DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.5

УДК 536.25:53.02
ББК 22.311

Дата поступления статьи: 22.04.2026
Дата принятия статьи: 20.07.2026

КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ДВУХСЛОЙНУЮ СТЕНКУ В РЕЖИМЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ

Анатолий Михайлович Афанасьев

Доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности,
Волгоградский государственный университет
a.m.afanasiev@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-3703-3167
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Цитирование: Афанасьев А. М. Коэффициент теплопередачи через плоскую двухслойную стенку в режиме гармонического изменения температуры поверхности // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2026. Т. 29, № 2. С. 72–85.
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.5

Citation: Afanasyev A.M. Heat Transfer Coefficient Through a Flat Two-Layer Wall in the Regime of Harmonic Change of Surface Temperature. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2026, vol. 29, no. 2, pp. 72-85. (in Russian).
DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2026.2.5

Аннотация. Для плоской двухслойной стенки при граничных условиях первого рода дано обобщение понятия коэффициента теплопередачи на случай, когда температура одной из поверхностей поддерживается постоянной, а температура другой поверхности наряду с постоянной составляющей имеет также и составляющую, изменяющуюся во времени по гармоническому закону. В отличие от случая неизменных во времени полей, новый коэффициент является комплексным, он имеет смысл частотной характеристики и связывает амплитуду и начальную фазу колебаний температуры на одной из поверхностей стенки с амплитудой и начальной фазой передаваемого через нее теплового потока. Для каждого из двух составляющих стенку слоев введено понятие его собственной частоты, которая характеризует теплопередающие свойства слоя в области гармонических во времени полей, а отвечающий собственной частоте слоя период колебаний назван постоянной времени слоя для тепловых процессов. Модуль и аргумент комплексного коэффициента теплопередачи представлены как функции безразмерной переменной, квадрат которой имеет смысл относительной частоты тепловой волны. Исследована

© Афанасьев А.М., 2026

зависимость коэффициента теплопередачи от частоты, теплофизических характеристик слоев стенки и их толщины. Полученные результаты найдут применение в теории теплообменных аппаратов рекуперативного типа, в теории алгоритмов для расчета колебаний температуры и влажности внутри помещений, вызванных колебаниями характеристик внешней среды, а также в геокриологии для моделирования сезонных температурных и влажностных колебаний в промерзающе-протаивающих грунтах.

Ключевые слова: математическая физика, теория теплопроводности, гармонический режим, слоистая среда, задача для пластины, теплообменные аппараты, рекуперативный процесс, коэффициент теплопередачи.

Введение

Задачи о температурном поле внутри пластины при граничных условиях первого, второго или третьего рода, одинаковых на обеих поверхностях пластины или различных, принадлежат к числу классических задач математической физики: [2; 13; 15; 19; 22; 23; 25].

Решения таких задач применяют на практике для анализа работы теплообменных аппаратов *рекуперативного типа*, в которых обмен теплом между двумя средами происходит через разделяющую их плоскую стенку.

При рассмотрении работы таких устройств основной интерес чаще всего представляет не распределение температуры по толщине пластины, а расчет *коэффициента теплопередачи*, который определяет плотность передаваемого через пластину теплового потока.

В литературе такие задачи обычно называют задачами о теплопередаче *через плоскую стенку* [14; 18].

Обобщением теплопередачи через плоскую стенку является процесс передачи тепла через *многослойную* плоскую стенку. Связанные с этим процессом задачи рассматриваются в теории распространения тепла в *слоистых средах*.

Например, рассмотрение слоистых сред становится актуальным при конструировании *тепловой изоляции*, которая обычно имеет вид многослойного покрытия из материалов со специально подобранными теплофизическими характеристиками [18], или при моделировании колебаний температуры внутри помещений, вызванных суточными колебаниями температуры окружающей среды [8].

Проблема корректного описания тепловых процессов в слоистой среде возникает также и в геокриологии [1; 11; 17; 24], где ставится задача о моделировании сезонных изменений теплофизического состояния мерзлых пород и грунтов, естественным состоянием которых является их слоистость.

Известные в литературе результаты для тепловых полей в плоских слоистых средах позволяют рассчитать коэффициент теплопередачи многослойной конструкции, если характеристика с таким названием известна для каждого слоя в отдельности [14].

Однако применять такие формулы можно лишь в случае стационарных температурных полей.

Распространить понятие коэффициента теплопередачи многослойной стенки на случай полей, изменяющихся во времени, и является целью предлагаемой статьи.

При этом мы ограничимся рассмотрением температурных полей, зависимость которых от времени имеет *гармонический* вид. Тогда связь между входным воздействием (например, изменяющейся по гармоническому закону температурой одной из поверхностей пластины) и откликом системы (плотностью теплового потока на другой поверхности, также имеющей

гармонический вид) будет иметь смысл частотной характеристики, и потому отклик системы при *произвольном* входном воздействии можно будет найти с помощью преобразования Фурье.

1. Задача о переменной составляющей температурного поля в двухслойной пластине

Рассмотрим пространственно одномерную задачу о расчете установившегося температурного поля в двухслойной пластине, у которой температура нижней поверхности поддерживается постоянной (примем значение этой постоянной равным нулю), а температура верхней поверхности, кроме постоянной составляющей, имеет еще и компоненту, изменяющуюся во времени по гармоническому закону. Начальные условия интересовать нас не будут, то есть мы будем рассматривать *задачу без начальных данных* [22]. Она имеет бесконечно много решений, но ее установившееся (асимптотическое) решение, которое мы и будем искать, от начальных условий не зависит, определяется единственным образом и может быть построено наложением решений следующих двух задач [12]: стационарного решения, отвечающего постоянному температурному перепаду между границами пластины (оно известно и будет приведено ниже), и гармонического решения, отвечающего показанной на рисунке 1 краевой задаче. Построением именно этого второго решения мы и будем заниматься ниже.

