УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

# О КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ-РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

**Клячин Алексей Александрович**

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа и теории функций
Волгоградского государственного университета
klyachin-aa@yandex.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

**Аннотация.** В настоящей работе определяется уклонение кусочно-линейного почти-решения уравнения минимальной поверхности и выводится общая формула его вычисления. На основе данного понятия получена аппроксимация уравнения и доказывается, что уклонение сходится к интегралу от модуля средней кривизны для графика $C^2$-гладкой функции.

**Ключевые слова:** кусочно-линейная функция, почти-решение, уравнение минимальной поверхности, аппроксимация уравнения, уклонение кусочно-линейного почти-решения.

## Введение

В работе [2] вводится понятие почти-решения для эллиптических уравнений, которое для уравнения минимальных поверхностей

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{1}$$

будет выглядеть следующим образом. Функция $f \in W^{1,p}(\Omega)$ называется почти-решением уравнения минимальной поверхности в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, если найдется $\varepsilon \geq 0$ такое, что для любой функции $h \in C_0^1(\Omega)$, $|h(x)| \leq 1$ в $\Omega$ выполнено

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx \right| \leq \varepsilon.$$

Наименьшая из величин $\varepsilon \geq 0$, которую будем обозначать $\varepsilon_Q(f)$, удовлетворяющая этому определению, называется уклонением почти-решения $f(x)$. Другими словами,

$$\varepsilon_Q(f) = \sup \left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $h \in C_0^1(\Omega)$, таким, что $|h(x)| \leq 1$ в $\Omega$. Отметим, что если функция $f \in C^2(\Omega)$ и $\varepsilon_Q(f) = 0$, то функция $f$ является решением уравнения (1) в области $\Omega$.

Для получения уравнения, аппроксимирующего уравнение минимальной поверхности, нам потребуется несколько видоизменить приведенное определение для класса кусочно-линейных функций. В связи с этим мы вводим понятие уклонения кусочно-линейного почти-решения, вычисляем его и доказываем, что введенная величина приближает интеграл от модуля средней кривизны графика $C^2$-гладкой функции.

## 1. Основные результаты

Пусть область $\Omega$ представляет собой многогранник, разбитый на тетраэдры $T_k$, $k = 1, ..., N$. Обозначим через $P_1, P_2, ..., P_M$ вершины этих тетраэдров. Символом $P'$ будем обозначать множество тех вершин, которые расположены внутри многогранника $\Omega$, а через $P''$ — множество граничных вершин. Зададим в каждой вершине $P_i$ произвольное значение $f_i$. На основе этих значений построим кусочно-линейную функцию $f^N(x)$ такую, что $f^N(P_i) = f_i, i = 1, ..., M$. Тогда в каждом тетраэдре $T_k$ функция $f^N(x)$ линейная, поэтому $\nabla f^N(x) \equiv \mathrm{const}$ в $T_k$.

Через $\varphi_i(x),\ i = 1, ..., N$, обозначим такую кусочно-линейную функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_i(x_j) = 0 \text{ при } j \neq i,\ \varphi_i(x_j) = 1 \text{ при } j = i.$$

Тогда очевидно, что

$$f^N(x) = \sum_{i=1}^{M} f_i \varphi_i(x),$$

при этом $\max\limits_{\overline{\Omega}} |f^N(x)| = \max\limits_{1 \le i \le M} |f_i|$.

Уклонением почти-решения $f^N$ будем называть величину

$$\varepsilon_Q(f^N) = \sup \left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^N|^2}} dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем кусочно-линейным функциям вида

$$h(x) = \sum_{i=1}^{M} h_i \varphi_i(x),$$

таким, что $|h_i| \le 1$ для всех $i = 1, ..., M$ и $h_i = 0$ для $P_i \in P''$ (то есть для граничных вершин). Таким образом мы сужаем множество функций $h(x)$, по которым ищется точная верхняя грань. Вычислим уклонение для $f^N$ по этому определению.

