DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.4

УДК 519.6+004.032.26
ББК 22.19+26.21

Дата поступления статьи: 20.04.2026
Дата принятия статьи: 27.07.2026

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ОДИНОЧНОГО ДИСЛОКАЦИОННОГО ИСТОЧНИКА ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ [1]

Дарья Фаритовна Сергиенко

Младший научный сотрудник лаборатории акустических исследований;
аспирант 3-го года обучения кафедры информатики и математики,
Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН;
Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга
sergienko@ikir.ru
https://orcid.org/0009-0008-6512-4537
ул. Мирная, 7, 684034 с. Паратунка, Российская Федерация;
ул. Пограничная, 4, 683032 г. Петропавловск-Камчатский, Российская Федерация

Цитирование: Сергиенко Д. Ф. Сравнительный анализ нейросетевых методов решения модели одиночного дислокационного источника геоакустической эмиссии // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 2. С. 53–71.
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.4

Citation: Sergienko D.F. Comparative Analysis of Neural Network Methods for Solving the Model of a Single Dislocation Source of Geoacoustic Emission. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 2, pp. 53-71. (in Russian).
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.4

Аннотация. В данной работе представлен сравнительный анализ вычислительных методов для моделирования одиночного дислокационного источника излучения геоакустической эмиссии – осциллятора Берлаге. Используются численный метод Розенброка четвертого порядка точности, параллельная модификация физико-информированной нейронной сети на три субдомена (TriDomainPINN), а также нейронная сеть на основе полиномов Лежандра (LeNN) для решения модели геоакустической эмиссии. Параллельная версия PINN позволяет повысить эффективность построения решения и сократить время обучения за счет декомпозиции области моделирования. Все алгоритмы реализованы на языке Python с использованием библиотеки PyTorch. Применяются механизм ранней остановки обучения сетей и распределение точек коллокации по закону Чебышева. Для каждого метода проведена оценка точности, скорости сходимости и вычислительной эффективности. Численные эксперименты показывают, что полиномиальная сеть Лежандра обеспечивает высокую точность аппроксимации при значительном сокращении вычислительных затрат и времени.

Ключевые слова: полиномиальные нейронные сети, PINN, MLP, LeNN, импульс Берлаге, ортогональные полиномы, машинное обучение, аппроксимация сигналов.

© Сергиенко Д.Ф., 2026

Введение

Геоакустическая эмиссия является одним из ключевых информативных полей для диагностики напряженно-деформированного состояния горных пород и прогнозирования динамических явлений в геосреде. В данной работе рассматривается предложенная авторами [1] модель одиночного дислокационного источника геоакустической эмиссии, построенная на основе аналитической функции Берлаге. Модель импульса Берлаге и ее модификации широко применяются для решения широкого круга задач геофизики и сейсмоакустики [20; 24–26], однако предложенная в данной работе модель дислокационного источника геоакустической эмиссии исследуется впервые. Модель описывает процесс излучения упругих волн при сдвиговом разрушении микрообъема материала. Математическая модель сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с заданными начальными условиями, которое описывает эволюцию параметров источника во времени. Точность и вычислительная эффективность решения этой модели непосредственно влияют на достоверность последующей обработки сигналов.

В последние годы искусственные нейронные сети активно применяются в вычислительной математике для решения дифференциальных уравнений. Наряду с классическими численными схемами, такими как методы Рунге-Кутты, получили развитие нейросетевые подходы, не требующие явной дискретизации расчетной области. Среди них выделяются многослойные персептроны (MLP), сети, основанные на физической информации (PINN) [16; 21] и их модификации (DDR-PINN [13], FBPINNs [15] и т. д.), однослойные сети на основе функциональной связанности (FLANN), в которых скрытый слой заменен расширением входного сигнала с помощью системы ортогональных полиномов, например, таких, как Чебышева [7], Лежандра [8; 12] и Лагерра [17]. Такие сети обладают более простой архитектурой, меньшим числом обучаемых параметров и высокой скоростью сходимости, что делает их привлекательными для решения прикладных задач. При этом важную роль играет эффективность параллельных вычислений, особенно при работе с большими объемами данных, что подтверждается исследованиями в области моделирования гравитационных систем [2] и многокомпонентных неравновесных сред [6]. В связи с этим возникает интерес к применимости перечисленных нейросетевых методов для решения модели одиночного дислокационного источника геоакустической эмиссии – задачи, характеризующейся жесткостью, многомасштабностью по времени и быстрыми изменениями решения.

На основании проведенного исследования в [3] установлено, что базовые физико-информированные нейронные сети (PINN) демонстрируют низкую точность и требуют значительного времени обучения сети (43–46 с) с одним входным параметром. Мы представляем параллельную на три субдомена сеть, основанную на распределении точек коллокации по закону Чебышева, которая сокращает время обучения более, чем в 2 раза. Входной параметр сети расширен до двух переменных ($t, f \in [200, 300]$).

Практическая значимость ускорения вычислительных процедур обусловлена необходимостью решения широкого класса задач, связанных с мониторингом геоакустической эмиссии в реальном времени, где оперативная обработка больших объемов данных критична для своевременного обнаружения предвестников разрушения горных пород. Кроме того, высокая производительность метода важна для систем автоматизированного контроля, где требуется многократное пересчитывание модели при изменении входных параметров, а также в задачах инверсии, где время одного вычисления напрямую влияет на общую эффективность решения обратных задач.

Настоящая работа посвящена сравнительному анализу вычислительных методов реше-

ния модели одиночного дислокационного источника геоакустической эмиссии – параллельной модификации PINN, LeNN и численного метода Розенброка четвертого порядка точности. Метод Розенброка, согласно исследованию эффективности численных методов для данной модели, обеспечивает наилучшее сочетание точности и устойчивости при минимальной вычислительной погрешности [4]. Оценка методов производится по следующим критериям сравнения: точность решения (среднеквадратичная и максимальная относительная ошибка по сравнению с аналитическим решением); вычислительные затраты (время обучения для нейросетей и время интегрирования для метода Розенброка); устойчивость к выбору гиперпараметров (скорость обучения, порядок полинома, количество скрытых слоев / нейронов); сложность реализации и воспроизводимости результатов.

В статье приведено математическое описание модели одиночного дислокационного источника, обоснован выбор метода Розенброка, подробно изложены архитектуры TriDomain-PINN и LeNN применительно к решаемой задаче, представлены результаты численных экспериментов и проведен их анализ. В заключении сформулированы основные выводы и дальнейшие направления работ.

1. Постановка задачи. Модель Берлаге для одиночного дислокационного источника

Построим математическую модель одиночного дислокационного источника исходя из аналитической функции Берлаге. Функция Берлаге имеет следующий вид:

$$g(t) = A \cdot t^{n(p_{\max})\cdot\Delta} \cdot \exp\left(- \frac{n(p_{\max}) \cdot \Delta}{p_{\max} \cdot t_{end}}\, t \right) \cdot \sin(2\pi f t + \phi_0),$$
$$n = \frac{\ln 20}{\frac{1}{p_{\max}} - \ln \frac{1}{p_{\max}} - 1}, \tag{1}$$

где $A > 0$ – амплитуда импульса, от. ед., $A \in [0, 1]$; n – параметр, отвечающий за форму огибающей сигнала; $p_{\max} \in [0.01, 0.4]$ – положение максимума; Δ – крутизна огибающей сигнала, $\Delta \in [1.1, 5]$; $t \in [t_0, t_{end}]$ – время, с; $t_0 > 0$ – начальный момент времени, с; t_{end} – длительность импульса, с; $f \in [200, 20000]$ – частота заполнения, Гц; ϕ_0 – начальная фаза.

В настоящей работе аналитическая функция (1) служит эталоном для верификации и валидации численных и нейросетевых методов, позволяя объективно оценить их точность по статистическим метрикам MSE, RMSE и коэффициенту детерминации R^2, выявить систематические ошибки аппроксимации и обосновать выбор наиболее эффективного подхода.

Покажем, что аналитическая функция Берлаге, описывающая импульс дислокационного источника геоакустической эмиссии, удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка.