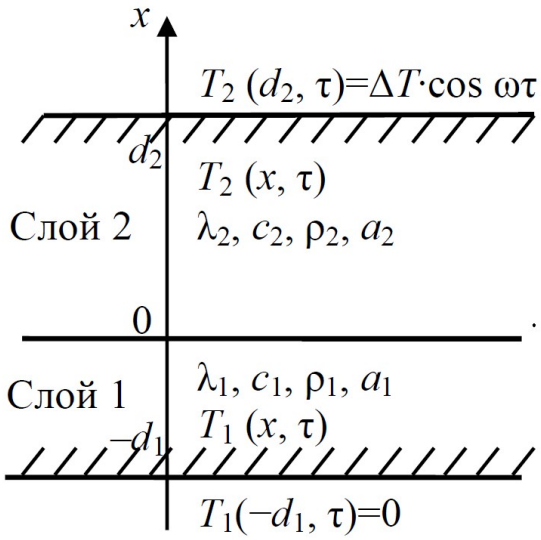


Рис. 1. Постановка задачи о расчете температурного поля в двухслойной пластине

Искомые поля в слоях 1 и 2 обозначим как $T_1(x,\tau)$ и $T_2(x,\tau)$, где x – координата и τ – время. Пусть также λ_1, c_1, ρ_1, $a_1 = \lambda_1/(c_1\rho_1)$ – соответственно коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, плотность и коэффициент температуропроводности (коэффициент диффузии тепла) материала первого слоя; соответствующие характеристики для материала второго слоя обозначим как λ_2, c_2, ρ_2 и $a_2 = \lambda_2/(c_2\rho_2)$. Введем кроме них еще параметры ΔT и ω, смысл которых ясен из рисунка 1. Краевая задача для расчета искомых функций будет иметь следующий вид [15]:

$$\begin{cases} \partial T_1/\partial\tau \ = a_1 \cdot \partial^2 T_1/\partial x^2 \ ; \quad T_1\left(-d_1,\tau\right) = 0; \quad -d_1 \le x \le 0; \\ T_1\left(0,\tau\right) = T_2\left(0,\tau\right); \quad \lambda_1 \cdot \partial T_1/\partial x \ \left(0,\tau\right) = \lambda_2 \cdot \partial T_2/\partial x \ \left(0,\tau\right); \quad x = 0; \\ \partial T_2/\partial\tau \ = a_2 \cdot \partial^2 T_2/\partial x^2 \ ; \quad T_2\left(d_2,\tau\right) = \Delta T \cdot \cos\ \omega\tau; \quad 0 \le x \le d_2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь формулы первой строки – это уравнение теплопроводности и краевое условие для поля $T_1\left(x,\tau\right)$; формулы третьей строки имеют тот же смысл, но уже по отношению к полю $T_2\left(x,\tau\right)$; соотношения из второй строки представляют собой *условия сопряжения* для этих полей на общей для них границе $x = 0$.

Гармонические функции $T_1\left(x,\tau\right)$ и $T_2\left(x,\tau\right)$, удовлетворяющие системе (1), будем искать методом *комплексных амплитуд*. Сопоставим для этого вещественным искомым функциям – *оригиналам* – комплексные функции – *изображения*, которые называют также *комплексными амплитудами*, или просто *комплексами*. В одном из вариантов метода комплексных амплитуд это сопоставление выглядит так:

$$\begin{cases} T_1\left(x,\tau\right) = T_1\left(x\right) \cdot \cos\left[\omega\tau - \phi_1\left(x\right)\right] \leftrightarrow \dot{T}_1\left(x\right) = T_1\left(x\right) \cdot \exp\left[i\phi_1\left(x\right)\right]; \\ T_2\left(x,\tau\right) = T_2\left(x\right) \cdot \cos\left[\omega\tau - \phi_2\left(x\right)\right] \leftrightarrow \dot{T}_2\left(x\right) = T_2\left(x\right) \cdot \exp\left[i\phi_2\left(x\right)\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь, как и всюду далее, точка над знаком переменной будет обозначать комплексный характер данной величины.

Таким образом, если говорить, например, о поле в слое 1, то мы должны будем различать функции

$$T_1\left(x,\tau\right); \quad T_1\left(x\right); \quad \dot{T}_1\left(x\right).$$

Как известно, в рамках данного метода линейные соотношения между оригиналами преобразуются в такие же соотношения между их комплексами, при условии, что дифференцированию по времени в области оригиналов будет отвечать умножение на $(-i\omega)$ в области комплексов, а дифференцированию по x в первой области будет отвечать такое же дифференцирование в области второй.