Зафиксируем произвольно $i = \overline{1, M}$. Пусть $T_1^i, T_2^i, ..., T_{k(i)}^i$ — те тетраэдры, у которых вершиной будет точка $P_i$. Выходящие из этой вершины грани тетраэдра $T_j^i$, $j = 1, 2, ..., k(i)$, обозначим $\Gamma_{j1}^i$, $\Gamma_{j2}^i$, ..., $\Gamma_{jn}^i$, и пусть $\Gamma_{jn+1}^i$ оставшаяся грань тетраэдра $T_j^i$, противоположная вершине $P_i$. Обозначим через $\nu_{j1}^i$, $\nu_{j2}^i$, ..., $\nu_{jn}^i$, $\nu_{jn+1}^i$ — внешние по отношению к тетраэдру $T_j^i$ нормали этих граней. Так как в тетраэдре функция $f^N$ линейна, то $\nabla f^N = \xi_j^i \equiv \mathrm{const}$. Ниже $|E|$ означает $(n-1)$-мерную меру множества $E$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^N|^2}}\, dx = \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla \varphi_i \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^N|^2}}\, dx =$$

$$= \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \int_{T_j^i} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla \varphi_i \rangle}{\sqrt{1+|\nabla f^N|^2}}\, dx = \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \int_{T_j^i} \frac{\langle \xi_j^i, \nabla \varphi_i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}}\, dx =$$

$$= \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jl}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} \int_{\Gamma_{jl}^i} \varphi_i\, dS = \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \sum_{l=1}^{n} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jl}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jl}^i|.$$

Последнее слагаемое в сумме по $l$ равно нулю, так как функция $\varphi_i = 0$ на грани $\Gamma_{jn+1}^i$. Преобразуем данное выражение следующим образом

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jl}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jl}^i| = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jl}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jl}^i| - \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \int_{\Gamma_{jl}^i} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jl}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} dS - \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| = \int_{\partial T_j^i} \frac{\langle \xi_j^i, \nu \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}}\, dS - \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| =$$

$$= -\frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i|,$$

так как интеграл равен нулю по формуле Гаусса — Остроградского. Поэтому приходим к равенству

$$\int_{\Omega} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla h \rangle}{\sqrt{1+|\nabla f^N|^2}}\, dx = -\frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } P_i} h_i \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i|.$$

Тогда

$$\varepsilon_Q(f) \le \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } P_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| \right|.$$

Очевидно, что неравенство превращается в равенство для такой функции $h$, которая в граничных вершинах равна нулю, а во внутренних вершинах равна

$$h_i = \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| \right).$$

Таким образом, справедливо утверждение.

**Теорема 1.** *Уклонение почти-решения $f^N$ уравнения минимальной поверхности вычисляется по формуле*

$$\varepsilon_Q(f^N) = \frac{1}{n} \sum_{\textit{внутр. } P_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1+|\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| \right|. \tag{2}$$

**Замечание.** Аналогичным образом можно вычислить уклонение почти-решения для других дифференциальных уравнений. Например, уклонение кусочно-линейного почти-решения $f^N(x)$ уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_\Delta(f^N) = \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } P_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle |\Gamma_{jn+1}^i| \right|.$$

Выясним, как себя ведет величина $\varepsilon_Q(f^N)$ при $N \to \infty$ на следующем частном примере. Рассмотрим квадрат $\Omega = [0;1] \times [0;1]$. Зафиксируем $N$ и разобъем квадрат $\Omega$ на квадраты прямыми

$$x = x_i = \frac{i}{N}, \quad y = y_j = \frac{j}{N}, \quad i, j = 0, 1, 2, ..., N.$$

Каждый из полученных квадратов разобъем на два треугольника диагональю, проведенной с нижнего левого угла в верхний правый угол. Пусть в квадрате $[0;1] \times [0;1]$ задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$. Далее обозначим через $u^N(x, y)$ кусочно-линейную функцию, которая определяется значениями в вершинах сетки следующим образом

$$u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Вычислим уклонение почти-решения $u^N(x)$ по формуле (2). Фиксируем $i$, $1 \le i \le \le N-1$, и $j$, $1 \le j \le N-1$. К вершине $(x_i, y_j)$ примыкают 6 треугольников:

$$T_1 : (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}), (x_i, y_{j+1}) \quad T_2 : (x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i-1}, y_j)$$

$$T_3 : (x_i, y_j), (x_{i-1}, y_j), (x_{i-1}, y_{j-1}) \quad T_4 : (x_i, y_j), (x_{i-1}, y_{j-1}), (x_i, y_{j-1})$$

$$T_5 : (x_i, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_{i+1}, y_j) \quad T_6 : (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1}).$$

