DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.2

УДК 004.932
ББК 22.195.4

Дата поступления статьи: 19.03.2026
Дата принятия статьи: 07.05.2026

О ПРИМЕНЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КРИВИЗНЫ ДЛЯ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

Анастасия Юрьевна Баркова

Магистрант группы МОСм-251,
Волгоградский государственный университет
barkova.anastasia2015@yandex.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Владимир Александрович Клячин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Цитирование: Баркова А. Ю., Клячин В. А. О применении операторов кривизны для задач распознавания объектов на изображении // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 2. С. 20–29.
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.2

Citation: Barkova A.Yu., Klyachin V.A. On the Application of Curvature Operators to Problems of Object Recognition in Images. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 2, pp. 20-29. (in Russian).
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.2

Аннотация. В представленной работе решается задача классификации объектов на изображениях с применением классических методов машинного обучения. В качестве источников для формирования вектора признаков были выбраны приближенные значения гауссовой и средней кривизн поверхности графика функции яркости каждой цветовой компоненты точки на изображении. Основой возможности применения указанных величин являются классические теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач Дирихле для соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными. Указанные выше приближенные величины вычисляются с помощью операторов Собеля, реализация которых встроена в библиотеку компьютерного зрения OpenCV. Тестирование проводилось на нескольких наборах данных с использованием различных методов машинного обучения. Результаты показали высокую эффективность предложенного метода для обнаружения объектов с четкой формой.

Ключевые слова: классификация изображений, гауссова кривизна, средняя кривизна, оператор Собеля, машинное обучение.

© Баркова А.Ю., Клячин В.А., 2026

Введение

В современном мире задача распознавания изображений занимает особое место в области компьютерного зрения. Ее решения находят применение в области медицины, в определении характеристик материала, в дистанционном зондировании земной поверхности, в наблюдении за погодой и составлении прогнозов, в автоматическом контроле качества выпускаемой продукции, в криминалистике, а также в космической сфере [3].

Существует два принципиально разных подхода к решению задач обработки изображений: с использованием нейронных сетей и с использованием классических алгоритмов машинного обучения. Каждый из этих подходов обладает своими преимуществами и недостатками. Нейронные сети имеют высокую точность распознавания объектов, однако они требуют значительных вычислительных ресурсов и большого количества времени на обучение. В то время как классические методы, хотя и уступают по универсальности и точности, позволяют решать задачи с меньшими затратами [6]. Поэтому разработка алгоритмов на основе данных методов остается одной из актуальных задач.

В данной работе рассматривается подход, основанный на геометрическом анализе изображения, которое представляется как график функции двух переменных: $z = f(i, j)$, где координаты пикселя (i, j) задают положение точки на плоскости, а значение яркости z определяет высоту. Тогда изображение можно представить в виде поверхности и исследовать его с помощью методов геометрического анализа.

Целью работы стало исследование эффективности использования операторов гауссовой и средней кривизны для задачи классификации изображений на нескольких наборах данных и с использованием различных алгоритмов.

1. Математическая основа

Рассмотрим C^2-гладкую поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданную параметрически радиус-вектором $R : \Omega \to \mathbb{R}^3$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область переменных u, v. Если через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначить скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, то величина

$$\langle dR, dR \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

называется первой квадратичной формой поверхности $\mathcal{M}$. Пусть ξ обозначает векторное поле нормалей к этой поверхности. Тогда величина

$$\langle d^2R, \xi \rangle = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

называется второй квадратичной формой поверхности. Рассмотрим квадратное уравнение

$$\det \begin{pmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку рассматривается симметричная матрица, то это уравнение имеет два вещественных корня k_1, k_2, которые носят название главных кривизн поверхности $\mathcal{M}$ в соответствующей точке. Величина полусуммы $H(u, v) = k_1 + k_2$ называется средней кривизной, а величина произведения главных кривизн $K(u, v) = k_1 \cdot k_2$ носит название гауссовой кривизны поверхности $\mathcal{M}$ [8]. Эти величины является одними из важнейших характеристик поверхности, позволяющие оценить степень ее искривленности в окрестности заданной точки.

Для графика функции $z = f(x, y)$ гауссова кривизна вычисляется по следующей формуле:

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}, \tag{1}$$

где f_x, f_y — первые производные, а f_{xx}, f_{yy} и f_{xy} — вторые. Для графика функции $z = f(x, y)$ оператор средней кривизны вычисляется по формуле:

$$\mathcal{H}[f] = \frac{f_{xx}(1 + f_y^2) - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2)}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^{3/2}}. \tag{2}$$

Отличие между гауссовой и средней кривизной заключается в том, что гауссова кривизна характеризует степень изогнутости поверхности, а средняя кривизна чувствительна к направлению изгиба.