С помощью этих правил из уравнений теплопроводности для оригиналов, входящих в первую и третью строки задачи (1), получим уравнения теплопроводности для комплексов:

$$\dot{T}_1'' \ \left(x\right) + \left(i\omega/a_1\right)\dot{T}_1\left(x\right) = 0, \ \ \dot{T}_2'' \ \left(x\right) + \left(i\omega/a_2\right)\dot{T}_2\left(x\right) = 0,$$

или

$$\left\{\dot{T}_1'' \ \left(x\right) + \dot{\gamma}_1^2\dot{T}\left(x\right) = 0, \ \ \dot{T}_2'' \ \left(x\right) + \dot{\gamma}_2^2\dot{T}\left(x\right) = 0. \right. \tag{3}$$

Здесь обозначено

$$\dot{\gamma}_1 = \sqrt{\frac{i\omega}{a_1}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a_1}}\left(1+i\right); \quad \dot{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{i\omega}{a_2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a_2}}\left(1+i\right). \tag{4}$$

Заметим, что коэффициенты при множителях $(1 + i)$ в этих формулах являются коэффициентами затухания для тепловых волн в задаче Фурье для полупространства [22]. Тогда обратные величины этих коэффициентов будут иметь смысл глубины проникновения для этих волн.

Считая A_1, B_1, A_2, B_2 произвольными постоянными, запишем общие решения уравнений (3) для комплексных амплитуд:

$$\dot{T}_1(x) = A_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 x + B_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_1 x;\ \ \dot{T}_2(x) = A_2 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 x + B_2 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 x. \qquad (5)$$

Теперь мы должны так подобрать входящие сюда четыре коэффициента, чтобы выполнились четыре дополнительных условия в задаче (1). Но в этой задаче условия сформулированы для оригиналов, то есть для самих искомых функций $T_1(x,\tau)$, $T_2(x,\tau)$, а здесь мы должны переформулировать эти условия для комплексных амплитуд. Они будут выглядеть так:

$$\dot{T}_1(-d_1) = 0; \quad \dot{T}_1(0) = \dot{T}_2(0); \quad \lambda_1 \dot{T}_1'(0) = \lambda_2 \dot{T}_2'(0); \quad \dot{T}_2(d_2) = \Delta T.$$

Обращаясь теперь к общим выражениям для комплексных амплитуд (5), получим из последних уравнений систему для нахождения коэффициентов A_1, B_1, A_2, B_2:

$$\begin{cases} A_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 - B_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 = 0; \\ A_1 = A_2; \\ \lambda_1 B_1 \dot{\gamma}_1 = \lambda_2 B_2 \dot{\gamma}_2; \\ A_2 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2 + B_2 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 = \Delta T. \end{cases} \qquad (6)$$

Можно убедиться, что определитель этой квадратной системы отличен от нуля, и, значит, нужные нам четыре коэффициента будут определены из этой системы однозначным образом. Проделав такие вычисления, мы затем с помощью (5) найдем комплексы наших полей, после этого с помощью (2) восстановим по этим комплексам искомые поля $T_1(x,\tau)$, $T_2(x,\tau)$, и, в заключение, рассчитаем плотность теплового потока на нижней границе двухслойной конструкции рисунка 1. Эту непростую вычислительную работу можно существенным образом сократить, если сначала найти общее выражение для плотности теплового потока и лишь затем вернуться к системе (6) для нахождения коэффициентов.

2. Вычисление плотности теплового потока на нижней границе пластины

Плотность теплового потока (точнее, x-компонента этой величины) в слое 1, соответственно в области оригиналов и области изображений, вычисляется так:

$$q_x(x,\tau) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial x} \leftrightarrow \dot{q}_x(x) = -\lambda_1 \frac{d\dot{T}_1(x)}{dx}.$$

В дальнейшем нижний индекс x в этих формулах мы будем опускать.

Вычислим интересующий нас комплекс плотности теплового потока на нижней границе пластины, то есть при $x = -d_1$. Используя (5), получим:

$$\begin{aligned} \dot{q}(x)|_{x=-d_1} &= -\lambda_1 \cdot \frac{d}{dx}\left[A_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 x + B_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_1 x\right]|_{x=-d_1} = \\ &= -\lambda_1 \dot{\gamma}_1 \cdot (A_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 + B_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1) \equiv \dot{q}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Как указано в формуле, обозначать эту величину в дальнейшем мы будем просто как $\dot{q}$. Таким образом, далее нам понадобятся только коэффициенты A_1 и B_1. Вернувшись к (6), после несложных преобразований получаем систему для нахождения этих двух коэффициентов:

$$\begin{cases} A_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 - B_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 = 0; \\ A_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2 + \dfrac{\lambda_1 \dot{\gamma}_1}{\lambda_2 \dot{\gamma}_2} B_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 = \Delta T. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь входящий во второе уравнение множитель в виде дроби оказывается действительным числом; согласно формулам (4), мы имеем

$$\frac{\lambda_1\dot{\gamma}_1}{\lambda_2\dot{\gamma}_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \equiv \mu. \tag{9}$$

Решая систему (8), найдем, что

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\Delta T \cdot \sin\dot{\gamma}_1 d_1}{\mu \cdot \cos\dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\dot{\gamma}_2 d_2}; \\ B_1 &= \frac{\Delta T \cdot \cos\dot{\gamma}_1 d_1}{\mu \cdot \cos\dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\dot{\gamma}_2 d_2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в (7), для комплекса плотности теплового потока после преобразований получим:

$$\dot{q} = \frac{-\lambda_1\dot{\gamma}_1}{\mu \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2} \cdot \Delta T. \tag{10}$$

Теперь мы должны найти оригинал для этого выражения и дать его интерпретацию. Эта работа будет проделана в следующем пункте.

