УДК 517.954
ББК 22.161.6

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ [1]

Лосев Александр Георгиевич

Доктор физико-математических наук,
директор института математики и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
allosev59@gmail.com
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Мазепа Елена Алексеевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
lmazepa@rambler.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений некоторых квазилинейных эллиптических неравенств на модельных римановых многообразиях. В частности, найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений, а также условия существования и мощность множества положительных решений изучаемых неравенств на рассматриваемых римановых многообразиях. Данные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работах Naito. Y. и Usami H. для евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические неравенства, асимптотическое поведение, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия, мощность множества решений.

Введение

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений неравенства

$$Lu \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq c(x)f(u) \tag{1}$$

на некомпактных римановых многообразиях специального вида.

Одним из источников изучения асимптотического поведения решений и субрешений эллиптических дифференциальных уравнений на некомпактных римановых многообразиях является классификационная теория римановых поверхностей и многообразий.

Отличительным свойством поверхностей и многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности (на данном многообразии) является тождественной постоянной. Поиски признаков параболичности типа римановых многообразий имеют большую историю. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из обзора [9].

За последние годы опубликован ряд работ, посвященных вопросам выполнения теорем типа Лиувилля для различных классов решений и субрешений линейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях. В частности, точные условия выполнения теорем типа Лиувилля о существовании целых решений (положительных, ограниченных и т. д.) различных линейных уравнений на модельных римановых многообразиях были получены в работах [2; 3; 6]. Опишем данные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0, \infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множеством точек M_q является все $\mathbf{R}^n$;

2) в полярных координатах (r, θ) (где $r \in (0, \infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в точке O является гладким продолжением метрики (2).

Отметим, что в ряде работ изучается асимптотическое поведение целых решений различных квазилинейных уравнений и неравенств на модельных многообразиях и в евклидовом пространстве (см., например, [4; 5; 7; 8; 10–13]).

Будет считать далее, что функция A в неравенстве (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} A \in C(0, \infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{при} \quad p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0, \infty), \\ (pA(p))' > 0 \text{ для } p > 0, \end{cases}$$

$c(x) \equiv c(r)$ — непрерывная положительная на R_+ функция, а функция $f \not\equiv 0$ такова, что

$$f \in C(0, \infty), \quad f(u) \geq 0 \text{ при } u \geq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Нами будет использоваться также следующее предположение на функцию f:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{существует неубывающая функция } g \in C(0, \infty) \text{ такая, что} \\ 0 < g(u) \leq f(u) \text{ при } u > 0 \text{ и } g(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнения подобного вида рассматривались многими авторами в евклидовых пространствах (см., например, [10–13]). Наиболее часто в исследованиях встречается функция $A(p)$ следующих видов:

$$A(p) = p^{m-2}, \quad m > 1; \tag{3}$$

$$A(p) = (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}; \tag{4}$$

или, в более общем виде,

$$A(p) = (1 + p^2)^{\alpha}, \quad \alpha \leq \frac{1}{2}. \tag{5}$$

В соответствии с этим, оператор L в неравенстве (1) называется *m-лапласианом* при выборе функции A в виде (3), *оператором средней кривизны* в случае (4), и *обобщенным оператором средней кривизны* в случае (5) при $0 < \alpha < 1/2$.

Целым решением неравенства (1) на римановом многообразии M будем называть функцию $u \in C^1(M)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(M)$, удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in M$.

В простейшем случае $A(p) \equiv 1$, проблема существования целых решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$ изучалась в ряде работ. В частности, если f — неубывающая функция, Keller J. и Osserman R. (см.: [10] и [13]) показали, что неравенство $\Delta u \geq f(u)$ имеет положительные целые решения тогда и только тогда, когда

$$\int^{\infty} \left(\int^{s} f(t)dt \right)^{-\frac{1}{2}} ds = \infty.$$

Naito Y. и Usami H. в работе [12] обобщили их результат и получили критерий существования целых нетривиальных неотрицательных решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$. Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов на классе модельных римановых многообразий.

Сначала рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$. Введем обозначение

$$I(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int_0^r c(s)q^{n-1}(s)\, ds.$$

Заметим, что из условий на метрику модельного риманова многообразия сразу следует, что $I(0) = \lim\limits_{r\to+0} I(r) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ и многообразие M_q таково, что $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$. Тогда, если выполнено условие* (F)*, то на M_q не существует целых положительных решений неравенства* (1).