Для удобства записи введем параметры: $a = n \cdot p_{\max} \cdot \Delta$; $b = p_{\max} \cdot t_{end}$; $c = 2 \cdot \pi f$. Тогда функция (1) примет вид:

$$g(t) = A \cdot t^a \cdot e^{-\frac{a}{b}t} \cdot \sin(ct + \phi_0). \tag{2}$$

Продифференцируем данное выражение по времени. Используя правило дифференцирования произведения, получаем первую производную:

$$\dot{g}(t) = A \cdot t^{a-1} e^{-\frac{a}{b}t} \left[a \sin(ct + \phi_0) - \frac{a}{b} t \sin(ct + \phi_0) + ct \cos(ct + \phi_0) \right] =$$
$$= \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b} \right) g(t) + Ac \cdot t^a e^{-\frac{a}{b}t} \cos(ct + \phi_0). \tag{3}$$

Продифференцируем полученное выражение еще раз для нахождения второй производной:

$$\ddot{g}(t) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) g(t)\right] + \frac{d}{dt}\left[Ac \cdot t^a e^{-\frac{a}{b}t} \cos(ct + \phi_0)\right] = \left(-\frac{a}{t^2}\right) g(t) + \\ + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) \dot{g}(t) + Ac \cdot t^{a-1} e^{-\frac{a}{b}t}\left[(a - \frac{a}{b}t)\cos(ct + \phi_0) - ct \sin(ct + \phi_0)\right]. \quad (4)$$

Сгруппируем члены, содержащие $\sin(ct + \phi_0)$ и $\cos(ct + \phi_0)$. Выражая тригонометрические функции через $g(t)$ и ее производную, после алгебраических преобразований получаем:

$$\ddot{g}(t) = \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) \dot{g}(t) - \left(\frac{a}{t^2} + c^2\right) g(t) + \\ + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) Ac \cdot t^a e^{-\frac{a}{b}t} \cos(ct + \phi_0). \quad (5)$$

Начальные условия получаются подстановкой $t = t_0$ в выражения для $g(t)$ и $\dot{g}(t)$:

$$g(t_0) = A \cdot t_0^a e^{-\frac{a}{b}t_0} \sin(ct_0 + \phi_0), \quad (6)$$

$$\dot{g}(t_0) = \left(\frac{a}{t_0} - \frac{a}{b}\right) g(t_0) + Ac \cdot t_0^a e^{-\frac{a}{b}t_0} \cos(ct_0 + \phi_0). \quad (7)$$

Таким образом, из исходной аналитической функции (1) получили математическую модель, описывающую одиночный дислокационный источник геоакустической эмиссии:

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) \dot{g}(t) - \left(\frac{a}{t^2} + c^2\right) g(t) + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) Act^a e^{-\frac{a}{b}t} \cos(ct + \phi_0), \\ g(t_0) = At_0^a e^{-\frac{a}{b}t_0} \sin(ct_0 + \phi_0), \\ \dot{g}(t_0) = \left(\frac{a}{t_0} - \frac{a}{b}\right) g(t_0) + Act_0^a e^{-\frac{a}{b}t_0} \cos(ct_0 + \phi_0). \end{cases} \quad (8)$$

При больших временах $t \to \infty$ осциллятор Берлаге (8) переходит в гармонический осциллятор с трением, характер решения которого определяется соотношением параметров затухания $\gamma = a/2b$ и собственной частоты c. Возможны три качественно различных режима: колебательное ($\gamma^2 < c^2$), критическое ($\gamma^2 = c^2$) и апериодическое затухание (перезатухание) ($\gamma^2 > c^2$) [5].

В рамках рассматриваемой модели предполагается, что излучение происходит из одной пространственной точки (точечный источник), а регистрируемый сигнал представляет собой временную зависимость амплитуды упругого колебания $g(t)$. Процесс характеризуется колебательным характером излучения, многомасштабностью по времени и жесткостью. Многомасштабность проявляется в наличии как высокочастотного заполнения импульса с периодом $T = 1/f$, так и медленно меняющейся огибающей, определяемой параметрами a и b, которые описывают процессы нарастания и затухания амплитуды (см. рис. 1). Такое различие масштабов обусловливает жесткость задачи: для корректного разрешения быстрых осцилляций необходим малый шаг интегрирования, тогда как для описания огибающей достаточно более грубой сетки, что создает дополнительные требования к выбору вычислительных методов. Математически задача сводится к линейному осциллятору Берлаге с непостоянными коэффициентами.

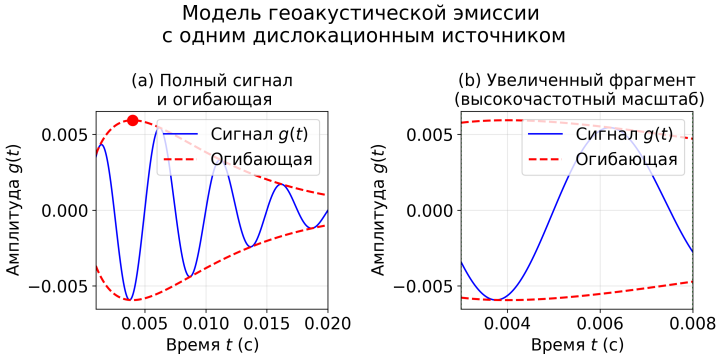


Рис. 1. Импульс геоакустической эмиссии

Для количественной оценки жесткости задачи (8) рассмотрим однородную часть системы в окрестности больших времен ($t \to \infty$). Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + \frac{a}{b}\lambda + c^2 = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$, где $\gamma = a/2b$ — коэффициент затухания, $\omega = \sqrt{c^2 - \gamma^2}$ — собственная частота. Отношение характерных времен определяется числом жесткости:

$$S = \frac{\omega}{2\pi\gamma}. \tag{9}$$

Для параметров ($a = 0.753$, $b = 0.004$, $c = 1256.64$) получаем $\gamma = 94.125$, $\omega \approx 1256.64$, тогда $S \approx 2.12$, дальнейшее увеличение частоты заполнения приводит к существенному росту S: при $f = 1000$ Гц получаем $S \approx 10.64$, а при $f = 4000$ Гц – $S \approx 42.56$ (рис. 2). Таким образом, задача переходит в класс жестких.

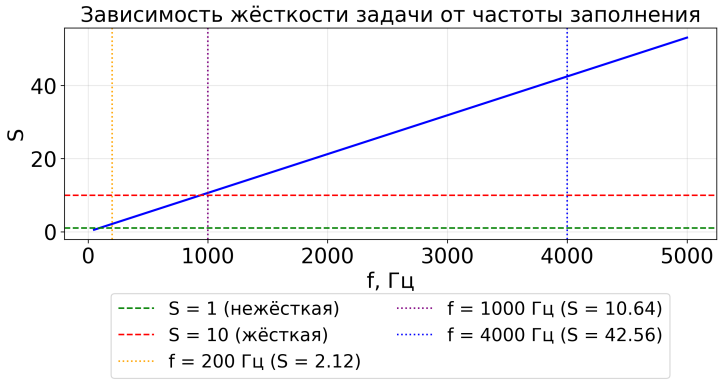


Рис. 2. Зависимость жесткости модели (8) от частоты заполнения f

Ранее в работе [19] были подтверждены диапазоны параметров модели Берлаге, соответствующие экспериментальным импульсам с помощью параметрической идентификации модели на экспериментальных данных, полученных в комплексном геофизическом пункте наблюдения «Карымшина» с использованием двухэтапного алгоритма, сочетающего методы глобальной (диф-ференциальная эволюция) и локальной (Нелдера-Мида) оптимизации. Диапазоны параметров были установлены в результате многолетних экспериментов, посвященных методам разреженной аппроксимации импульсов геоакустической эмиссии словарями Берлаге и Гаусса [20].

2. Вычислительные методы

В данном разделе представлены три подхода к моделированию импульса Берлаге: численный метод Розенброка четвертого порядка точности, трехдоменная физико-информированная нейронная сеть (TriDomainPINN) и полиномиальная сеть Лежандра (LeNN). Нейросетевые методы реализованы на платформе PyTorch и используют единые принципы нормализации данных и распределения точек коллокации. Все численные подходы сопоставляются с тестовым (точным) решением (1) осциллятора Берлаге (8).