3. Коэффициент теплопередачи по переменной составляющей

Коэффициент теплопередачи для переменных тепловых потоков будем вводить по аналогии с тем, как это делается для потоков стационарных. Как известно, в стационарном случае, когда температура нижней границы пластины (на рисунке 1) равна нулю, а температура ее верхней границы равна ΔT, плотность теплового потока на нижней границе будет вычисляться по формуле [14; 18]

$$q = -k \cdot \Delta T, \tag{11}$$

в которой

$$k = (d_1/\lambda_1\ + d_2/\lambda_2\ )^{-1} \quad - \tag{12}$$

коэффициент теплопередачи по *постоянной* составляющей. В случае гармонических потоков, о которых мы говорим, комплексы температуры на нижней и верхней границах равны нулю и ΔT соответственно, и потому, в полной аналогии с формулой (11), мы для комплекса теплового потока $\dot{q}$ на нижней границе будем писать

$$\dot{q} = -\dot{k}\,(\omega) \cdot \Delta\dot{T}. \tag{13}$$

Определяемый этой формулой комплексный коэффициент $\dot{k}\,(\omega)$ назовем коэффициентом теплопередачи по *переменной* составляющей. Исходя из формулы (10) и учитывая, что в нашем случае $\Delta\dot{T} = \Delta T$, для комплексного коэффициента получим

$$\dot{k}\,(\omega) = \frac{\lambda_1\dot{\gamma}_1}{\mu \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2}. \tag{14}$$

Физическое содержание коэффициента $\dot{k}\,(\omega)$ раскрывается следующим образом. Выделив у него модуль $k\,(\omega)$ и аргумент $\phi\,(\omega)$ и записав в соответствии с этим

$$\dot{k}(\omega) = k(\omega) \cdot \exp[i\phi(\omega)], \tag{15}$$

мы из формулы (13) будем иметь

$$\dot{q} = -k(\omega) \cdot \exp[i\phi(\omega)] \cdot \Delta T = k(\omega) \cdot \Delta T \cdot \exp\ i[\phi(\omega) + \pi].$$

Переходя здесь к оригиналу, для плотности теплового потока на нижней поверхности пластины получим

$$q(\tau) = k(\omega) \cdot \Delta T \cdot \cos[\omega\tau - \phi(\omega) - \pi]. \tag{16}$$

Приняв теперь во внимание, что температура на верхней поверхности

$$T_2(\tau) = \Delta T \cdot \cos\ \omega\tau,$$

мы делаем вывод, что модуль и аргумент комплексного коэффициента теплопередачи $\dot{k}(\omega)$ показывают, каким образом амплитуда и начальная фаза температуры на верхней поверхности $T_2(\tau)$ преобразуются, соответственно, в амплитуду и начальную фазу плотности теплового потока на ее нижней поверхности $q(\tau)$.

Покажем, что в частном случае, когда оба слоя на рисунке 1 состоят из одного и того же материала, полученный нами результат совпадает с известным в литературе результатом. Обозначив для такой ситуации

$$\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 \equiv \dot{\gamma}, \ \ d_1 + d_2 \equiv d,$$

и учитывая, что теперь $\mu = 1$, для знаменателя в формуле (14) получим

$$\mu \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2 = \sin(\dot{\gamma}_1 d_1 + \dot{\gamma}_2 d_2) = \sin\ \dot{\gamma} d.$$

В итоге указанная формула принимает вид

$$\dot{k}(\omega) = \frac{\lambda\dot{\gamma}}{\sin\ \dot{\gamma} d}.$$

Но именно такая формула для комплексного коэффициента теплопередачи вытекает из рассмотрения гармонического температурного поля в однородной пластине, приведенного в [22].

Убедимся теперь, что на низкой частоте, когда $\omega \to 0$, полученный нами результат полностью соответствует тому, который и следовало бы ожидать на основании физических соображений. Ясно, что на низкой частоте описание переменной части температурного поля и описание его постоянной части перестанут различаться, и тогда в пределе мы должны будем получить $\dot{k}(\omega) \to k$. Покажем, что это предельное соотношение действительно имеет место. Для этого перепишем сначала формулу (14) для $\dot{k}(\omega)$ так, чтобы в нее вошел коэффициент k, определяемый формулой (12). После несложных преобразований получим, что

$$\dot{k}(\omega) = k\frac{\nu\dot{\gamma}_1 d_1}{\mu \cdot \cos\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \sin\ \dot{\gamma}_2 d_2 + \sin\ \dot{\gamma}_1 d_1 \cdot \cos\ \dot{\gamma}_2 d_2}. \tag{17}$$

Здесь мы обозначили

$$\nu = 1 + (\lambda_1 d_2)/(\lambda_2 d_1) - \tag{18}$$

безразмерный коэффициент. Отметим, что именно в таком виде мы и будем использовать формулу для $\dot{k}(\omega)$ в дальнейшем. Вычислим предельное значение полученного выражения при $\omega \to 0$. В этом пределе будем иметь $\dot{\gamma}_1 \to 0,\ \dot{\gamma}_2 \to 0$, и, значит, cos $\dot{\gamma}_1 d_1$ и cos $\dot{\gamma}_2 d_2$ можно будет заменить на единицы, а sin $\dot{\gamma}_1 d_1$ и sin $\dot{\gamma}_2 d_2$ – на $\dot{\gamma}_1 d_1$ и $\dot{\gamma}_2 d_2$. Принимая также во внимание, что, согласно (9),

$$\mu = (\lambda_1 \dot{\gamma}_1)/(\lambda_2 \dot{\gamma}_2)\ ,$$

мы после преобразований получим в пределе $\dot{k}(\omega) = k$, что и доказывает выдвинутое утверждение.