Напомним некоторые известные факты, касающиеся восстановления поверхностей графиков по значениям средней и гауссовой кривизн. Согласно теореме 16.9 из [2] при определенных ограничениях на границу области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ в этой области однозначно разрешима задача Дирихле для уравнения

$$\mathcal{H}[f] = H(x, y).$$

с произвольными непрерывными граничными условиями.

Исследованию разрешимости уравнений, связанных с гауссовой кривизной посвящена классическая работа А.Д. Александрова [1]. В этой работе найдены условия существования графиков с заданной неотрицательной гауссовой кривизной. А в работе А.В. Погорелова [7] доказан принцип максимума для уравнений типа

$$\theta(\nabla f, f, x) \det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\| = \varphi(x),$$

из которого следует, при выполнении определенных условий эллиптичности, единственность решения задачи Дирихле. Таким образом, при выполнении определенных условий поверхность графика функций однозначно определяется значениями средней и гауссовой кривизной и своими граничными значениями. Эти факты дают нам основания считать возможным применение операторов средней и гауссовой кривизны для вычисления характеристик изображений по ниже приводимой схеме. Ранее похожая схема была описана в работе [5], в которой источником признаков были выбраны интегральные преобразования функции яркости $f(x, y)$.

2. Алгоритм вычисления признаков изображений на основе операторов кривизны

Будем предполагать, что каждая компонента цвета изображения представлена функцией $z = f(x, y)$, заданной в прямоугольной области $\Omega = [0, W] \times [0, H]$. Для получения набора признаков изображения выполняем следующие действия с каждой цветовой компонентой.

1. **Инициализация.** Задаем параметры алгоритма: количество блоков n, m, на которые разбивается изображение и вычисляются размеры этих блоков w, h.
2. **Вычисление приближенных значений производных.** Используя конечно-разностную аппроксимацию, вычисляем величины

$$f_x,\ f_y,\ f_{xx},\ f_{xy}\ , f_{yy}.$$

3. **Вычисление кривизны.** Согласно формулам (1), (2) вычисляются приближенные значения гауссовой $K(x, y)$ и средней кривизны $H(x, y)$ графика функции яркости $z = f(x, y)$.
4. **Вычисление признаков.** Для каждого блока пикселей размера (w, h) вычисляем усредненное значение каждой кривизны. Именно,

$$k_{ij} \approx \frac{1}{wh} \int\limits_{iw}^{(i+1)w} dx \int\limits_{jh}^{(j+1)h} K(x, y)dy,$$

$$h_{ij} \approx \frac{1}{wh} \int\limits_{iw}^{(i+1)w} dx \int\limits_{jh}^{(j+1)h} H(x, y)dy.$$

5. **Добавление граничных значений.** К вычисленным признакам k_{ij}, h_{ij} добавляем приближенные средние по граничным отрезкам блоков:

$$q_i^0 \approx \frac{1}{w} \int\limits_{iw}^{(i+1)w} K(x, 0)dx, \quad q_i^1 \approx \frac{1}{w} \int\limits_{iw}^{(i+1)w} K(x, H)dx,$$

$$q_j^2 \approx \frac{1}{h} \int\limits_{jh}^{(j+1)h} K(0, y)dy, \quad q_j^3 \approx \frac{1}{h} \int\limits_{jh}^{(j+1)h} K(W, y)dy.$$

Аналогичные величины вычисляются и для средней кривизны.

3. Программная реализация алгоритма

При анализе изображений для изучения кривизны функция f задается дискретно, а ее производные вычисляются с помощью операторов Собеля. Оператор Собеля представляет собой дискретный дифференциальный оператор, предназначенный для вычисления приближенных значений производных различных порядков для функции яркости пикселей [4]. На практике указанный оператор применяется для определения точек резкого изменения яркости изображения. В результате определения таких точек можно достаточно точно определять границы объектов изображения.