2.1. Метод Розенброка четвертого порядка точности

Согласно работе на исследование эффективности численных методов (реализованного вручную метода Розенброка четвертого порядка точности, методов Radau, BDF, LSODA библиотеки SciPy) [4], в ходе ряда экспериментов было установлено, что метод Розенброка стабилен при различных значениях шага и имеет высокий порядок точности (близкий к 4) по проведенной оценке правила Рунге даже при грубых допусках относительной $rtol = 10^{-3}$ и абсолютной ошибки $atol = 10^{-3}$. В данной работе метод Розенброка четвертого порядка точности реализован по схеме [18]. Данный метод относится к классу линейных многошаговых методов и обладает свойством A-устойчивости, что особенно важно для решения жестких систем дифференциальных уравнений.

В реализации используется встроенная локальная оценка погрешности, основанная на сравнении двух приближений разного порядка:

$$\delta_{n+1}^{(\text{est})} = \left\| \sum_{i=1}^{4} (b_i - \hat{b}_i)\mathbf{k}_i \right\|,$$

где b_i – веса основного метода четвертого порядка, $\hat{b}_i$ – веса встроенного метода 3-го порядка, $\mathbf{k}_i$ – стадии метода Розенброка.

Локальная погрешность на каждом шаге вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_n = |b_1^{\text{err}} k_1 + b_2^{\text{err}} k_2 + b_3^{\text{err}} k_3 + b_4^{\text{err}} k_4|, \quad b_i^{\text{err}} = b_i - \hat{b}_i. \tag{10}$$

Качество вычислений оценивается с помощью трех статистических характеристик локальной погрешности: максимальная погрешность $\varepsilon_{\max} = \max_n \varepsilon_n$, средняя погрешность $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n$ и медианная погрешность $\tilde{\varepsilon} = \text{median}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$. Критерием точности является выполнение неравенства:

$$\varepsilon_{\max} < \varepsilon_{\text{tol}}, \quad \varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-6} \cdot A, \tag{11}$$

где A – амплитуда сигнала. Данный критерий обеспечивает относительную точность не хуже $10^{-4}\%$ от амплитуды [11].

2.2. Архитектура сети TriDomainPINN

Для повышения точности и ускорения обучения реализованной ранее нейронной сети PINN [3] предложена параллельная реализация PINN с декомпозицией на три специализированных субдомена, каждый из которых обучается на отдельном ядре CPU с использованием модуля `torch.multiprocessing` и модификацией распределения точек коллокации по

закону Чебышева. Архитектура сети `TriDomainPINN` (см. рис. 3) состоит из общего входного слоя (t, f) с нормализацией (LayerNorm) и активацией на полиномах Чебышева, трех параллельных субдоменов с разными функциями активации и выходного слоя, объединяющего выходы субдоменов. Для введения нелинейности на начальном этапе обработки данных используется активация Чебышева. Она работает с взвешенной суммой многочленов $T_n(x)$, причем входные данные предварительно преобразуются так, чтобы попасть в диапазон [-1, 1] (оптимальный для этой активации). Этот механизм реализован на общем входном слое сети сразу после LayerNorm.

Пусть $t \in \mathbb{R}$, $f \in [200, 300]$ – входные скаляры, а $g(t, f)$ – соответствующие значения функции Берлаге. Перед подачей в сеть оба компонента нормализуются:

$$x_{\text{norm}} = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}, \quad x \in \{t, f, g, \}, \quad \mu_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)^2}, \qquad (12)$$

где μ_x, σ_x – средние и стандартные отклонения обучающей выборки.

Сигнал преобразуется полносвязным слоем с последующей LayerNorm и активацией на полиномах Чебышева:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \text{ChebyshevActivation}\left(\text{LayerNorm}\left(\mathbf{W}_{\text{in}} t_{\text{norm}} + \mathbf{b}_{\text{in}}\right)\right), \qquad (13)$$

где $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{256\times 1}$, $\mathbf{b}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{256}$. Активация Чебышева вычисляется как взвешенная сумма полиномов первого рода:

$$\text{ChebyshevActivation}(x) = \sum_{n=0}^{4} w_n T_n(\tanh(x)).$$

Выход $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ разветвляется на три независимых субдомена с идентичной структурой:

$$\mathbf{o}_k = \text{Linear}_{256\to 64}\left(\text{Activation}_k\left(\text{LayerNorm}\left(\text{Linear}_{256\to 256}(\mathbf{x}^{(0)})\right)\right)\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

Каждый субдомен специализируется на своей частотной области через различные функции активации. Выходы субдоменов объединяются в вектор $\mathbf{o}_{\text{comb}} \in \mathbb{R}^{192}$, после чего полносвязный слой формирует предсказание:

$$\hat{g}_{\text{norm}} = \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{o}_{\text{comb}} + b_{\text{out}}, \quad \mathbf{W}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{1\times 192}.$$

Конечный результат субдоменов денормализуется: $\hat{g} = \hat{g}_{\text{norm}} \cdot \sigma_g + \mu_g$.

Обучение минимизирует комбинированную функцию потерь:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda_{\text{physics}}\mathcal{L}_{\text{physics}},$$

где $\mathcal{L}_{\text{data}}$ – среднеквадратичная ошибка предсказания, λ_{physics} – физический штраф, $\mathcal{L}_{\text{physics}}$ – невязка дифференциального уравнения:

$$\mathcal{L}_{\text{physics}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial \hat{g}}{\partial t}\right|_{t_i} - g'_{\text{analytic}}(t_i)\right)^2.$$

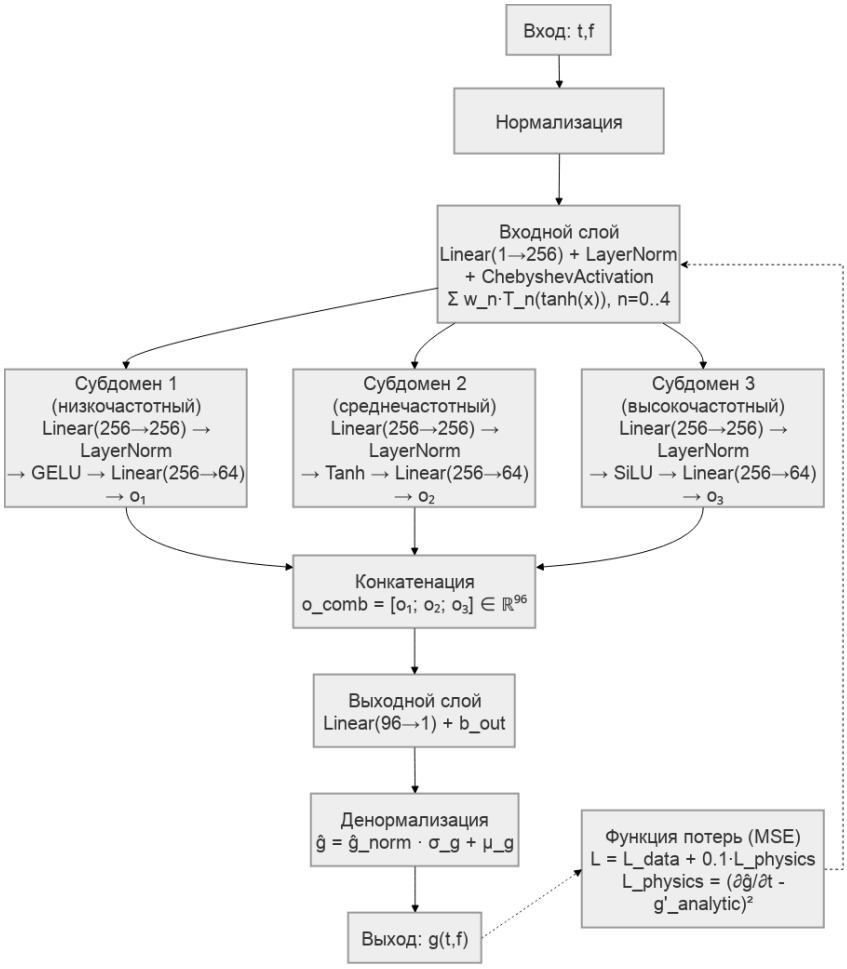


Рис. 3. Архитектура сети TriDomainPINN

Для каждого субдомена генерируется специализированная выборка. В первом субдомене (низкочастотном) 70 % точек сгущаются в начале интервала $[t_0, t_{\text{end}}/3]$. Во втором субдомене (среднечастотном) 60 % точек сгущаются в окрестности пика $[t_{\text{peak}} - 3w, t_{\text{peak}} + 3w]$, где w – ширина на полувысоте. В третьем субдомене (высокочастотном) 70 % точек расположено в конце интервала $[2t_{\text{end}}/3, t_{\text{end}}]$. Функция активации для всех субдоменов выбрана SiLU.