Поскольку коэффициент $\dot{k}(\omega)$ на низкой частоте оказывается вещественным, то для его аргумента на этой частоте мы будем иметь $\varphi = 0$. Присутствующий в формуле (16) для $q(\tau)$ дополнительный набег фазы, равный π, обусловлен выбором направления оси x на рисунке 1: если в какой-то момент времени перепад температуры между границами пластины оказывается *положительным* (температура вверху превышает температуру внизу), то тепловой поток сквозь нижнюю границу должен быть *отрицательным*.

4. Обсуждение результатов

Формула (17) определяет комплексный коэффициент теплопередачи как функцию девяти переменных: частоты ω, толщины слоев $d_{1,2}$ и теплофизических характеристик материалов слоев $\lambda_{1,2}$, $c_{1,2}$ и $\rho_{1,2}$. Мы должны выделить в этой формуле модуль и аргумент и исследовать зависимости этих двух функций от частоты, считая толщину слоев и теплофизические характеристики материалов параметрами. Частота ω, согласно 4, входит в комплексные переменные $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$, которые, в свою очередь, задействованы в выражениях, составляющих аргументы тригонометрических функций. Очевидно, что в такой ситуации дать наглядную интерпретацию полученным зависимостям между переменными будет весьма непросто, и мы можем указать лишь на небольшое число примеров обсуждения в литературе вопросов такого рода (см., например, [19]).

Приступая к исследованию частотных зависимостей, прежде всего, заметим, что безразмерные комплексные переменные, от которых в формуле (17) вычисляются тригонометрические функции, могут быть переписаны на основании (4) следующим образом:

$$\dot{\gamma}_1 d_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2a_1}}\,(1+i)\,d_1 = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}}\,(1+i)\,; \quad \omega_1 = \frac{2a_1}{d_1^2};$$

$$\dot{\gamma}_2 d_2 = \sqrt{\frac{\omega}{2a_2}}\,(1+i)\,d_2 = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_2}}\,(1+i)\,; \quad \omega_2 = \frac{2a_2}{d_2^2}.$$

Введенные этими формулами величины ω_1 и ω_2, характеризующие каждый из двух слоев на рисунке 1, могут быть названы собственными частотами этих слоев для тепловых процессов. Как будет видно из дальнейшего, благодаря этим параметрам у нас появится возможность при исследовании тепловых процессов говорить о «низких» и «высоких» по отношению к данным слоям частотах.

Из последних формул видно, что входящие в (17) аргументы тригонометрических функций $\dot{\gamma}_1 d_1$ и $\dot{\gamma}_2 d_2$ имеют *одинаковые действительные и мнимые части*, то есть это аргументы вида $(\xi + i\xi)$. Такая ситуация – достаточно характерная для задач теории теплопроводности, и некоторые из функций с аргументами такого рода табулированы; в качестве примера можно указать на [15]. Обратив внимание на это обстоятельство, введем переменную ξ и параметр η следующим образом:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Тогда получим

$$\dot{\gamma}_1 d_1 = \xi(1+i); \;\; \dot{\gamma}_2 d_2 = \eta\xi(1+i).$$

Отметим, что $\xi^2 = \omega/\omega_1$, поэтому квадрат переменной ξ имеет смысл *безразмерной частоты*. В качестве нормирующей здесь использована собственная частота первого слоя, но с таким же успехом, конечно, можно было бы использовать и собственную частоту слоя второго.

В окончательном виде формула (17) для коэффициента теплопередачи по переменной составляющей теперь будет выглядеть так:

$$\dot{k}(\xi) = k\frac{\nu\xi(1+i)}{\mu\cdot\cos\ \xi(1+i)\cdot\sin\ \eta\xi(1+i) + \sin\ \xi(1+i)\cdot\cos\ \eta\xi(1+i)}. \qquad (19)$$

Выделение модуля и аргумента этого выражения как функций переменной ξ возможно только с помощью компьютерной программы.

Проведем построение указанных зависимостей, используя в качестве материалов дерево (1) и глину (2), и приняв для толщины слоев значения $d_1 = 10$ см и $d_2 = 20$ см. Теплофизические характеристики материалов, на основании [16; 20], будут такими (в качестве дерева выбрана сосна):

$\lambda_1 = 0,15$ Вт/(м·°С); $c_1 = 2,5\cdot10^3$ Дж/(кг·°С); $\rho_1 = 0,50\cdot10^3$кг/м^3; $a_1 = 0,12\cdot10^{-6}$ м^2/с;

$\lambda_2 = 0,93$ Вт/(м·°С); $c_2 = 1,9\cdot10^3$ Дж/(кг·°С); $\rho_2 = 1,5\cdot10^3$ кг/м^3; $a_2 = 0,32\cdot10^{-6}$ м^2/с.

Подсчитанные по этим данным безразмерные параметры μ, ν и η будут такими:

$$\mu = 0,2660; \quad \nu = 1,323; \quad \eta = 1,225.$$

Графики модуля и аргумента комплексного коэффициента теплопередачи (19), построенные с помощью программы Excel, показаны на рисунках 2 и 3.