Далее рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. Определим непрерывную функцию $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ в виде

$$\Psi(p) = p^2A(p) - \int_0^p tA(t)dt, \qquad p \geq 0.$$

Легко показать, что Ψ строго возрастающая и $\Psi(0) = 0$. Также заметим, что при $p \geq 1$ выполнено

$$\Psi(p) + \int_0^1 tA(t)dt = p^2A(p) - \int_1^p tA(t)dt \geq pA(p),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} \Psi(p) = \infty$.

Таким образом, обратная к Ψ функция Φ определена на $[0,\infty)$. Ясно, что Φ строго возрастающая функция и $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$ *и многообразие* M_q *таково, что* $I'(r) \geq k > 0$. *Тогда, если выполнено условие* (F) *и, кроме того,*

$$\int^{\infty} \left(\Phi \left(k \int^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds < \infty, \tag{6}$$

то на M_q *не существует целых положительных решений неравенства* (1).

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$ *и многообразие* M_q *таково, что* $q'(r) \geq 0$. *Тогда, если*

$$\int^{\infty} \left(\Phi \left(C_1 \int^{s} f(t)dt \right) \right)^{-1} ds = \infty, \tag{7}$$

где $C_1 = sup_{[0,\infty)} c(r)$, *то неравенство* (1) *имеет континуум положительных целых решений.*

1. Радиальные решения

В начале данного параграфа сформулируем аналог принципа сравнения, полученного в работе [12], на котором основаны дальнейшие рассуждения.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \subset M$ — *ограниченная область с гладкой границей* $\partial\Omega$, *а* u — *неотрицательное решение* (1) *в* Ω *и* $v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$ — *положительная функция такая, что* $A(|\nabla v|)\nabla v \in C^1(\Omega)$, $Lv \leq c(x)g(v)$ *в* Ω, *и* $u \leq v$ *на границе* $\partial\Omega$. *Тогда, если выполнено условие* (F), *то* $u \leq v$ *в* Ω.

Основой доказываемых утверждений является изучение радиально-симметричных решений $v(r)$ рассматриваемых неравенств. Несложно показать, что на модельном многообразии M_q

$$Lv(r) \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla v(r)|)\nabla v(r)) = q^{1-n}(r)\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)'.$$

Далее рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)' = c(r)q^{n-1}(r)g(v(r)), \quad r \geq 0, \tag{8}$$

где g — непрерывная положительная неубывающая на $(0,\infty)$ функция из условия (F).

Пусть $v(r)$ — решение уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Заметим, что если $v(r)$ определена для $0 \leq r < R \leq \infty$, то $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Действительно, проинтегрировав равенство (8) по отрезку $[0,r], r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = q^{1-n}(r) \int_0^r c(r)q^{n-1}(s)g(v(s))ds, \qquad 0 < r < R. \tag{9}$$

Следовательно, $A(|v'(r)|)v'(r) > 0$ для $0 < r < R$, откуда вытекает, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$.

Лемма 2. *Пусть условие* (F) *выполнено. Тогда, если неравенство* (1) *имеет положительное целое решение* $u(r,\theta) > 0$ *на* M_q, *то на* $[0;\infty)$ *существует положительное решение* $v(r)$ *уравнения* (8) *с условиями* $v(0) > 0$ *и* $v'(0) = 0$.

Доказательство. Предположим противное, то есть указанного в формулировке леммы решения уравнения (8) $v(r)$ не существует, но при этом существует положительное целое решение $u(r,\theta)$ неравенства (1). Из положительности решения неравенства в частности следует, что $u(O) > 0$. Пусть $a \in (0, u(O))$, а $[0;R)$ — максимальный промежуток существования решения v уравнения (8), с условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. В силу предположения выполнено $R < \infty$. Выше мы показали, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Тогда мы имеем либо $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, либо $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$.

В случае $v(r) \to \infty$ при $r \to R$ выберем $R_1 \in (0, R)$ так, чтобы

$$v(R_1) > \max_{\Omega} u(r,\theta), \tag{10}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0, R_1]\}$. Тогда $Lv = c(r)g(v)$ в Ω и $v \geq u$ на $\partial\Omega$. Следовательно, по лемме 1, $u \leq v$ в Ω, что противоречит условию $v(0) = a < u(O)$.

