wang L.-L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Berlin, Springer, 2011. 470 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7

LEGENDRE POLYNOMIAL BASIS FOR CONSTRUCTING THE GREEN'S FUNCTION OF THE BIHARMONIC OPERATOR ON A SQUARE

Anatoliy A. Durkin

Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
durkinaa@syktsu.ru
https://orcid.org/0009-0009-9118-4629
Prosp. Oktyabrsky, 55, 167001 Syktyvkar, Russian Federation

Andrei V. Yermolenko

Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Head, Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
ermolenkoav@syktsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-2904-1717
Prosp. Oktyabrsky, 55, 167001 Syktyvkar, Russian Federation

Lev S. Shadrin

Postgraduate Student, Assistant Lecturer, Department of Applied Mathematics and Computer Science,
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
shadrinls@syktsu.ru
https://orcid.org/0009-0000-7316-2463
Prosp. Oktyabrsky, 55, 167001 Syktyvkar, Russian Federation

Abstract. This paper is devoted to the numerical construction of the Green's function for the biharmonic operator on the unit square under clamped boundary conditions. The problem models the bending of a thin elastic Kirchhoff – Love plate subjected to an arbitrary transverse load. Within the framework of the Galerkin – Ritz projection method, a comparison is made between the trigonometric basis of sine squares and a polynomial system based on shifted Legendre polynomials with a weight "bubble" factor that exactly satisfies the homogeneous boundary conditions. The completeness of the polynomial system in the energy space $H_0^2(\Omega)$, the quasi-optimality of the approximation by Cea's lemma, the exactness of the method on polynomial data, and the exponential (spectral) convergence rate

for analytic solutions are demonstrated. It is shown that the trigonometric system of sine squares is *not complete* in $H_0^2(\Omega)$; the closure of its linear span in the energy norm coincides with the subspace of functions whose second derivative is symmetric with respect to the midpoint of the interval. Consequently, the Galerkin approximations with this basis converge only for solutions with a symmetric Laplacian and stagnates otherwise. Numerical experiments confirm the theoretical conclusions and verify the algorithm against classical reference coefficients for the deflection of a clamped square plate (uniform load and concentrated force). The Legendre polynomial basis provides high-accuracy approximation of higher derivatives, which is unattainable for the trigonometric analogue.

Key words: Ritz – Galerkin method, clamped boundary, plate bending, energy space, spectral convergence, condition number, completeness of a coordinate system.