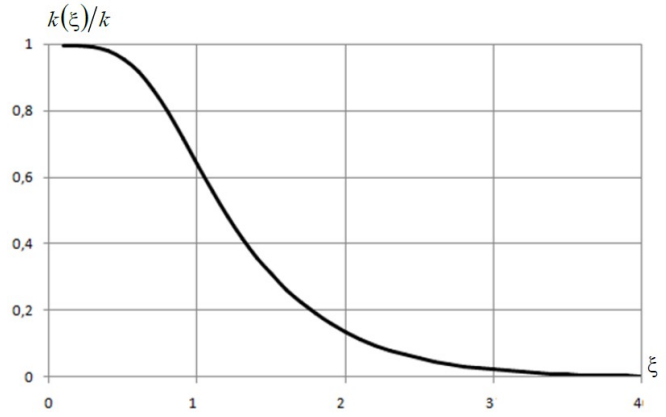


Рис. 2. График модуля коэффициента теплопередачи по переменной составляющей

Из графика на рисунке 2 видно, что частота $\omega = \omega_1$, которой отвечает значение переменной $\xi = 1$, является той частотой, движение от которой в одну и другую стороны позволит нам говорить о характерном поведении функции при «низких» и «высоких» частотах. На низких

частотах ($\xi \ll 1$) мы имеем $\dot{k}(\omega) \to k$, как это и было предсказано выше. На высоких частотах ($\xi \gg 1$) мы получаем $\dot{k}(\omega) \to 0$, и, значит, высокочастотные колебания температуры на одной из поверхностей пластины, в отличие от низкочастотных колебаний, уже не будут вызывать колебаний теплового потока на другой поверхности. Разумеется, что такое характерное поведение коэффициента теплопередачи при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$ оказывается верным и для *однослойной* пластины [7].

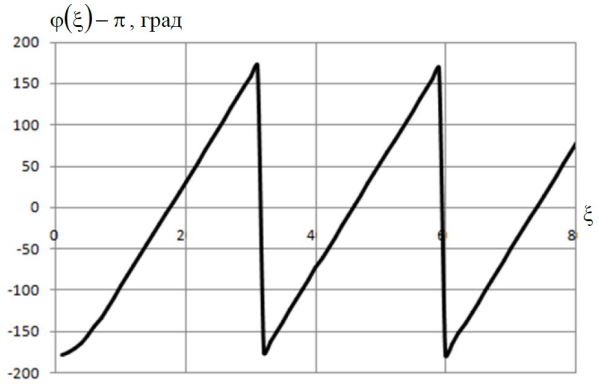


Рис. 3. График аргумента комплексного коэффициента теплопередачи по переменной составляющей

Расчет собственной частоты ω_1 и соответствующего ей периода колебаний t_1 (его можно назвать постоянной времени слоя 1 для тепловых процессов) дает такие результаты: $\omega_1 = 2,40 \cdot 10^{-5}$; $t_1 = 2\pi/\omega_1 = 3,03$.

В этом характерном режиме коэффициент теплопередачи будет следующим: $k(\xi)/k = 0,636$; $\phi - \pi = -95,6°$.

Заключение

Исследовано температурное поле в двухслойной плоской стенке в ситуации, когда на имеющийся между поверхностями стенки постоянный температурный перепад накладываются гармонические колебания температуры одной из поверхностей.

Введено понятие комплексного коэффициента теплопередачи по переменной составляющей, который распространяет применяемое в литературе понятие коэффициента теплопередачи двухслойной стенки для стационарных температурных полей на случай полей, гармонически изменяющихся во времени, и связывает амплитуду и начальную фазу колебаний температуры на одной из поверхностей с амплитудой и начальной фазой плотности теплового потока через другую поверхность.

Для записи модуля и аргумента комплексного коэффициента теплопередачи введены понятия собственных частот для каждого из двух слоев, составляющих пластину; с их помощью модуль и аргумент представляются как функции безразмерной переменной, квадрат которой имеет смысл относительной частоты температурных колебаний. Показано, что значение относительной частоты, равное единице, является той границей, движение от которой в одну и другую стороны позволяет говорить о характерных свойствах комплексного коэффициента теплопередачи при «низких» и «высоких» частотах.

В качестве иллюстрации проведен расчет коэффициента теплопередачи для пластины, материалами слоев которой являются дерево и глина.

Формулируя в кратком виде цель предпринятого здесь исследования, можно сказать, что в статье рассмотрена и для частного случая впервые решена классическая для теории теплопроводности задача о распространении температурных волн в плоскослоистых средах. Полученные результаты найдут применение в теории теплообменных аппаратов, в которых обмен теплом между двумя средами происходит через разделяющую их плоскую стенку, а также при математическом моделировании колебаний температуры и влажности внутри зданий, вызываемых колебаниями температуры окружающей среды. Еще одним применением полученных формул могут быть теория теплоизоляции, а также теория тепловых процессов в промерзающе-протаивающих грунтах, результаты которой используются при планировании хозяйственной деятельности в области распространения мерзлых пород.

Наконец, построенное аналитическое решение, как это часто происходит на практике, может быть использовано в процедуре апробации численных алгоритмов для решения задач математической физики [21].

В качестве направлений, в которых может быть продолжена начатая в данной статье работа, можно указать на расчет частотных характеристик двухслойной пластины при других, отличных от принятых здесь граничных условий, а также проведение имеющих важное значение для практики аналогичных расчетов с учетом содержащейся в материале влаги. Учет влаги при расчете частотной характеристики *полупространства* уже произведен при участии автора в работах [3–6].