Далее рассмотрим случай, когда $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$. Если при этом найдется $R_1 \in (0;R)$ такое, что будет выполнено неравенство (10), мы получаем противоречие, аналогичное указанному выше. Пусть $v(r) \leq \max\limits_{\theta \in S^{n-1}} u(r,\theta)$ для всех $0 < r < R$. Выберем $R_1 \in (0;R)$ так, чтобы

$$v'(R_1) > \max_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) \right\}, \tag{11}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0, R_1]\}$. Обозначим $\delta = \max\limits_{\theta \in S^{n-1}} (u(R_1,\theta) - v(R_1)) > 0$ и пусть $w(r) = v(r) + \delta$. Тогда $w(R_1) \geq u(R_1,\theta)$ для всех $\theta \in S^{n-1}$ и $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$ для некоторого $\theta^* \in S^{n-1}$. Тогда $Lw \leq c(r)g(w)$ в области Ω, $w \geq u$ на границе $\partial\Omega$ и по лемме получаем $w \geq u$ в Ω.

Далее, учитывая условия $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$, $w(r) \geq u(r,\theta)$ при $(r,\theta) \in B_{R_1}$, получаем

$$v'(R_1) = w'(R_1) \leq \frac{\partial u}{\partial r}(R_1,\theta^*),$$

что противоречит (11). Лемма доказана.

2. Доказательство теорем

Докажем вначале теорему 1.

Доказательство. Предположим противное, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r,\theta) > 0$. Тогда из леммы 2 следует существование положительного решения $v(r)$ уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на луче $[0;\infty)$.

Так как $g(v)$ и $v(r)$ неубывающие функции, то из (9) следует, что

$$A(|v'(r)|)v'(r) \leq g(v(r))I(r). \tag{12}$$

Заметим, что уравнение (8) может быть представлено в виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = c(r)g(v(r)). \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), получаем

$$(A(|v'|)v')' \geq g(v(r)) \left[c(r) - (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} I(r)\right] = g(v(r)) I'(r). \tag{14}$$

Напомним, что $I(0) = 0$. Интегрируя неравенство (14) по отрезку $[0; r]$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) \geq \int_0^r g(v(s)) I'(s)\, ds \geq g(v(0)) I(r). \tag{15}$$

Из условий на функцию A следует, что

$$g(v(0))I(r) \leq A(|v'(r)|)v'(r) \leq \lim_{p\to\infty} pA(p) < \infty, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to \infty$ и переходя в левой части неравенства к верхнему пределу, получаем противоречие с конечностью правой части. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Предположим, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r, \theta) > 0$. Тогда из леммы 2 следует, что на $[0, \infty)$ существует решение $v(r)$ уравнения (8) с начальными условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Из (15) и условия теоремы 2 следует, что при $r \to \infty$ справедливо $\lim\limits_{r\to\infty} v'(r) = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \infty$. Умножая неравенство (14) на $v' > 0$ и интегрируя по отрезку $[0; r]$, получим

$$\int_0^r (A(|v'|)v')'v'\, ds \geq \int_0^r g(v(s))I'(s)v'(s)ds \geq k\int_0^r g(v(s))v'(s)ds = k\int_{v(0)}^{v(r)} g(t)dt.$$

С другой стороны, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int_0^r (A(|v'|)v')'v'\, ds = \int_0^r v'\, d(A(|v'|)v') = (v'(r))^2 A(|v'(r)|) - \int_0^{v'(r)} A(t)t\, dt = \Psi(v'(r)).$$

Следовательно,

$$\Psi(v'(r)) \geq k\int_{v(0)}^{v(r)} g(t)\, dt.$$

Переходя к обратной функции Φ, из последнего неравенства получаем

$$\left(\Phi\left(k\int_{v(0)}^{v(r)} g(s)ds\right)\right)^{-1} \cdot v'(r) \geq 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0; r]$, получаем

$$\int_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(k\int_{v(0)}^{s} g(t)dt\right)\right)^{-1} ds \geq r. \tag{16}$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ в (16), имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi \left(k \int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds = \infty,$$

что противоречит (6). Теорема 2 доказана.

Докажем третью теорему.

Доказательство. Для доказательства нам достаточно показать существование положительного решения $v(r)$ уравнения

$$(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r))' = c(r)q^{n-1}(r)f(v(r)) \tag{17}$$

с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на интервале $[0; \infty)$, поскольку функция $v(r)$ является радиально-симметричным положительным целым решением неравенства (1).

