УДК 517.95
ББК 22.161.6

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Р.Ф. Курмакаев, А.Г. Лосев

В данной работе рассматриваются решения некоторых линейных эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях. Получены оценки размерностей пространств решений с заданной скоростью роста.

Ключевые слова: *теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия, неограниченные L-гармонические функции, теория потенциала, спектральные свойства.*

Введение

Данная работа посвящена изучению асимптотического поведения неограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях, а полученные результаты относятся к теоремам типа Лиувилля. Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ является тождественной постоянной. Известна справедливость следующих утверждений, носящих название теорем типа Лиувилля:

1) если гармоническая функция u в $\mathbb{R}^n$ имеет конечный интеграл Дирихле, то $u \equiv \mathrm{const}$;

2) если $u \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$ является гармонической функцией и $1 \le p < \infty$, то $u \equiv 0$;

3) если функция u — гармоническая в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству $|u(x)| \le c(1+|x|)^m$, то u — гармонический полином степени, не превышающей m.

Многими исследователями осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения $Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность. Общее представление о современных исследованиях в этом вопросе можно получить, например, из работ A. Grigor'yan [10], А.Г. Лосева [7].

Ряд работ был посвящен изучению гармонических функций и решений стационарного уравнения Шредингера на модельных многообразиях, обобщающих сферически-симметричные. В частности, были получены точные условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на бесконечности, и также условия выполнения теорем типа Лиувилля (см., например, [1–6; 8]).

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B\bigcup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty)\times S$ (где $r_0 > 0$, S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2. \tag{1}$$

Здесь $q(r)$ — положительная, гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta$ — метрика на S.

Рассмотрим на M решение уравнения

$$Lu = \operatorname{div}(b(x)\nabla u) - c(x)u = 0, \tag{2}$$

где $c(x)$ и $b(x)$ — гладкие, неотрицательные функции. В дальнейшем будем считать, что на D выполнены условия $b(r,\theta) \equiv b(r)$, $c(r,\theta) \equiv c(r)$ и $c(r) \not\equiv 0$. Всюду далее полагаем, что

$$0 \le c(r)q^2(r) \le d, \tag{3}$$

$$0 < m \le b(r) \le H, \tag{4}$$

где d, m, H — некоторые константы.

Введем обозначения:

$$J = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} c(\xi)q^{n-1}(\xi)d\xi,$$

$$K = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)},$$

где $n = dimM$.

В дальнейшем исследовании важную роль играет изучение асимптотического поведения решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$\upsilon_l''(r) + \left[(n-1)\frac{q'(r)}{q(r)} + \frac{b'(r)}{b(r)}\right]\upsilon_l'(r) - \left[\frac{\lambda_l}{q^2(r)} + \frac{c(r)}{b(r)}\right]\upsilon_l(r) = 0, \tag{5}$$

которое будем называть спектральным. Здесь λ_l — l-е собственное число оператора Лапласа — Бельтрами на S. Будем считать, что собственные числа пронумерованы в порядке возрастания, то есть выполнено $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ Обозначим $\upsilon_l^0(r)$ — решение уравнения (5) с граничными условиями $\upsilon_l^0(r_0) = 1$ и $(\upsilon_l^0)'(r_0) = 0$.

Опишем вначале некоторые свойства решений данного спектрального уравнения.

Лемма 1. *Если $J = \infty$, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Для всякого неограниченного решения уравнения (5) выполнено $|\upsilon_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$.*

2. *Для всякого ограниченного решения уравнения (5) выполнено:*

   (a) *если $k > 0$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_k(r) = 0$;*

(b) *если* $K < \infty$ *или одновременно* $K = \infty$ *и* $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t)q^{n-1}(t)dt = \infty$,

то $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_0(r) = 0$;

(c) *если* $K = \infty$ *и* $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t)q^{n-1}(t)dt < \infty$, *то существует такая константа* s, *что* $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_0(r) = s$.

3. *Если* $\lambda_{k+i} \geq 2\frac{\lambda_k H + d}{m}$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\upsilon^0_{k+i}(r)}{\upsilon^0_k(r)} = \infty.$$

Если существуют такие константы ν *и* μ, *что* $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \nu$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu$, *то предыдущее равенство выполнено для любого* $i > 0$ *такого, что* $\lambda_{k+i} > \lambda_k$.