Параллельное обучение реализовано с использованием модуля `torch.multiprocessing`. Три процесса (rank 0, 1, 2) запускаются на отдельных CPU-ядрах, каждый выполняет функцию `train_pinn_domain` со своей стратегией генерации точек коллокации. Результаты обучения (состояния моделей, параметры нормализации, история потерь) собираются через очередь `mp.Queue()`. По завершении формируется ансамбль `EnsemblePINN`, объединяющий предсказания субдоменов с весами $[0.4, 0.4, 0.2]$.

2.3. Полиномиальная сеть Лежандра

На рисунке 5 изображена структура однослойной полиномиальной нейронной сети, которая состоит из двух входных узлов (t, f), одного выходного слоя и функционального блока расширения на основе ортогональных полиномов Лежандра. В отличие от многослойного персептрона, где активация применяется поэлементно к выходу линейного слоя, в данной реализации полиномы Лежандра вычисляются от нормализованного входа и взвешенно сум-

мируются с обучаемыми весами.

Полиномиальная сеть Лежандра LeNN представляет аппроксимируемую функцию в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\hat{g}(t, f) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n P_n\left(\xi(t)\right),$$

где $\xi(t) = 2\frac{t-t_0}{t_{\text{end}}-t_0} - 1$ – линейное отображение временного интервала $[t_0, t_{\text{end}}]$ на $[-1, 1]$, α_n – обучаемые коэффициенты. Полиномы Лежандра (рис. 4) определяются рекуррентным соотношением:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

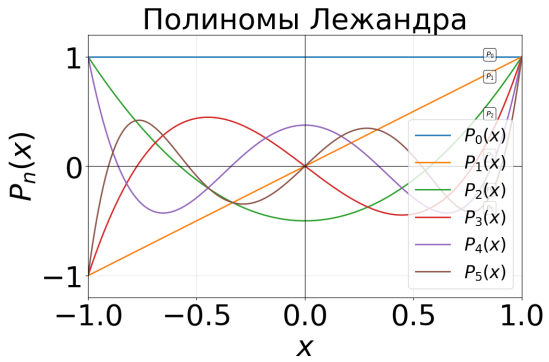


Рис. 4. Полиномы Лежандра

Благодаря ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

они минимизируют корреляцию между признаками, что помогает снизить переобучение и улучшить обобщающую способность модели.

Для LeNN также применяется нормализация входных данных (12), а точки коллокации задаются по закону Чебышева. LeNN обучается путем минимизации среднеквадратичной ошибки:

$$\mathcal{L}_{\text{LeNN}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n P_n(\xi(t_j)) - g_{\text{true}}(t_j)\right)^2,$$

где M – количество точек коллокации. Отсутствие необходимости в вычислении производных внутри сети (коэффициенты α_n не зависят от t) обеспечивает высокую вычислительную эффективность алгоритма.

2.4. Обучение и оценка эффективности сетей

Обучение сетей выполняется с использованием оптимизатора AdamW с начальной адаптивной скоростью $lr = 0.03$ и коэффициентом регуляризации $weight_decay = 10^{-5}$. Для адаптации скорости обучения применяется планировщик `ReduceLROnPlateau` с параметрами

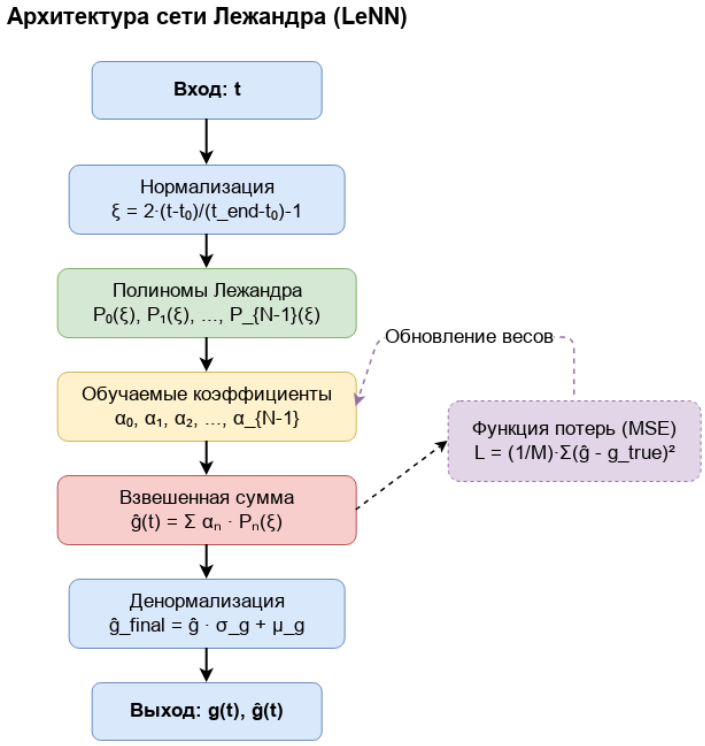


Рис. 5. Архитектура сети LeNN

$factor = 0.5$ и $patience = 10$. Размер мини-батча составляет 256, градиентный клиппинг ограничен нормой $max_norm = 1.0$. Для экономии памяти используется тип данных `float32`. Для предотвращения переобучения реализован механизм ранней остановки (early stopping) с $patience = 30$ и минимальным улучшением $min_delta = 10^{-7}$.

Важным аспектом обучения является выбор точек коллокации – точек в области расчета, где вычисляется невязка дифференциального уравнения. Хотя наиболее распространенным подходом является равномерное распределение точек, в данной работе используется распределение по закону Чебышева. Точки коллокации задаются как корни многочленов Чебышева первого рода, что обеспечивает их сгущение к границам интервала и снижает эффект Рунге:

$$t_k = \frac{t_0 + t_{\text{end}}}{2} + \frac{t_{\text{end}} - t_0}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Выбранное распределение обеспечивает высокую точность аппроксимации на границах расчетной области и устойчивость к осцилляциям.

В архитектурах сетей используются различные функции активации (рис. 6), среди которых: гиперболический тангенс (Tanh), сигмоидная линейная функция (SiLU), LeakyReLU, SiLU, GELU (Gaussian Error Linear Unit), определяемая как:

$$\text{GELU}(x) = x \cdot \Phi(x) = \frac{1}{2}x\left[1 + \text{erf}\left(x/\sqrt{2}\right)\right], \tag{15}$$

где $\Phi(x)$ – кумулятивная функция распределения стандартного нормального закона, erf – функция ошибки. Функция GELU, предложенная в статье «Gaussian Error Linear Units, GELUs» [10], в отличие от других функций активации, основана на сглаженной аппроксимации кумулятивной функции стандартного нормального распределения. В данной работе в архитектуре TriDomainPINN применяется активация SiLU.