Используя равенство (2), получаем

$$\varepsilon_Q(u^N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{6} \frac{\langle \xi_l^{ij}, \nu_l^{ij} \rangle}{\sqrt{1 + |\xi_l^{ij}|^2}} |\Gamma_l^{ij}|,$$

где

$$|\Gamma_l^{ij}| = 1/N, \ l = 1, 3, 4, 6, \quad |\Gamma_l^{ij}| = \sqrt{2}/N, \ l = 2, 5,$$

и градиенты соответствующих линейных функций

$$\xi_1^{ij} = \left( \frac{u_{i+1j+1} - u_{ij+1}}{h}, \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h} \right), \quad \xi_2^{ij} = \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h}, \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h} \right),$$

$$\xi_3^{ij} = \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h}, \frac{u_{i-1j-1} - u_{i-1j}}{h} \right), \quad \xi_4^{ij} = \left( \frac{u_{ij-1} - u_{i-1j-1}}{h}, \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h} \right),$$

$$\xi_5^{ij} = \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h}, \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h} \right), \quad \xi_6^{ij} = \left( \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h}, \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j-1}}{h} \right),$$

где $h = 1/N$. Нормальные векторы имеют вид

$$\nu_1^{ij} = (0, 1), \ \nu_2^{ij} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \ \nu_3^{ij} = (-1, 0),$$

$$\nu_4^{ij} = (0,-1,\ \nu_5^{ij} = (1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}),\ \nu_6^{ij} = (1,0)).$$

Таким образом,

$$\varepsilon_Q(u^N) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N-1}\left|\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}} - \frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}} + \frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}} - \frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{\sqrt{1+|\xi_3^{ij}|^2}} -\right.$$

$$\left. - \frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}} + \frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}} - \frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}} + \frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_6^{ij}|^2}}\right|.$$

Рассмотрим разность

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}} - \frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}} =$$

$$= \frac{u_{ij+1}-u_{ij}-(u_{ij}-u_{ij-1})}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}} + (u_{ij}-u_{ij-1})\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}}\right) =$$

$$= \frac{u_{ij+1}-2u_{ij}+u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}} + \frac{(u_{ij}-u_{ij-1})(|\xi_4^{ij}|^2-|\xi_1^{ij}|^2)}{\left(\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}+\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}\right)\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}}.$$

Так как функция $u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемая, то

$$u_{ij+1}-2u_{ij}+u_{ij-1} = (u''_{yy}(x_i,y_j)+O(h))h^2,$$

$$u_{ij}-u_{ij-1} = (u'_y(x_i,y_j)+O(h))h,$$
$$u_{ij-1}-u_{i-1j-1} = (u'_x(x_i,y_j)+O(h))h,$$
$$u_{i+1j+1}-u_{ij+1} = (u'_x(x_i,y_j)+O(h))h,$$
$$u_{ij+1}-u_{ij} = (u'_y(x_i,y_j)+O(h))h,$$

$$u_{ij-1}-u_{i-1j-1} = u'_x(x_i,y_{j-1})h - \frac{1}{2}u''_{xx}(x_i,y_{j-1})h^2 + O(h)h^2,$$

$$u_{i+1j+1}-u_{ij+1} = u'_x(x_i,y_{j+1})h + \frac{1}{2}u''_{xx}(x_i,y_{j+1})h^2 + O(h)h^2$$

при $h\to 0$. Тогда

$$|\xi_4^{ij}|^2-|\xi_1^{ij}|^2 = \left(\frac{u_{ij-1}-u_{i-1j-1}}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h}\right)^2 - \left(\frac{u_{i+1j+1}-u_{ij+1}}{h}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h}\right)^2 = \left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h}+\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h}\right)\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}-u_{ij+1}+u_{ij}}{h}\right) +$$

$$+\left(\frac{u_{ij-1}-u_{i-1j-1}}{h}+\frac{u_{i+1j+1}-u_{ij+1}}{h}\right)\left(\frac{u_{ij-1}-u_{i-1j-1}-u_{i+1j+1}+u_{ij+1}}{h}\right) =$$

$$= h(2u'_y(x_i,y_j)+O(h))(-u''_{yy}(x_i,y_j)+O(h)) +$$

$$+h(2u'_x(x_i,y_j)+O(h))(-2u''_{xy}(x_i,y_j)-u''_{xx}(x_i,y_j)+O(h))=$$
$$=-h(2u'_y(x_i,y_j)u''_{yy}(x_i,y_j)+2u'_x(x_i,y_j)(2u''_{xy}(x_i,y_j)+u''_{xx}(x_i,y_j))+O(h)).$$