4. *Для любого решения уравнения (5) такого, что* $\upsilon_k(r) \to \infty$ *при* $r \to \infty$ *существует постоянная* a_k *такая, что*

$$\lim_{r\to\infty} \left(\upsilon_k(r) - a_k \upsilon^0_k(r)\right) = s,$$

где s *— некоторая константа. Кроме того,* $s = 0$ *при* $k > 0$.

Доказательство данной леммы приведено в приложении.

Введем функцию $nev(\lambda)$, равную числу собственных чисел оператора Лапласа — Бельтрами λ_k на S таких, что $\lambda_k \leq \lambda$. Обозначим через UL_l пространство решений уравнения (2), удовлетворяющих условию $u = \overline{o}(\upsilon^0_l)$ при $r \to \infty$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть риманово многообразие* M *таково, что на* D *выполнено* $J = \infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \nu$ *и* $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu$. *Тогда если* $\lambda_l > \lambda_{l-1}$, *то* $dimUL_l = l$.

Замечание 1. Если риманово многообразие M таково, что на D выполнено $J = \infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \nu$ и $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu$, то $dimUL_l \leq l$.

Теорема 2. *Пусть риманово многообразие* M *таково, что на* D *выполнено* $J = \infty$. *Тогда* $dimUL_l \leq nev(2\frac{\lambda_l H + d}{m})$.

Замечание 2. В случае гармонических функций на модельных многообразиях аналогичные утверждения доказаны в [3], для решений стационарного уравнения Шредингера — в [6] и [4]. Случай квазимодельных многообразий рассмотрен в [2].

1. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Заметим вначале, что из вида метрики (1) в координатах (r, θ) оператор L из (2) на D имеет вид (см., например, [9])

$$L = b(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[(n-1)\,\frac{q'(r)b(r)}{q(r)} + b'(r)\right]\frac{\partial}{\partial r} + \frac{b(r)}{q^2(r)}\Delta_\theta - c(r), \tag{6}$$

где Δ_θ — внутренний лапласиан на S.

Обозначим $\{\omega_k\}$ — ортонормированный базис в $L_2(S)$ из собственных функций оператора $-\Delta_\theta$, а λ_k — соответствующие собственные числа. Пусть $u \in UL_l$. Тогда для любого r имеем:

$$u(r,\theta) \stackrel{L_2(S)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta),$$

где

$$\upsilon_k(r) = \int_S u(r,\theta)\omega_k(\theta)d\theta,$$

$$\Delta_\theta\omega_k(\theta) + \lambda_k\omega_k(\theta) = 0.$$

Из вида оператора L (6) следует, что для любого индекса k функция $\upsilon_k(r)$ является решением спектрального уравнения (5).

Из пункта 3 леммы 1 следует, что если $\lambda_l > \lambda_{l-1}$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\upsilon_l^0(r)}{\upsilon_{l-1}^0(r)} = \infty$. Тогда из условия $u = \overline{o}(\upsilon_l^0)$ вытекает, что множество номеров k таких, что $\upsilon_k(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, ограничено, и, более того, $k < l$. Отсюда, для любого $r > r_0$ в D

$$u(r,\theta) = \upsilon_0(r) + \sum_{k=1}^{l-1} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta) + \sum_{k=l}^{\infty} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta), \tag{7}$$

где при $k \geq l$ выполнено $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_k(r) = 0$ (см. п. 2 леммы 1). Отметим, что ряд

$$\sum_{k=l}^{\infty} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta)$$

сходится равномерно и

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta) = 0.$$

Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения из [3].

Построим базисные функции $\{\varphi^i\}_{i=0}^{l-1}$ пространства UL_l на всем M. В [1] показано, что для любого $i < l$ существует решение уравнения (2) φ^i на всем многообразии M такое, что $\sup\limits_D |\varphi^i - \upsilon_i^0(r)\omega_i(\theta)| \leq C$ для некоторой константы C.