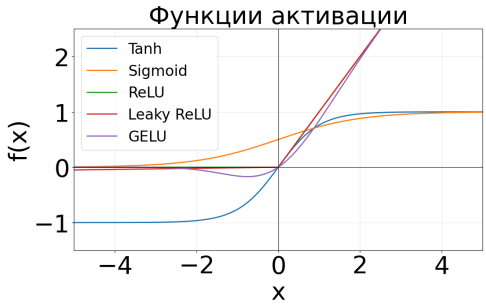


Рис. 6. Функции активации

Для предотвращения переобучения реализован механизм ранней остановки (early stopping) через класс `EarlyStopping` с параметрами: $patience = 30$ (количество эпох без улучшения, после которого обучение останавливается) и $min_delta = 10^{-7}$ (минимальное улучшение валидационной потери для обновления «лучшей» модели).

Обновление лучшего значения валидационной ошибки вычисляется как

$$L_{\text{best}}^{(k)} = \begin{cases} L_{\text{val}}^{(k)}, & \text{если } L_{\text{val}}^{(k)} < L_{\text{best}}^{(k-1)} - \delta, \\ L_{\text{best}}^{(k-1)}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Счетчик эпох обновляется без улучшения согласно следующему правилу:

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{если } L_{\text{val}}^{(k)} < L_{\text{best}}^{(k-1)} - \delta, \\ c^{(k-1)} + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Условие остановки обучения имеет вид:

$$c^{(k)} \geq patience.$$

Для оценки качества аппроксимации методов относительно аналитической функции (1) использовались следующие метрики:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(g_i - \hat{g}_i)^2, \quad \text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}}, \quad \text{NRMSE} = \frac{\text{RMSE}}{\max(g) - \min(g)} \cdot 100\%,$$
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(g_i - \hat{g}i)^2}{\sum i = 1^N (g_i - \bar{g})^2}, \quad \xi_{\max} = \max_i |g_i - \hat{g}_i|, \tag{16}$$

где MSE – среднеквадратичная ошибка; RMSE – корень из среднеквадратичной ошибки, NRMSE – нормированная среднеквадратичная ошибка; R^2 – коэффициент детерминации, $\xi_{\max}$ – максимальная абсолютная ошибка.

Для количественной оценки степени соответствия нейросетевых решений модели будем рассматривать невязку, которая определяется как разность между левой и правой частями уравнения при подстановке приближенного решения:

$$R(t) = \frac{dg_{NN}}{dt} - f(t, g_{NN}), \tag{17}$$

где g_{NN} – предсказание нейросети, а $f(t, g)$ – правая часть модели (8). В идеальном случае, когда нейросетевое решение точно совпадает с аналитическим, невязка $R(t) \equiv 0$. Таким образом, анализ невязки позволяет выявить области, где нейросеть не удовлетворяет физике процесса.

3. Результаты исследования

Эксперименты проводились в операционной системе Linux на процессоре AMD EPYC 7313 16-Core Processor с архитектурой x86_64. В распоряжении выделенного процесса находилось 8 логических ядер (потоков), одно физическое ядро и 24 ГБ оперативной памяти.

Таблица 1

Параметры математической модели (8)

Параметр	Пример 1	Пример 2	Пример 3
A	0.8	0.8	0.8
p_{max}	0.2	0.2	0.2
f,	200	250	300
Δ	3.0	3.0	3.0
a	0.75	0.75	0.75
b	0.004	0.004	0.004
c	1256.64	1570.796	1884.96
ϕ_0	0.0	0.0	0.0
n	1.25	1.25	1.25
t	$[10^{-3}; 2 \cdot 10^{-2}]$	$[10^{-3}; 5 \cdot 10^{-2}]$	$[10^{-3}; 2 \cdot 10^{-2}]$

Одним из ключевых преимуществ нейросетевых методов является возможность получения решения за миллисекунды после завершения обучения. В отличие от численных методов, требующих повторного интегрирования для каждого нового набора параметров, обученная нейросеть на нескольких наборах параметров дает предсказание практически мгновенно. Это особенно важно для задач, где требуется многократный расчет при варьировании параметров модели, например, при параметрической идентификации или в системах реального времени.

Для количественной оценки этого преимущества были проведены эксперименты численного решения модели для трех методов: TriDomainPINN, LeNN и метода Розенброка четвертого порядка. Измерения выполнялись на временной сетке из $N = 1800$ точек с количеством экспериментов для каждой частоты 50. Для нейросетей предсказание выполнялось после загрузки сохраненных моделей. Для метода Розенброка выполнялось полное численное интегрирование с шагом $h = 10^{-5}$ с. Результаты представлены в таблицах 2–5 и на рисунках 7–8.

В численных экспериментах использовались параметры модели, представленные в таблице 1. Параметры полиномиальной нейронной сети Лежандра (LeNN) задавались следующими: порядок полиномов по времени составил $n_t = 32$, по частоте – $n_f = 32$, общее количество параметров сети – 1025 параметра. Архитектура TriDomainPINN насчитывает $249,739$ параметров на каждый из трех субдоменов, каждый из которых обучается на 3500 точках коллокации. Результаты обучения сетей представлены на рисунке 7. Результаты численного решения методом Розенброка четвертого порядка точности и предсказания сетей модели (8) приведены в таблицах 2–5. Для контроля точности метода Розенброка применялась оценка локальной погрешности с порогом $\varepsilon_{\text{tol}} = 8 \cdot 10^{-7}$ (10). Во всех рассмотренных частотных режимах ($f = 200, 250, 300$ Гц) критерий точности (11) выполнен: максимальная погрешность не превышает $3.4 \cdot 10^{-7}$. При этом наблюдается рост погрешности с увеличением частоты, что обусловлено возрастанием жесткости задачи. Средняя и медианная погрешности составляют $6.2 \cdot 10^{-8}$–$1.3 \cdot 10^{-7}$ и $5.0 \cdot 10^{-8}$–$1.1 \cdot 10^{-7}$ соответственно, что подтверждает локальный характер пиковых отклонений и корректность выбранного шага интегрирования.

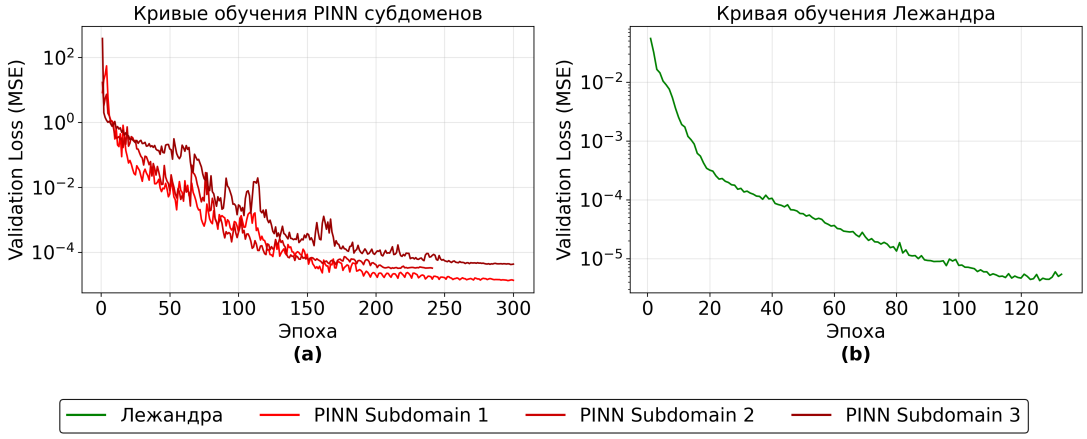


Рис. 7. Кривые обучения TriDomainPINN и Лежандра (8)

В ходе обучения трех субдоменов PINN (рис. 7) низкочастотный субдомен достиг лучшей валидационной ошибки $3.164{\cdot}10^{-5}$ за 45.51 с на 211-й эпохе, среднечастотный – $4.211{\cdot}10^{-5}$ за 55.56 с на 298-й эпохе, высокочастотный – $1.344 \cdot 10^{-6}$ за 56.10 с на 296-й эпохе. Суммарное время обучения составляет 56.1 с. Все субдомены обучались 300 эпох. Общее время обучения с учетом объединения результатов субдоменов составляет 59.26 с. Обучение модели Лежандра ($n_t = 22, n_f = 22$) завершилось на 133-й эпохе с лучшей валидационной ошибкой $4.969 \cdot 10^{-6}$; общее время обучения составило 3.92 с (рис. 7).