Чтобы вычислить производные второго порядка, оператор Собеля последовательно применяется к уже полученным производным первого порядка. Алгоритм вычисления признаков реализован на языке Python с использованием библиотек NumPy [9] и OpenCV [10].

```
def extract_gaussian_features(I, m=8, n=8, ksize=3):
    I_x = cv2.Sobel(I, cv2.CV_64F, 1, 0, ksize=ksize)
    I_y = cv2.Sobel(I, cv2.CV_64F, 0, 1, ksize=ksize)
    I_xx = cv2.Sobel(I_x, cv2.CV_64F, 1, 0, ksize=ksize)
    I_yy = cv2.Sobel(I_y, cv2.CV_64F, 0, 1, ksize=ksize)
    I_xy = cv2.Sobel(I_x, cv2.CV_64F, 0, 1, ksize=ksize)

    K =
```



Рис. 1. Примеры изображений из набора данных «cats and dogs»

```
    (I_xx * I_yy - I_xy ** 2) / (1 + I_x ** 2 + I_y ** 2)**2

# Гауссова кривизна

height, width = I.shape
block_height = height // m
block_width = width // n

k = []
for i in range(m):
    for j in range(n):
        start_i = i * block_height
        end_i = (i + 1) * block_height
        start_j = j * block_width
        end_j = (j + 1) * block_width

        block = K[start_i:end_i, start_j:end_j]
        result = np.sum(block) / (block_width * block_height)
        k.append(result)

dx = height // n # Параметры для шага
dy = width // m
```

```
k += list(I[0, ::dx]) # Верхняя граница
k += list(I[-1, ::dx]) # Нижняя граница
k += list(I[::dy, 0]) # Левая граница
k += list(I[::dy, -1]) # Правая граница

return np.array(k)
```

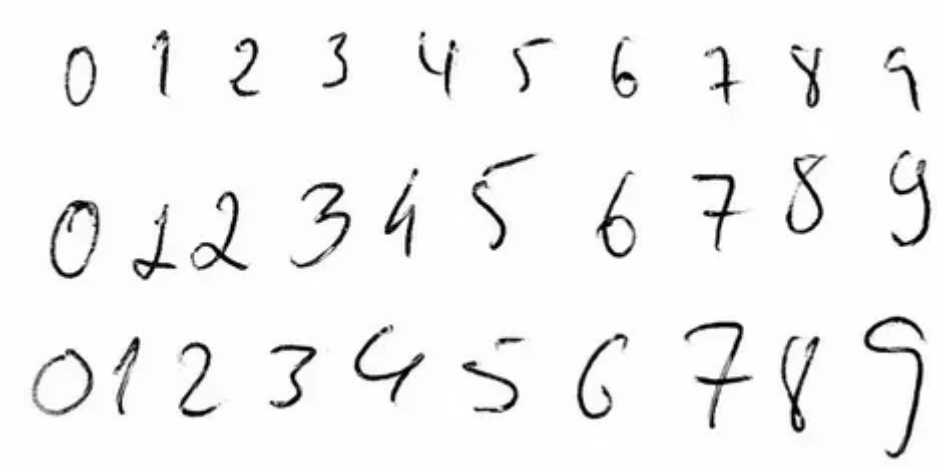


Рис. 2. Примеры изображений из набора данных MNIST

Первым шагом с помощью библиотеки OpenCV вычисляются первые и вторые производные через оператор Собеля. Размер ядра Собеля, называемый ksize, подбирается экспериментально, чтобы найти оптимальное значение.

Затем вычисляется гауссова или средняя кривизна в зависимости от того, какая из них используется в конкретном эксперименте. Эти вычисления производятся поэлементно для каждого пикселя, в результате чего формируется матрица кривизны K того же размера, что и исходное изображение.

Далее изображение разбивается на прямоугольные блоки размером $block_width \times$ $\times block_height$. Для каждого блока вычисляется сумма значений кривизны, которая затем нормируется на $block_width \cdot block_height$. Это позволяет уменьшить размерность матрицы пикселей.

К итоговым признакам добавляются граничные пиксели, что компенсирует потерю информации при вычислении.

4. Тестирование алгоритма

Оценка качества алгоритма проходила на основе следующих ML-алгоритмов: наивного байесовского классификатора, метода k-ближайших соседей, метода опорных векторов и метода решающих деревьев.

Для проведения экспериментов использовались три датасета: датасет автомобилей, включающий изображение автомобилей и других объектов, датасет MNIST, состоящий из рукописных цифр, и датасет кошек и собак.