Кроме того, в п. 4 леммы 1 показано, что в условиях теоремы для любого решения $\upsilon_k(r)$ существует константа a_k такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \big(\upsilon_k(r) - a_k\upsilon_k^0(r)\big) = 0.$$

Таким образом, для любой функции $u \in UL_l$ существует набор чисел $\{a_k\}$ таких, что $u - \sum\limits_{k=0}^{l-1} a_k\varphi^k$ является ограниченным решением уравнения (2) на всем многообразии M. С другой стороны, в [8] показано, что из $J = \infty$ и ограниченности функции $c(r)q^2(r)$ следует, что всякое ограниченное решение уравнения (2) на M тождественно равно нулю. Таким образом, построенная система функций действительно образует базис в пространстве UL_l. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В третьем пункте леммы 1 показано, что если $\lambda_{l+i} \geq \geq 2^{\frac{\lambda_l H + d}{m}}$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\upsilon^0_{l+i}(r)}{\upsilon^0_l(r)} = \infty.$$

Тогда из условия $u = \overline{o}(\upsilon^0_l)$ получаем, что для любого $r > r_0$ в D

$$u(r,\theta) = \upsilon_0(r) + \sum_{k=1}^{N-1} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta) + \sum_{k=N}^{\infty} \upsilon_k(r)\omega_k(\theta),$$

где при $k \geq N$ выполнено $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_i(r) = 0$. Здесь $N = nev(2^{\frac{\lambda_l H+d}{m}})$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 1.

2. Приложение

Замечание 3. Из условия (4) следует, что интеграл K сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)},$$

а интеграл J сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} c(\xi)q^{n-1}(\xi)d\xi.$$

Доказательство леммы 1. Отметим вначале, что (5) эквивалентно

$$\left(\upsilon_k'(r)q^{n-1}(r)b(r)\right)' = \left(\lambda_k b(r)q^{n-3}(r) + c(r)q^{n-1}(r)\right)\upsilon_k(r).$$

Проинтегрируем данное соотношение от r_0 до r. В результате получаем

$$\upsilon_k'(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)b(r)} \int\limits_{r_0}^{r} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_k(\xi)d\xi + \frac{\upsilon_k'(r_0)q^{n-1}(r_0)b(r_0)}{q^{n-1}(r)b(r)}. \tag{8}$$

Аналогично, интегрируя равенство (8) от r_0 до r, получаем интегральный вид спектрального уравнения

$$\upsilon_k(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_k(\xi)d\xi +$$

$$+ \upsilon_k'(r_0)q^{n-1}(r_0)b(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} + \upsilon_k(r_0). \tag{9}$$

Для начала докажем первый пункт леммы. Если при каком-либо $r_1 > r_0$ выполнено $\upsilon_k'(r_1)\upsilon_k(r_1) \geq 0$, причем $\upsilon_k'(r_1)$ и $\upsilon_k(r_1)$ не равны нулю одновременно, то из (9) и расходимости интеграла J следует, что $|\upsilon_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$. Действительно, пусть, например, $\upsilon_k'(r_1) \geq 0$ и $\upsilon_k(r_1) \geq 0$ и одно из этих чисел положительно. Тогда в некотором интервале (r_1, r_2) (где $r_2 > r_1$) $\upsilon_k(r)$ положительна. Возьмем максимальный интервал (r_1, r_2), в котором $\upsilon_k(r) > 0$. Из (8) видно, что на этом интервале υ_k строго возрастает, поэтому, если $r_2 < \infty$, то $\upsilon_k(r_2) > 0$, что противоречит максимальности интервала (r_1, r_2). Значит, необходимо $r_2 = \infty$, то есть функция $\upsilon_k(r)$ положительна и возрастает на (r_1, ∞). Тогда из (9) и расходимости интеграла J (см. замечание выше) следует, что $|\upsilon_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$. Точно так же рассматривается случай $\upsilon_k'(r_1) \leq 0$, $\upsilon_k(r_1) \leq 0$.

Если для какого-то $r_1 \in (r_0, \infty)$ $\upsilon_k'(r_1) = \upsilon_k(r_1) = 0$, то по теореме единственности имеем $\upsilon_k(r) \equiv 0$.

Рассмотрим случай $\upsilon_k'(r)\upsilon_k(r) < 0$. Не умаляя общности, будем считать, что при всех $r \in (r_0, \infty)$

$$\upsilon_k(r) < 0, \upsilon_k'(r) > 0.$$

Тогда $\upsilon_k(r)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_k(r) \leq 0$. Заметим, что при этом $|\upsilon_k(r)|$ монотонно убывает и, следовательно, функция $\upsilon_k(r)$ ограничена на (r_0, ∞). Первый пункт доказан.