Поэтому

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_1^{ij}|^2}}-\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_4^{ij}|^2}}=$$
$$=h^2\left(\frac{u''_{yy}}{\sqrt{1+(u'_x)^2+(u'_y)^2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}-\frac{(u'_y)^2u''_{yy}+2u'_xu_yu''_{xy}+u'_xu'_yu''_{xx}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}+O(h)\right). \quad (3)$$

Аналогично,

$$\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_6^{ij}|^2}}-\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{\sqrt{1+|\xi_3^{ij}|^2}}=$$
$$=h^2\left(\frac{u''_{xx}}{\sqrt{1+(u'_x)^2+(u'_y)^2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}-\frac{(u'_x)^2u''_{xx}+2u'_xu_yu''_{xy}+u'_xu'_yu''_{yy}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}+O(h)\right). \quad (4)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}-\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}}=$$
$$=\frac{u_{ij+1}-u_{ij}-(u_{ij}-u_{ij-1})}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}+(u_{ij}-u_{ij-1})\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}}\right)=$$
$$=\frac{u_{ij+1}-2u_{ij}+u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}+\frac{(u_{ij}-u_{ij-1})(|\xi_5^{ij}|^2-|\xi_2^{ij}|^2)}{\left(\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}+\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}\right)\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}}.$$

Так как

$$|\xi_5^{ij}|^2-|\xi_2^{ij}|^2=\left(\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h}+\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h}\right)\left(\frac{u_{i+1j}-2u_{ij}+u_{i-1j}}{h}\right)+$$
$$+\left(\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h}+\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h}\right)\left(\frac{2u_{ij}-u_{ij-1}-u_{ij+1}}{h}\right),$$

то, рассуждая так же как и выше, приходим к равенству

$$\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}-\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}}=$$
$$=h^2\left(\frac{u''_{yy}}{\sqrt{1+(u'_x)^2+(u'_y)^2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}+\frac{u'_xu_yu''_{xx}-u'_xu'_yu''_{yy}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}}\bigg|_{(x_i,y_j)}+O(h)\right). \quad (5)$$

Аналогично,

$$\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{\sqrt{1+|\xi_5^{ij}|^2}}-\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{\sqrt{1+|\xi_2^{ij}|^2}}=$$

$$= h^2 \left( \frac{u''_{xx}}{\sqrt{1+(u'_x)^2+(u'_y)^2}} \Bigg|_{(x_i,y_j)} + \frac{u'_x u_y u''_{yy} - u'_x u'_y u''_{xx}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}} \Bigg|_{(x_i,y_j)} + O(h) \right). \qquad (6)$$

Из равенств (3)–(6) получаем

$$\varepsilon_Q(u^N) = h^2 \sum_{i,j=1}^{N-1} \left| \frac{(1+(u'_y)^2)u''_{xx} - 2u'_x u'_y u''_{xy} + (1+(u'_x)^2)u''_{yy}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}} \right|_{(x_i,y_j)} + O(h).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в этом равенстве, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** *Пусть* $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_Q(u^N) = \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{(1+(u'_y)^2)u''_{xx} - 2u'_x u'_y u''_{xy} + (1+(u'_x)^2)u''_{yy}}{(1+(u'_x)^2+(u'_y)^2)^{3/2}} \right| dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} |Q[u(x,y)]| \, dxdy.$$

Таким образом, приравняв к нулю уклонение $\varepsilon_Q(u^N)$, получим систему нелинейных уравнений относительно искомых $u_{ij}$

$$\mu_{ij}u_{ij} = (\mu_{ij,5}+\mu_{ij,6})u_{i+1j} + (\mu_{ij,2}+\mu_{ij,3})u_{i-1j} + (\mu_{ij,1}+\mu_{ij,2})u_{ij+1} + (\mu_{ij,4}+\mu_{ij,5})u_{ij-1},$$

где

$$\mu_{ij,k} = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi_k^{ij}|^2}}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ij,1} + 2\mu_{ij,2} + \mu_{ij,3} + \mu_{ij,4} + 2\mu_{ij,5} + \mu_{ij,6}, \quad , i,j = 1,...,N-1.$$

Данная система уравнений, как следует из теоремы 2, аппроксимирует уравнение (1). Отметим, что в работе [1] получена аналогичная система уравнений по девятиточечному шаблону, с помощью которой авторы приближенно находят поверхности минимальной площади.