Таблица 2

Сравнение вычислительных методов решения модели (8). Пример 1

Метод	**Время, с**	**MSE** $g(t)$	**RMSE**	**NRMSE(%)**	R^2	$\xi_{\max}$
TriDomainPINN	0.0235	3.398e-11	5.829e-06	0.051243	0.999996	1.884e-05
Legendre	0.0033	3.029e-11	5.504e-06	0.048379	0.999996	1.401e-05
Rosenbrock	0.04	9.102e-11	9.540e-06	0.083864	0.999988	1.910e-05

Таблица 3

Сравнение вычислительных методов решения модели (8). Пример 2

Метод	**Время, с**	**MSE** $g(t)$	**RMSE**	**NRMSE(%)**	R^2	$\xi_{\max}$
TriDomainPINN	0.0582	3.153e-10	1.776e-05	0.153130	0.999959	1.118e-04
Legendre	0.0032	1.171e-10	1.082e-05	0.093341	0.999985	2.611e-05
Rosenbrock	0.04	8.113e-11	9.007e-06	0.077680	0.999989	1.906e-05

Таблица 4

Сравнение вычислительных методов решения модели (8). Пример 3

Метод	**Время, с**	**MSE** $g(t)$	**RMSE**	**NRMSE(%)**	R^2	$\xi_{\max}$
TriDomainPINN	0.0629	1.656e-10	1.287e-05	0.111702	0.999978	5.824e-05
Legendre	0.0032	4.192e-10	2.047e-05	0.177698	0.999945	4.261e-05
Rosenbrock	0.04	6.975e-11	8.351e-06	0.072484	0.999991	1.874e-05

Таблица 5

Метрики невязки для рассмотренных методов

Метод	Частота, Гц	**Max** $\lvert R\rvert$	**Mean** $\lvert R\rvert$	**RMS**	**Std**
TriDomainPINN	200	1.234e-01	1.496e-02	2.052e-02	2.050e-02
Legendre	200	8.400e-02	1.458e-02	1.815e-02	1.814e-02
Rosenbrock	200	3.446e-02	5.846e-03	7.241e-03	7.234e-03
TriDomainPINN	250	9.290e-01	6.511e-02	1.024e-01	1.018e-01
Legendre	250	9.345e-02	3.121e-02	3.692e-02	3.690e-02
Rosenbrock	250	7.085e-02	8.826e-03	1.096e-02	1.095e-02
TriDomainPINN	300	1.019	4.781e-02	8.273e-02	8.269e-02
Legendre	300	1.581e-01	6.020e-02	7.127e-02	7.126e-02
Rosenbrock	300	1.108e-01	1.239e-02	1.540e-02	1.540e-02

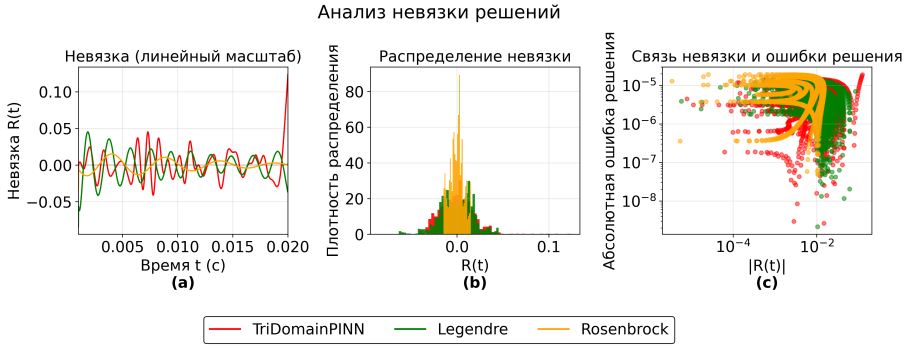


Рис. 8. Анализ невязки решений модели (8). Пример 1

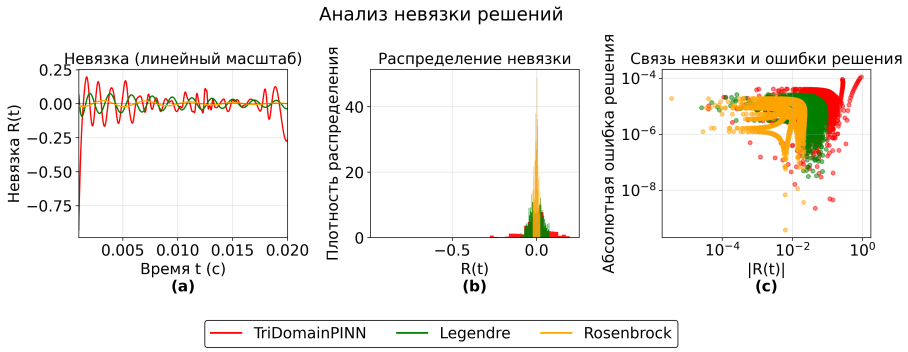


Рис. 9. Анализ невязки решений модели (8). Пример 2

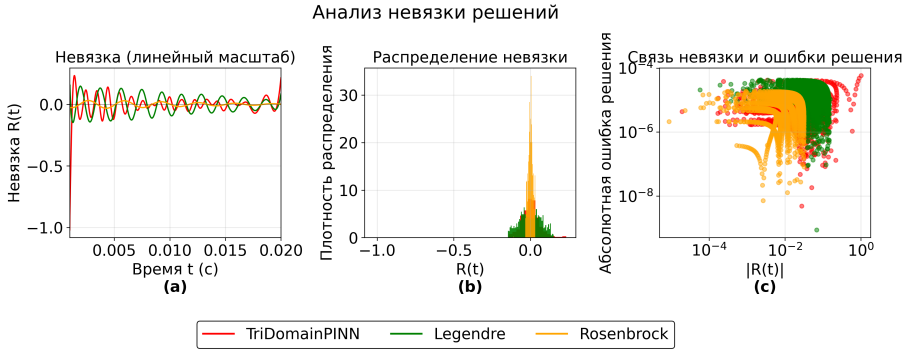


Рис. 10. Анализ невязки решений модели (8). Пример 3

Сравнительный анализ вычислительных методов (табл. 2–5) позволяет выделить следующие закономерности. Все методы обеспечивают высокую точность аппроксимации: значение R^2 превышает 0.99994 для всех частот, а максимальная относительная ошибка не превышает $0.18\,\%$. Наилучшие показатели по точности при $f = 200$ Гц демонстрирует метод Лежандра (NRMSE = 0.048 %, $R^2 = 0.999996$). Метод Розенброка показывает наименьшую невязку ОДУ во всем частотном диапазоне (RMS невязки $7.24 \cdot 10^{-3}$–$1.54 \cdot 10^{-2}$). Однако он уступает по скорости вычислений сети Лежандра (время 0.04 с против 0.0032–0.0033 с). TriDomainPINN демонстрирует устойчивую работу во всем диапазоне частот с умеренной невязкой (RMS $2.052{\cdot}10^{-2}$–$8.273{\cdot}10^{-2}$) и высокой точностью аппроксимации ($R^2 \geq 0.999959$).

Для оценки физической обоснованности полученных решений был проведен анализ невязки R, характеризующей степень удовлетворения предсказанного решения исходному дифференциальному уравнению. Результаты представлены на рисунках 8–10 для трех значений частоты $f = 200$, 250 и 300 Гц.

С ростом частоты от 200 до 300 Гц наблюдается увеличение невязки для всех методов, что согласуется с общим возрастанием сложности моделируемого сигнала. Наиболее существенный рост невязки характерен для TriDomainPINN (максимальное значение Max $|R|$ возрастает с $1.23{\cdot}10^{-1}$ до 1.02), тогда как для метода Розенброка этот рост минимален ($3.45{\cdot}10^{-2}$ до $1.11 \cdot 10^{-1}$), что подтверждает его устойчивость к изменению частотных характеристик.

Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать следующие выводы: разработанная параллельная реализация PINN с тремя субдоменами позволила ускорить время обучения более, чем в 2 раза, а также повысить точность аппроксимации за счет специализации субдоменов на различных частотных диапазонах. Обучение TriDomainPINN при параметрах сети $249,739$ для обоих случаев заняло 59.26 с с учетом параллельного объединения трех субдоменов. Среднеквадратичная ошибка составляет $3.398 \cdot 10^{-11}$–$1.656 \cdot 10^{-10}$.

Полиномиальная сеть Лежандра продемонстрировала существенные преимущества. При 1025 параметрах она достигла среднеквадратичной ошибки ($3.029 \cdot 10^{-11}$–$1.171 \cdot 10^{-10}$) при времени обучения 3.92 с, что значительно меньше времени, потраченного на обучения PINN. Коэффициент детерминации $R^2 \geq 0.999945$ для всех методов подтверждает высокое качество аппроксимации. Метод Розенброка характеризуется наименьшей невязкой ОДУ, однако уступает нейросетевому подходу Лежандра на примере предсказаний значений входного параметра f по скорости вычислений.

Таким образом, для практических задач моделирования геоакустической эмиссии рекомендуем использовать полиномиальную сеть Лежандра как наиболее эффективную по соотношению точности и вычислительных затрат. Главное преимущество нейронных сетей заключается в том, что один раз потратив время на обучение, мы получаем модель, которая дает предсказание за миллисекунды для любых параметров из диапазона, на котором она обучалась.

Дальнейшие исследования планируем направить на решение следующих задач: адаптацию предложенного подхода для многомерных задач геоакустического мониторинга, исследование возможности использования рекуррентных нейронных сетей для моделирования серий импульсов геоакустической эмиссии, разработку специализированных вычислительных алгоритмов для GPU-ускорения обучения полиномиальных сетей высоких порядков.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Исследование выполнено при поддержке государственного задания ИКИР ДВО РАН № 124012300245-2. Тема «Взаимодействие физических процессов в системе ближнего космоса и геосфер» (2024–2028 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапеев, М. И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии / М. И. Гапеев, А. А. Солодчук, Р. И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 40, № 3. – С. 88–100. – DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100

2. Кузьмин, Н. М. Эффективность параллельных вычислений гравитационных сил методом TreeCode в моделях N-тел / Н. М. Кузьмин, Д. С. Сиротин, А. В. Хоперсков // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2024. – Т. 27, № 4. – С. 5–18. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.4

3. Сергиенко, Д. Ф. Сравнение эффективности численных методов и нейросетевого подхода к исследованию математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии с одним дислокационным источником / Д. Ф. Сергиенко, Р. И. Паровик // Успехи кибернетики. – 2025. – Т. 6, № 4. – С. 106–113.

4. Сергиенко, Д. Ф. Исследование эффективности численных методов для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии / Д. Ф. Сергиенко, Р. И. Паровик // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. – 2025. – Т. 50, № 1. – С. 169–183. – DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183

5. Сергиенко, Д. Ф. Моделирование высокочастотной геоакустической эмиссии с помощью осциллятора Берлаге / Д. Ф. Сергиенко, Р. И. Паровик // Вестник ДГУ. Серия 1, Естественные науки. – 2025. – Т. 40, № 3. – С. 29–43. – DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-3-29-43

6. Храпов, С. С. Численное моделирование двумерных газодинамических течений в многокомпонентных неравновесных средах / С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2025. – Т. 28, № 1. – С. 60–87. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2025.1.5

7. Aziz, A. A. H. A. A Shifted Chebyshev Neural Network Approach for Nonlinear Variable-Order Fractional Differential Equations / A. A. H. A. Aziz, N. Senu, N. E. Zamri // Computational and Applied Mathematics. – 2026. – Vol. 45. – P. 262. – DOI: 10.1007/s40314-026-03650-3

8. Chen, J. Improved Modeling and Generalization Capabilities of Graph Neural Networks with Legendre Polynomials / J. Chen, L. Xu // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 63442–63450.

9. Grohs, P. Space-time Error Estimates for Deep Neural Network Approximations for Differential Equations / P. Grohs, F. Hornung, A. Jentzen // Advances in Computational Mathematics. – 2023. – Vol. 49, № 4. – P. 1–78. – DOI: 10.1007/s10444-022-09970-2

10. Hendrycks, D. Gaussian Error Linear Units (GELUs) / D. Hendrycks, K. Gimpel // arXiv preprint. – 2016. – P. arXiv:1606.08415.

11. Kaps, P. Rosenbrock Methods Using Few LU-Decompositions Get Access Arrow / P. Kaps, A. Ostermann // Journal of Numerical Analysis. – 1989. – Vol. 9. – P. 15–27. – DOI: 10.1093/imanum/9.1.15

12. Khan, N. A. Application of Legendre Polynomials Based Neural Networks for the Analysis of Heat and Mass Transfer of a Non-Newtonian Fluid in a Porous Channel / N. A. Khan, M. Sulaiman, P. Kumam // Advances in Continuous and Discrete Models. – 2022. – Vol. 2022. – P. 7. – DOI: 10.1186/s13662-022-03676-x

13. DDR-PINN: A Dynamic Domain – Gradient Reweighting Physics-Informed Neural Network / S. Lei, B. Gulnar, C. Yang, N. Kunicina, R. Grants, U. Grunde // Applied Sciences. – 2026. – Vol. 16. – P. 2366. – DOI: 10.3390/app16052366

14. Liu, Z. Neural Network as a Function Approximator and Its Application in Solving Differential Equations / Z. Liu, Y. Yang, Q. Cai // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). – 2019. – Vol. 40. – P. 237–248. – DOI: 10.1007/s10483-019-2429-8

15. Moseley, B. Finite Basis Physics-Informed Neural Networks (FBPINNs): A Scalable Domain Decomposition Approach for Solving Differential Equations / B. Moseley, A. Markham, T. Nissen-Meyer // Advances in Computational Mathematics. – 2023. – Vol. 49. – P. 62. – DOI: 10.1007/s10444-023-10065-9

16. Pao, Y. H. The Functional Link Net and Learning Optimal Control / Y. H. Pao, S. M. Phillips // Neurocomputing. – 1995. – Vol. 9, № 2. – P. 149–164.

17. Parovik, R. Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations Based on Orthogonal Polynomial Neural Networks / R. Parovik // Algorithms. – 2026. – Vol. 19. – P. 82. – DOI: 10.3390/a19010082

18. Ponalagusamy, R. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison / R. Ponalagusamy, K. Ponnammal // International Journal of Applied and Computational Mathematics. – 2015. – Vol. 1. – P. 45–68. – DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x

19. Sergienko, D. Berlage Oscillator as a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission with One Dislocation Source / D. Sergienko, R. Parovik // Acoustics. – 2025. – Vol. 7, № 65. – DOI: 10.3390/acoustics7040065

20. Improvement of Methods for Sparse Model Identification of Pulsed Geophysical Signals / A. Tristanov, O. Lukovenkova, Yu. Marapulets, A. Kim // Proceedings of SPA 2019. – 2019. – P. 256–260. – DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817

21. A General Method for Solving Differential Equations of Motion Using Physics-Informed Neural Networks / W. Zhang, P. Ni, M. Zhao, X. Du // Applied Sciences. – 2024. – Vol. 14. – P. 7694. – DOI: 10.3390/app14177694

22. Lin, C.-H. Wind Turbine Driving a PM Synchronous Generator Using Novel Recurrent Chebyshev Neural Network Control with the Ideal Learning Rate / C.-H. Lin // Energies. – 2016. – Vol. 9, № 6. – P. 441. – DOI: 10.3390/en9060441

23. Liu, Z. Neural Network as a Function Approximator and its Application in Solving Differential Equations / Z. Liu, Y. Yang, Q. Cai // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. – 2019. – Vol. 40. – P. 237–248. – DOI: https://doi.org/10.1007/s10483-019-2429-8

24. Mostovoy, V. S. Estimation of the Parameters of Seismic Waves / V. S. Mostovoy, S. V. Mostoviy // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2014. – Vol. 2. – P. 118–123.