Выберем $a > 0$ такое, что $f(a) > 0$, и пусть $v(r)$ — решение (17) с начальными условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. Интегрируя равенство (17) по $[0; r]$, $\quad r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r c(r)q^{n-1}(s)f(v(s))ds, \quad 0 < r < R. \tag{18}$$

Тогда $v'(r) \geq 0$ для $0 \leq r < R$, так как $A(v'(r))v'(r) \geq 0$. Покажем, что решение $v(r)$ существует на $[0; \infty)$. Предположим противное, что решение $v(r)$ определено на конечном интервале $[0; R)$, $\quad R < \infty$.

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leq r < R$, то $v(R-0)$ принимает значения в промежутке $(0; \infty]$. Рассмотрим случай, когда $v(R-0) < \infty$. Тогда из (18) следует, что $v'(R-0) < \infty$, и следовательно, решение v может быть продолжено вправо за R (см. [1, с. 58–62]). Это противоречит выбору R. Таким образом, $v(R-0) = \infty$.

Представим (17) в следующем виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = c(r)f(v(r)).$$

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leq r < R$ и $q'(r) \geq 0$, то

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' \leq c(r)f(v(r)) \leq Cf(v(r)),$$

где $C = \max_{[0,R]} c(r)$. Умножая последнее неравенство на $v'(r)$ и интегрируя его по отрезку $[0; r]$, $\quad r < R$, получим

$$\Psi(v'(r)) \leq C \int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds.$$

Откуда

$$\left(\Phi \left(C \int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds \right) \right)^{-1} v'(r) \leq 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя еще раз по отрезку $[0;r]$, при $r < R$, имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(C\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \le r, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to R$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi\left(C\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \le R < \infty,$$

что противоречит (7). Следовательно, решение v уравнения (17) с начальными данными $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$ существует на луче $[0, \infty)$. В силу произвольности выбора значения $a > 0$ получаем континуум различных положительных решений уравнения (17), и следовательно, неравенства (1). Теорема 3 доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. — М. : Высш. шк., 1991. — 304 с.

2. Курмакаев, Р. Ф. Асимптотические свойства неограниченных решений эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях / Р. Ф. Курмакаев, А. Г. Лосев // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2 (17). — С. 31–41.

3. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.

4. Лосев, А. Г. О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 867–878.

5. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А Мазепа // Уфим. мат. журн. — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 83–89.

6. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — Т. 445, № 6. — С. 41–49.

7. Мазепа, Е. А. Лиувиллево свойство и краевые задачи для полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53, № 1. — С. 165–179.

8. Мазепа, Е. А. Об асимптотическом поведении решений некоторых полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 41–59.

9. Grigor‘yan, A. A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. A. Grigor‘yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36. — P. 135–249.

10. Keller, J. B. On solutions of $\Delta u = f(u)$ / J. B. Keller // Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — № 10. — P. 503–510.

11. Kusano, T. Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations / T. Kusano, C. A. Swanson // Journal of diff. equation. — 1990. — № 83. — P. 379–399.

12. Naito, Y. Entire solutions of the inequality $\mathrm{div}\,(A(|Du|)Du) \geq f(u)$ / Y. Naito, H. Usami // Math. Z. — 1997. — № 255. — P. 167–175.

13. Osserman, R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ / R. Osserman // Pack. J. Math. — 1957. — № 7. — P. 1641–1647.

REFERENCES

1. Bibikov Yu.N. *Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Treatise on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1991. 304 p.

2. Kurmakaev R.F., Losev A.G. Asimptoticheskie svoystva neogranichennykh resheniy ellipticheskikh uravneniy na model'nykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Asymptotic properties of non-bounded solutions for elliptic equations on model Riemannian manifolds]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 2 (17), pp. 31–41.

3. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsial'nogo vida [Some Liouville theorems on Riemannian manifolds of special type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1991, no. 12, pp. 15–24.

4. Losev A.G., Fedorenko Yu.S. O polozhitel'nykh resheniyakh kvazilineynykh ellipticheskikh neravenstv na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On positive solutions for quasilinear elliptic inequalities on noncompact Riemannian manifolds]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2007, vol. 81, no. 6, pp. 867–878.