Наконец, несомненный интерес представляет продолжение начатого здесь исследования в следующем направлении.

Несложно понять, что при большом числе слоев получение частотной характеристики пластины использованным выше методом превратится в трудновыполнимую задачу. Причина в том, что мы пользовались классическим подходом, основанным на непрерывности температуры и плотности теплового потока при переходе через границы между слоями. Между тем в литературе разработаны и другие подходы к исследованию слоистых сред, в рамках которых вычислительные процедуры существенным образом упрощаются. В монографии [9] для этих целей используется понятие *характеристической матрицы* каждого из слоев, составляющих пластину, а в монографии [10] центральным понятием для расчета является понятие *импеданса* каждого слоя. Но в указанных работах расчетные алгоритмы развиваются в применении к *волновому уравнению*, а в отношении *уравнения диффузии* исследование такого рода еще не проведено. Полученные на этом пути результаты будут опубликованы автором позже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аналитический обзор подходов и методов математического моделирования процессов промерзания и морозного пучения грунтов / Е. В. Сафронов, В. Г. Четверев, А. В. Брушков, С. Н. Булдович, В. З. Хилимонюк, Л. В. Григорьев, Е. М. Макарычева, Е. В. Гниломедов // Криосфера Земли. – 2022. – Т. 26, № 3. – С. 30–42. – DOI: 10.15372/KZ20220304

2. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

3. Афанасьев, А. М. Обобщение задачи Фурье о температурных волнах в полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 13–21. – DOI: http://dx.doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21

4. Афанасьев, А. М. Решение задач геокриологии на основе формул для затухающих гармонических волн тепломассопереноса в однородном полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Инженерно-физический журнал. – 2023. – Т. 96, № 2. – С. 392–400.

5. Афанасьев, А. М. Задача о тепломассообмене полупространства с воздушным потоком при периодическом изменении температуры воздуха / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахра-

чева // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2024. – Т. 27, № 2. – С. 14–28. – DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.2

6. Афанасьев, А. М. Решение задач геокриологии на основе обобщенной теории Фурье для температурных волн в полупространстве / А. М. Афанасьев, Ю. С. Бахрачева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2024. – Т. 27, № 4. – С. 83–93. – DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.4.83-93

7. Афанасьев, А. М. Установившаяся теплопередача через плоскую стенку в режиме гармонического изменения температуры поверхности / А. М. Афанасьев // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2025. – Т. 28, № 3. – С. 76–89.

8. Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование процесса теплопередачи через многослойные ограждающие конструкции зданий / Ф. Г. Ахмадиев, Р. Ф. Гиззятов // Инженерно-физический журнал. – 2022. – Т. 95, № 5. – С. 1155–1165.

9. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 856 с.

10. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – М. : Наука, 1973. – 343 с.

11. Горелик, Я. Б. Расчет протаивания и обратного промерзания мерзлых грунтов вокруг эксплуатационных скважин / Я. Б. Горелик, И. В. Земеров // Криосфера Земли. – 2025. – Т. 29, № 2. – С. 43–54. – DOI: 10.15372/KZ20250204

12. Зоммерфельд, А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики / А. Зоммерфельд. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 457 с.

13. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

14. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – М. : Издательская группа URSS, 2023. – 416 с.

15. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 600 с.

16. Лыков, А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. – М. ; Л. : Энергия, 1968. – 471 с.

17. Кудрявцев, В. А. Мерзлотоведение (краткий курс) / В. А. Кудрявцев. – М. : Изд-во МГУ, 1981. – 240 с.

18. Михеев, М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М. : Бастет, 2010. – 344 с.

19. Морс, Ф. М. Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – М. : Изд-во иностр. лит., 1960. – 886 с.

20. Пехович, А. И. Расчеты теплового режима твердых тел / А. И. Пехович, В. М. Жидких. – Л. : Энергия, 1976. – 352 с.

21. Решение трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов с учетом фазовых переходов / М. П. Галанин, Н. Н. Прошунин, А. С. Родин, Д. Л. Сорокин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2016. – № 66. – С. 27. – DOI: 10.20948/prepr-2016-66

22. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 724 с.

23. Франк, Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть 2 / Ф. Франк, Р. Мизес. – Л. ; М. : ОНТИ, Гл. ред. общетехн. лит., 1937. – 998 с.

24. Чжоу, Бичэн Моделирование порового давления воды в промерзающих дисперсных грунтах при миграции влаги / Бичэн Чжоу, А. В. Брушков, ЦзяБо Ху // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. – 2023. – № 6. – С. 39–46. – DOI: 10.31857/S0869780923060024

25. Эккерт, Э. Р. Теория тепло- и массообмена / Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк. – М. ; Л., 1961. – 680 с.

REFERENCES

1. Safronov E.V., Chetverev V.G., Brushkov A.V., Buldovich S.N., Khilimonyuk V.Z., Grigoryev L.V., Makarycheva E.M., Gnilomedov E.V. Analytical Review of Approaches and Methods of Mathematical Modeling of the Processes of Freezing and Frost Heaving of Soils. *Kriosfera Zemli*, 2022, vol. 26, no. 3, pp. 30-42. DOI: 10.15372/KZ20220304

2. Aramanovich I.G., Levin V.I. *Mathematical Physics Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.

3. Afanasev A.M., Bakhracheva Yu.S. Generalization of the Fourier Problem of Temperature Waves in a Half-Space. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2021, vol. 24, no. 2, pp. 13-21. DOI: http://dx.doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21

4. Afanasev A.M., Bakhracheva Yu.S. Solving Problems of Geocryology Based on Formulas for Damped Harmonic Heat and Mass Transfer Waves in a Homogeneous Half-Space. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2023, vol. 96, no. 2, pp. 392-400.