## *ПРИМЕЧАНИЕ*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-97034-р_поволжье_а.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Абдюшев, А. А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А. А. Абдюшев, И. Х. Мифтахутдинов, П. П. Осипов // Изв. КазГАСУ, Строительные конструкции, здания и сооружения. — 2009. — № 2 (12). — С. 86–92.

2. Миклюков, В. М. Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 530 с.

## REFERENCES

1. Abdyushev A.A., Miftakhutdinov I.Kh., Osipov P.P. Proektirovanie nepologikh obolochek minimal'noy poverkhnosti [Design of steep shells with minimal surface]. *Izv. KazGASU, Stroitel'nye konstruktsii, zdaniya i sooruzheniya* [News of KSUAE], 2009, no. 2 (12), pp. 86–92.
2. Miklyukov V.M. *Geometricheskiy analiz. Differentsial'nye formy, pochti-resheniya, pochti kvazikonformnye otobrazheniya* [Geometric analysis. Differential forms, almost-solutions, almost quasi-conformal mapping]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2007. 530 p.


## ON PIECEWISE-LINEAR ALMOST-SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS


**Klyachin Aleksey Aleksandrovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Head of Department of Mathematical Analysis and Function Theory
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru
Prospect Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation



**Abstract.** In this paper we define deviation $\varepsilon_Q(f^N)$ of piecewise-linear almost-solution $f^N$ of the minimal surface equation $Q[f(x)] = 0$ and we get a general formula to calculate it. Let $T_1^i, T_2^i, ..., T_{k(i)}^i$ be tetrahedrons which have vertex $P_i$. We denote $\Gamma_{j1}^i$, $\Gamma_{j2}^i$, ..., $\Gamma_{jn}^i$ sides leaving from vertex $P_i$ of the tetrahedron $T_j^i$, $j = 1, 2, ..., k(i)$, and let be $\Gamma_{jn+1}^i$ the side of tetrahedron $T_j^i$ opposite to vertex $P_i$. We set by $\nu_{j1}^i$, $\nu_{j2}^i$, ..., $\nu_{jn}^i$, $\nu_{jn+1}^i$ the external normal vectors of the sides $\Gamma_{j1}^i$, $\Gamma_{j2}^i$, ..., $\Gamma_{jn}^i$ relatively of $T_j^i$. As $f^N$ is linear function in $T_j^i$ then $\nabla f^N = \xi_j^i \equiv \text{const}$. Then the following equality holds

$$\varepsilon_Q(f^N) = \frac{1}{n} \sum_{\text{inner } P_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1 + |\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| \right|,$$

where $\Gamma_{jn+1}^i$ is exterior side relatively $P_i$. On the basis of this concept it obtained approximation equation $\varepsilon_Q(f^N) = 0$ or $\mu_{ij} u_{ij} = (\mu_{ij,5} + \mu_{ij,6}) u_{i+1j} + (\mu_{ij,2} + \mu_{ij,3}) u_{i-1j} + (\mu_{ij,1} + \mu_{ij,2}) u_{ij+1} + (\mu_{ij,4} + \mu_{ij,5}) u_{ij-1}$, where

$$\mu_{ij,k} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\xi_k^{ij}|^2}},$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ij,1} + 2\mu_{ij,2} + \mu_{ij,3} + \mu_{ij,4} + 2\mu_{ij,5} + \mu_{ij,6}, \quad i, j = 1, ..., N-1$$

and proved that the deviation $\varepsilon_Q(u^N)$ converges to the integral of the modulus of the mean curvature of the graph of $C^2$-smooth function $u$, that is

$$\lim_{N \to \infty} \varepsilon_Q(u^N) = \iint\limits_{\Omega} |Q[u(x, y)]| \, dxdy.$$

Thus, the obtained system of nonlinear equations aproximate the minimal surface equation.



**Key words:** piecewise-linear functions, almost-solution, minimal surface equation, approximation equation, deviation of piecewise-linear almost-solution.