Набор данных MNIST состоит из 60 000 образцов обучающей выборки и 10 000 проверочных образцов. Набор изображений кошек и собак содержит 9 167 для обучения и 1 111 об-

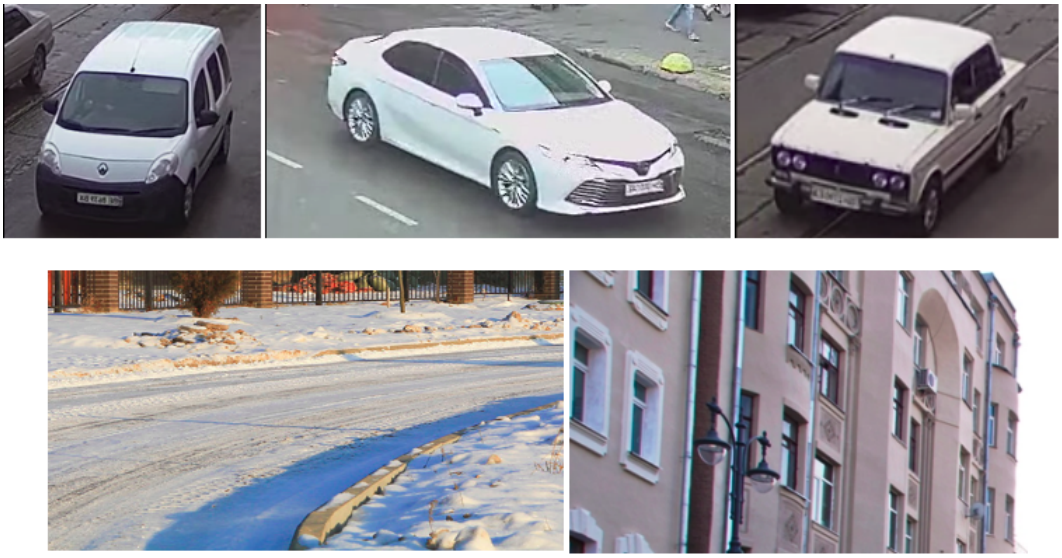


Рис. 3. Примеры изображений из набора данных «cars – not cars»

разцов для тестирования. Полный набор изображений для обнаружения автомобилей состоит из 2 414 изображений для обучения и 1 138 – для тестирования.

В таблицах 1–4 представлены усредненные результаты 30 экспериментов для различных комбинаций признаков и методов классификации.

Таблица 1. **Наивный байесовский классификатор**

Датасет	**Гауссова кривизна, %**	**Средняя кривизна, %**	**Гауссова + средняя, %**
Кошки/собаки	67	58	67
MNIST	73	58	72
Автомобили	79	75	79

Таблица 2. **Метод *k*-ближайших соседей (kNN)**

Датасет	**Гауссова кривизна, %**	**Средняя кривизна, %**	**Гауссова + средняя, %**
Кошки/собаки	63	55	62
MNIST	60	85	–
Автомобили	90	81	90

Таблица 3. **Метод опорных векторов (SVM)**

Датасет	**Гауссова кривизна, %**	**Средняя кривизна, %**	**Гауссова + средняя, %**
Кошки/собаки	62	58	62
MNIST	61	90	–
Автомобили	88	90	88

Таблица 4. **Решающие деревья**

Датасет	**Гауссова кривизна, %**	**Средняя кривизна, %**	**Гауссова + средняя, %**
Кошки/собаки	57	56	57
MNIST	79	85	79
Автомобили	87	81	84

Приведем также значения гиперпараметров настроек используемых классификаторов.

Таблица 5. **Настройки гиперпараметров классификаторов**

Классификатор	**Параметры**
kNN	n_neighbors=5
Байесовский классификатор	GaussianNB
Решающие деревья	max_depth=11
SVM	kernel='linear'

В ходе исследования было выявлено, что метод k-ближайших соседей демонстрирует наилучшую точность с использованием гауссовой кривизны, достигая 90 % на датасете автомобилей. Также стоит отметить высокую точность метода опорных векторов.

В зависимости от типа кривизны были сделаны следующие выводы:

- Гауссова кривизна лучше работает на датасете машин (до 90 %) и на датасете MNIST (до 79 %).
- Средняя кривизна более эффективна на датасете MNIST (до 90 % с использованием метода опорных векторов).

Анализ по датасету позволил сделать следующие выводы:

- Автомобили. Наилучшие результаты (90 %) были достигнуты с помощью методов ближайших соседей и опорных векторов. Предположительно, это связано с тем, что автомобили имеют четкую геометрическую форму, хорошо описываемую кривизной.
- MNIST. Максимальный результат был получен с использованием средней кривизны (90 % с опорными векторами).
- Кошки и собаки. Результаты сравнения оказались относительно невысокими (максимум 67 % с байесовским классификатором). Это объясняется тем, что шерсть животных не позволяет четко выделить границы, что затрудняет выделение признаков.