5. Afanasev A.M., Bakhracheva Yu.S. The Problem of Heat and Mass Transfer of a Half-Space with an Air Flow During Periodic Changes in Air Temperature. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2024, vol. 27, no. 2, pp. 14-28. DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.2.2

6. Afanasev A.M., Bakhracheva Yu.S. Solving Problems of Geocryology Based on Generalized Fourier Theory for Temperature Waves in Half-Space. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2024, vol. 27, no. 4, pp. 83-93. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.4.83-93

7. Afanasev A.M. Steady-State Heat Transfer Through a Flat Wall in the Mode of Harmonic Surface Temperature Change. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2025, vol. 28, no. 3, pp. 76-89.

8. Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F. Mathematical Modeling of the Heat Transfer Process Through Multilayer Enclosing Structures of Buildings. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2022, vol. 95, no. 5, pp. 1155-1165.

9. Born M., Volf E. *Fundamentals of Optics*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 856 p.

10. Brekhovskikh L.M. *Waves in Layered Media*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 343 p.

11. Gorelik Ya.B., Zemerov I.V. Calculation of Thawing and Refreezing of Frozen Soils Around Production Wells. *Kriosfera Zemli*, 2025, vol. 29, no. 2, pp. 43-54. DOI: 10.15372/KZ20250204

12. Zommerfeld A. *Partial Differential Equations of Physics*. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1950. 457 p.

13. Karslou G., Eger D. *Thermal Conductivity of Solids*. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.

14. Kutateladze S.S. *Fundamentals of Heat Exchange Theory*. Moscow, Izdatelskaya gruppa URSS, 2023. 416 p.

15. Lykov A.V. *Theory of Thermal Conductivity*. Moscow, Vysshh. shk. Publ., 1967. 600 p.

16. Lykov A.V. *Drying Theory*. Moscow; – Leningrad, Energiya Publ., 1968. 471 p.

17. Kudryavtsev V.A. *Permafrost Science (Short Course)*. Moscow, Izd-vo MGU, 1981. 240 p.

18. Mikheev M.A., Mikheeva I.M. *Fundamentals of Heat Transfer*. Moscow, Basted Publ., 2010. 344 p.

19. Mors F.M., Feshbakh G. *Methods of Theoretical Physics*. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1960. 886 p.

20. Pekhovich A.I., Zhidkikh V.M. *Calculations of the Thermal Regime of Solids*. Leningrad, Energiya Publ., 1976. 352 p.

21. Galanin M.P., Proshunin N.N., Rodin A.S., Sorokin D.L. Solving the Three-Dimensional Unsteady Heat Equation by the Finite Element Method, Taking Into Account Phase Transitions. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2016, no. 66, p. 27. DOI: 10.20948/prepr-2016-66

22. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.

23. Frank F., Mizes R. *Differential and Integral Equations of Mathematical Physics. Part 2*. Leningrad, Moscow, ONTI, Gl. red. obshchetekhn. lit., 1937. 998 p.

24. Chzhou Bichen, Brushkov A.V., Khu TszyaBo Modeling of Pore Pressure of Water in Freezing Dispersed Soils During Moisture Migration. *Geoekologiya. Inzhenernaya geologiya. Gidrogeologiya. Geokriologiya*, 2023, no. 6, pp. 39-46. DOI: 10.31857/S0869780923060024

25. Ekkert E.R., Dreyk R.M. *Theory of Heat and Mass Transf*. Moscow, Leningrad, 1961. 680 p.

HEAT TRANSFER COEFFICIENT THROUGH A FLAT TWO-LAYER WALL IN THE REGIME OF HARMONIC CHANGE OF SURFACE TEMPERATURE

Anatoliy M. Afanasyev

Candidate Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
a.m.afanasiev@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-3703-3167
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. For a flat two-layer wall under boundary conditions of the first kind, a generalization of the concept of the heat transfer coefficient is given for the case when the temperature of one of the surfaces is kept constant, and the temperature of the other surface, along with a constant component, also has a component that varies over time according to a harmonic law. In contrast to the case of fields that remain unchanged over time, the new coefficient is complex, it has the meaning of a frequency response and relates the amplitude and initial phase of temperature fluctuations on one of the wall surfaces to the amplitude and initial phase of the heat flow transmitted through it. The concept of the natural frequency of a two-layer wall is introduced, which characterizes its heat transfer properties in the field of harmonic fields in time, and the oscillation period corresponding to the natural frequency is called the time constant of the plate for thermal processes. The modulus and argument of the complex heat transfer coefficient are presented as functions of a dimensionless variable, the square of which has the meaning of the relative frequency of the heat wave. The dependence of the heat transfer coefficient on the frequency, thermophysical characteristics of the wall layers and their thickness is investigated. The results obtained will find application in the theory of heat exchangers of the regenerative type, in the theory of algorithms for calculating fluctuations in indoor temperature and humidity caused by fluctuations in environmental characteristics, as well as in geocryology for modeling seasonal temperature and humidity fluctuations in freezing-thawing soils.

Key words: mathematical physics, theory of thermal conductivity, harmonic regime, layered medium, plate problem, heat exchangers, regenerative process, heat transfer coefficient.