25. Mostovoy, V. Optimization of the Dynamic Parameters of an Object in a Mathematical Model of Seismo-Acoustic Monitoring of Natural and Engineering Objects / V. Mostovoy, S. Toliupa, A. Shevchenko // Science-Based Technologies. – 2023. – Vol. 58, № 2. – P. 112. – DOI: 10.18372/2310-5461.58.17647

26. Toliupa, S. Mathematical Model of Physically Realizable Seismic Signals / S. Toliupa // Information Technology and Implementation (IT&Is-2023). – 2023. – P. 126.

REFERENCES

1. Gapeev M.I., Solodchuk A.A., Parovik R.I. Coupled Oscillators as a Model of High-Frequency Geoacoustic Emission. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2022, vol. 40, no. 3, pp. 88-100. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100

2. Kuzmin N.M., Sirotin D.S., Khoperskov A.V. Efficiency of Parallel Computations of Gravitational Forces by Treecode Method in N-Body Models. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2024, vol. 27, no. 4, pp. 5-18. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2024.4.4

3. Sergienko D.F., Parovik R.I. Comparison of Numerical Methods and Neural Network Approaches for Simulating High-Frequency Geoacoustic Emission from a Single Dislocation Source. *Uspekhi kibernetiki*, 2025, vol. 6, no. 4, pp. 106-113.

4. Sergienko D.F., Parovik R.I. Investigation of the Effectiveness of Numerical Methods for Solving a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2025, vol. 50, no. 1, pp. 169-183. DOI: 10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183

5. Sergienko D.F., Parovik R.I. Modelling of High-Frequency Geoacoustic Emission Using the Berlage Oscillator. *Vestnik DGU. Seriya 1, Estestvennye nauki*, 2025, vol. 40, no. 3, pp. 29-43. DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-3-29-43

6. Khrapov S.S. Numerical Modeling of Two-Dimensional Gas-Dynamic Flows in Multicomponent Nonequilibrium Media. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2025, vol. 28, no. 1, pp. 60-87. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2025.1.5

7. Aziz A.A.H.A., Senu N., Zamri N.E. A Shifted Chebyshev Neural Network Approach for Nonlinear Variable-Order Fractional Differential Equations. *Computational and Applied Mathematics*, 2026, vol. 45, pp. 262. DOI: 10.1007/s40314-026-03650-3

8. Chen J., Xu L. Improved Modeling and Generalization Capabilities of Graph Neural Networks with Legendre Polynomials. *IEEE Access*, 2023, vol. 11, pp. 63442-63450.

9. Grohs P., Hornung F., Jentzen A. Space-Time Error Estimates for Deep Neural Network Approximations for Differential Equations. *Advances in Computational Mathematics*, 2023, vol. 49, no. 4, pp. 1-78. DOI: 10.1007/s10444-022-09970-2

10. Hendrycks D., Gimpel K. Gaussian Error Linear Units (GELUs). *arXiv preprint*, 2016, pp. arXiv:1606.08415.

11. Kaps P., Ostermann A. Rosenbrock Methods Using Few LU-Decompositions Get Access Arrow. *Journal of Numerical Analysis*, 1989, vol. 9, pp. 15-27. DOI: 10.1093/imanum/9.1.15

12. Khan N.A., Sulaiman M., Kumam P. Application of Legendre Polynomials Based Neural Networks for the Analysis of Heat and Mass Transfer of a Non-Newtonian Fluid in a Porous Channel. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2022, vol. 2022, pp. 7. DOI: 10.1186/s13662-022-03676-x

13. Lei S., Gulnar B., Yang C., Kunicina N., Grants R., Grunde U. DDR-PINN: A Dynamic Domain – Gradient Reweighting Physics-Informed Neural Network. *Applied Sciences*, 2026, vol. 16, pp. 2366. DOI: 10.3390/app16052366

14. Liu Z., Yang Y., Cai Q. Neural Network as a Function Approximator and Its Application in Solving Differential Equations. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2019, vol. 40, pp. 237-248. DOI: 10.1007/s10483-019-2429-8

15. Moseley B., Markham A., Nissen-Meyer T. Finite Basis Physics-Informed Neural Networks (FBPINNs): A Scalable Domain Decomposition Approach for Solving Differential Equations. *Advances in Computational Mathematics*, 2023, vol. 49, pp. 62. DOI: 10.1007/s10444-023-10065-9

16. Pao Y.H., Phillips S.M. The Functional Link Net and Learning Optimal Control. *Neurocomputing*, 1995, vol. 9, no. 2, pp. 149-164.

17. Parovik R. Algorithms for Solving Ordinary Differential Equations Based on Orthogonal Polynomial Neural Networks. *Algorithms*, 2026, vol. 19, p. 82. DOI: 10.3390/a19010082

18. Ponalagusamy R., Ponnammal K. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2015, vol. 1, pp. 45-68. DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x

19. Sergienko D., Parovik R. Berlage Oscillator as a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission with One Dislocation Source. *Acoustics*, 2025, vol. 7, no. 65. DOI: 10.3390/acoustics7040065

20. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of Methods for Sparse Model Identification of Pulsed Geophysical Signals. *Proceedings of SPA 2019*, 2019, pp. 256-260. DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817

21. Zhang W., Ni P., Zhao M., Du X. A General Method for Solving Differential Equations of Motion Using Physics-Informed Neural Networks. *Applied Sciences*, 2024, vol. 14, p. 7694. DOI: 10.3390/app14177694

22. Lin C.-H. Wind Turbine Driving a PM Synchronous Generator Using Novel Recurrent Chebyshev Neural Network Control with the Ideal Learning Rate. *Energies*, 2016, vol. 9, no. 6, p. 441. DOI: 10.3390/en9060441

23. Liu Z., Yang Y., Cai Q. Neural Network as a Function Approximator and Its Application in Solving Differential Equations. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, 2019, vol. 40, pp. 237-248. DOI: https://doi.org/10.1007/s10483-019-2429-8

24. Mostovoy V.S., Mostoviy S.V. Estimation of the Parameters of Seismic Waves. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2014, vol. 2, pp. 118-123.

25. Mostovoy V., Toliupa S., Shevchenko A. Optimization of the Dynamic Parameters of an Object in a Mathematical Model of Seismo-Acoustic Monitoring of Natural and Engineering Objects. *Science-Based Technologies*, 2023, vol. 58, no. 2, p. 112. DOI: 10.18372/2310-5461.58.17647

26. Toliupa S. Mathematical Model of Physically Realizable Seismic Signals. *Information Technology and Implementation (IT&Is-2023)*, 2023, p. 126.

COMPARATIVE ANALYSIS OF NEURAL NETWORK METHODS FOR SOLVING THE MODEL OF A SINGLE DISLOCATION SOURCE OF GEOACOUSTIC EMISSION

Darya F. Sergienko

Junior Researcher, Laboratory of Acoustic Research; 3-Year Postgraduate Student, Department of Computer Science and Mathematics,
Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences; Vitus Bering Kamchatka State University
sergienko@ikir.ru
https://orcid.org/0009-0008-6512-4537
Mirnaya St, 7, 684034 Paratunka, Russian Federation; Pogranichnaya St, 4, 683032 Petropavlovsk-Kamchatsky, Russian Federation

Abstract. This paper presents a comparative analysis of computational methods for modeling a single dislocation source of geoacoustic emission radiation, the Berlage oscillator. The paper considers the Rosenbrock numerical method of the fourth order of accuracy, a parallel modification of a physically informed neural network into three subdomains (TriDomainPINN), as well as a neural network based on Legendre polynomials (LeNN). The parallel version of PINN makes it possible to increase the efficiency of the solution and reduce the learning time by decomposing the modeling area. All algorithms are implemented in Python using the PyTorch library; the implementation provides a mechanism for early stopping of network training and the distribution of collocation points according to Chebyshev's law. Accuracy, convergence rate, and computational efficiency were evaluated for each method. Numerical experiments show that the Legendre polynomial network provides high approximation accuracy with a significant reduction in computational costs and time.

Key words: polynomial neural networks, PINN, MLP, LeNN, Berlage pulse, orthogonal polynomials, machine learning, signal approximation.