5. Losev A.G., Mazepa E.A Ob asimptoticheskom povedenii polozhitel'nykh resheniy nekotorykh kvazilineynykh neravenstv na model'nykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotic behavior of positive solutions for some quasilinear inequalities on noncompact Riemannian manifolds]. *Ufim. mat. zhurn.* [Ufa Mathematical Journal], 2013, vol. 5, no. 1, pp. 83–89.

6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh uravneniy ellipticheskogo tipa na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotic behavior of solutions for some elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, vol. 445, no. 6, pp. 41–49.

7. Mazepa E.A. Liuvillevo svoystvo i kraevye zadachi dlya polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [Liouville property and boundary value problems for semilinear elliptic equatons on noncompact Riemannian manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 2012, vol. 53, no. 1, pp. 165–179.

8. Mazepa E.A. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy nekotorykh polulineynykh ellipticheskikh uravneniy na nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh [On asymptotical behavior of the solutions for some semilinear elliptical equations on noncompact Riemannian manifolds]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2011, no. 1 (14), pp. 41–59.

9. Grigor'yan A.A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135–249.

10. Keller J.B. On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, no. 10, pp. 503–510.

11. Kusano T., Swanson C.A. Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations. *Journal of diff. equation*, 1990, no. 83, pp. 379–399.

12. Naito Y., Usami H. Entire solutions of the inequality $\mathrm{div}\,(A(|Du|)Du) \geq f(u)$. *Math. Z.*, 1997, no. 255, pp. 167–175.

13. Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pack. J. Math.*, 1957, no. 7, pp. 1641–1647.

ON ASYMPTOTICAL BEHAVIOR OF THE POSITIVE SOLUTIONS SOME QUASILINEAR INEQUALITIES ON MODEL RIEMANNIAN MANIFOLDS

Losev Alexander Georgievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Director, Institute of Mathematics and IT
Volgograd State University
allosev59@gmail.com
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Mazepa Elena Alekseevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
lmazepa@rambler.ru
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper asymptotic behavior of positive solutions of quasilinear elliptic inequalities (1) on spherically symmetric noncompact (model) Riemannian manifolds is researched. In particular, we find conditions under which Liouville theorems on no nontrivial solutions, as well as the conditions of existence and cardinality of the set of positive solutions of the studied inequalities on the Riemannian manifolds. The results generalize similar results obtained previously by Naito. Y. and Usami H. for the Euclidean space $\mathbf{R}^n$.

We describe Riemannian manifolds. Fix the origin $O \in \mathbf{R}^n$ and a smooth function q in the interval $[0, \infty)$ such that $q(0) = 0$ and $q'(0) = 1$. We define a model Riemannian manifold M_q as follows:

(1) the set of points M_q is all $\mathbf{R}^n$;

(2) in polar coordinates (r, θ) (where $r \in (0, \infty)$ and $\theta \in S^{n-1}$) Riemannian metric on $M_q \setminus \{O\}$ defined as

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r) d\theta^2,$$

where $d\theta$ — the standard Riemannian metric on the sphere S^{n-1};

(3) Riemannian metric at O is a smooth continuation of the metric.

Will further assume that the function A in the inequality (1) satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{for} \quad p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \text{ for } p > 0, \end{cases}$$

$c(x) \equiv c(r)$ — continuous positive on R_+ function, and the function $f \not\equiv 0$ such that

$$f \in C(0,\infty), \quad f(u) \geq 0 \text{ if } u \geq 0 \text{ and } f(0) = 0.$$

We also use the following assumption on the function f:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{there is a decreasing function } g \in C(0,\infty) \text{ so that} \\ 0 < g(u) \leq f(u) \text{ for } u > 0 \text{ and } g(0) = 0. \end{cases}$$

First, consider the case where $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$. Introduce designation

$$I(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r c(s)q^{n-1}(s)\,ds.$$

Theorem. *Let* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *and manifold* M_q *is such that* $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$. *Then, if the condition* (F)*, then positive integer solutions of the inequality* (1) *on* M_q *does not exist.*

Next, consider the case where $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. We prove a theorem on the non-existence of positive solutions of (1) and the conditions for the existence of a continuum of positive integer solutions of the inequality.

Key words: quasilinear elliptic inequalities, asymptotic behavior, the theorem of Liouville type, model Riemannian manifolds, cardinality of the set of solutions.