Описанные выше алгоритмы реализованы на языке программирования Python. Все программные модули доступны в открытом репозитории одного из авторов статьи по адресу https://https://github.com/KlyachinVA/CurvatureFeatures. Для скачивания репозитория в свой локальный репозиторий достаточно воспользоваться командой

```
git clone git@github.com:KlyachinVA/CurvatureFeatures.git
```

В каталоге dataset репозитория лежат файлы неполного набора данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А. Д. Задача Дирихле для уравнения $Det||z_{ij}|| = \varphi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$.I / А. Д. Александров // Вестник ЛГУ. Сер. Математики, мех. и астрон. – 1958. – Т. 1, № 1. – С. 5–24.

2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 464 с.

3. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2012. – 1104 с.

4. Горяинов, С. И. Использование оператора Собеля для выделения контуров изображений отпечатков пальцев / С. И. Горяинов // Наука XXI века: проблемы, поиски, решения : материалы XL науч.-практ. конф., г. Миасс, 22 апреля 2016 г. – Миасс : Геотур. – 2016. – С. 27–31.

5. Клячин, А. А. Метод интегральных преобразований в решении задачи обнаружения малогабаритных транспортных средств на изображениях / А. А. Клячин, В. А. Клячин // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2024. – Т. 27, № 4. – С. 23–38. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.3

6. Лукашевич, М. М. Цифровая обработка изображений и распознавание образов / М. М. Лукашевич. – Минск : БГУИР, 2023. – 72 с.

7. Погорелов, А. В. Принцип максимума для обобщенных решений уравнения $\theta(\nabla z, z, x)\det||z_{ij}|| = \varphi(x)$ / А. В. Погорелов // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 5. – С. 1064–1066.

8. Чернавский, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Чернавский. – URL: http://higeom.math.msu.su/people/chernavski/chernav-difgeom2011.pdf

9. NumPy: The Fundamental Package for Scientific Computing with Python. – URL: https://numpy.org/

10. OpenCV: Get Started. – URL: https://opencv.org/get-started/

REFERENCES

1. Alexanderov A.D. The Dirichlet Problem for the Equation $Det||z_ij|| = \varphi(Z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$.I. *Vestnik LGU. Ser. Matematiki, mekh. i astron.* [A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers], 1996, vol. 1, no. 1, pp. 251-272.

2. Gilbarg D., Trudinger M. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. 464 p.

3. Gonsales R., Vuds R. *Digital Image Processing*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2012. 1104 p.

4. Goryainov S.I. Using the Sobel Operator for Edge Detection in Fingerprint Images. *Nauka XXI veka: problemy, poiski, resheniya: materialy XL nauch.-prakt. konf., g. Miass, 22 aprelya 2016 g. – Miass: Geotur*, 2016, pp. 27-31.

5. Klyachin A.A., Klyachin V.A. The Method of Integral Transformations in Solving the Problem of Detecting Small-Sized Vehicles in Images. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2024, vol. 27, no. 4, pp. 23-38. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.3

6. Lukashevich M.M. *Digital Image Processing and Pattern Recognition*. Minsk, BGUIR, 2023. 72 p.

7. Pogorelov A.V. The Maximum Principle for Generalized Solutions of the Equation $\theta(\nabla z, Z, x)\det||z_ij|| = \varphi(X)$. *Dokl. AN SSSR* [Doklady Mathematics], 1983, vol. 271, no. 5, pp. 1064-1066.

8. Chernavskiy A.V. Differential Geometry. URL: http://higeom.math.msu.su/people/-chernavski/chernav-difgeom2011.pdf

9. *NumPy: The Fundamental Package for Scientific Computing with Python*. URL: https://numpy.org/

10. *OpenCV: Get Started*. URL: https://opencv.org/get-started/

ON THE APPLICATION OF CURVATURE OPERATORS TO PROBLEMS OF OBJECT RECOGNITION IN IMAGES

Anastasia Y. Barkova

Master's Student of the MOSm-251 Group,
Volgograd State University
barkova.anastasia2015@yandex.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Vladimir A. Klyachin

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of Department
of Computer Sciences and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
klchnv@mail.ru, klyachin.va@volsu.ru
https://orcid.org/0000-0003-1922-7849
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. This paper is dedicated to the solution of the problem of classifying objects in images using classical machine learning methods. Approximate values of the Gaussian and mean curvatures of the surface of the luminance function plot for each color component of a point in the image were chosen as sources for generating the feature vector. The basis for applying these values is the classical theorems on the uniqueness and stability of solutions to Dirichlet boundary value problems for the corresponding partial differential equations. The above approximate values are calculated using Sobel operators, an implementation of which is built into the OpenCV computer vision library. Testing was conducted on several datasets using various machine learning methods. The results demonstrated the high effectiveness of the proposed method for detecting objects with distinct shapes.

Key words: image classification, Gaussian curvature, mean curvature, Sobel operator, machine learning.