Покажем, что в условиях пунктов (a) и (b) второго пункта леммы выполнено

$$\lim_{r\to\infty} \upsilon_k(r) = 0$$

для всех $k \geq 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_0(r) = s$ в условиях пункта (c).

Предположим, что $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_k(r) < 0$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $r > r_0$ имеем

$$\upsilon_k(r) \leq -\varepsilon. \tag{10}$$

Рассмотрим два случая. Пусть сначала

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} < \infty.$$

Тогда из (9) следует, что

$$\upsilon_k(r) \leq -\varepsilon \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)d\xi +$$

$$+ \upsilon_k'(r_0)q^{n-1}(r_0)b(r_0) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} + \upsilon_k(r_0),$$

где правая часть при $r \to \infty$ стремится к $-\infty$ в силу расходимости интеграла J. Последнее противоречит ограниченности $\upsilon_k(r)$.

Пусть теперь

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} = \infty. \tag{11}$$

Перепишем (9) в виде

$$\upsilon_k(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{F(t)dt}{q^{n-1}(t)b(t)} + \upsilon_k(r_0), \tag{12}$$

где

$$F(t) = \int\limits_{r_0}^{t} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_k(\xi)d\xi + \upsilon_k'(r_0)q^{n-1}(r_0)b(r_0) -$$

монотонно убывает в силу отрицательности $\upsilon_k(r)$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

Допустим, что $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) > 0$. Тогда, учитывая представление (12), получаем

$$\lim_{r\to\infty} \upsilon_k(r) = +\infty,$$

что противоречит отрицательности функции $\upsilon_k(r)$ на (r_0, ∞). Если $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = F < 0$, то найдется точка $r_1 > r_0$ такая, что для всех $t \geq r_1$ выполнено $F(t) \leq \frac{F}{2}$. Тогда из (12) имеем

$$\upsilon_k(r) = \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{F(t)dt}{q^{n-1}(t)b(t)} + \frac{F}{2}\int\limits_{r_1}^{r} \frac{F(t)dt}{q^{n-1}(t)b(t)} + \upsilon_k(r_0).$$

В силу (11) получаем, что $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_k(r) = -\infty$. Это противоречит ограниченности функции $\upsilon_k(r)$ на (r_0, ∞). Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$ и, следовательно,

$$\upsilon_k'(r_0)q^{n-1}(r_0)b(r_0) = -\int\limits_{r_0}^{\infty} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_k(\xi)d\xi.$$

Подставляя последнее равенство в (12), получаем

$$\upsilon_k(r) = -\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} \int\limits_{t}^{\infty} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_k(\xi)d\xi + \upsilon_k(r_0). \tag{13}$$

Пусть сначала $k > 0$ и $K = \infty$. Как показано в [3], из условия расходимости интеграла K следует, что

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} \int\limits_{t}^{\infty} q^{n-3}(\xi)d\xi = \infty.$$

Тогда, значит, из условия (4) следует, что

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{t}^{\infty} q^{n-3}(\xi)d\xi = \infty. \tag{14}$$

Тогда
$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{t}^{\infty} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)d\xi = \infty.$$

Из (10) и (13) получаем, что $\upsilon_k(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ для всех $k > 0$, что противоречит отрицательности $\upsilon_k(r)$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to+\infty} \upsilon_k(r) = 0$.

Пусть теперь $k = 0$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t)g^{n-1}(t)dt = \infty$. Из (10) и (13) следует, что

$$\upsilon_0(r) = -\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{t}^{\infty} c(\xi)q^{n-1}(\xi)\upsilon_0(\xi)d\xi + \upsilon_0(r_0) \geq$$

$$\geq \varepsilon \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{t}^{\infty} c(\xi)q^{n-1}(\xi)d\xi + \upsilon_0(r_0).$$

Значит, $\upsilon_0(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ в силу расходимости интеграла (14), что противоречит отрицательности функции $\upsilon_0(r)$ на (r_0, ∞). Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_0(r) = 0$.

Далее пусть $k = 0$ и $\int\limits_{r_0}^{\infty} c(t)q^{n-1}(t)dt < \infty$. Так как $\upsilon_0(r) < 0$ и монотонно возрастает, то существует конечный предел $\lim\limits_{r\to\infty} \upsilon_0(r) = s \leq 0$. Второй пункт доказан.

Далее докажем, что для любого решения уравнения (5) $\upsilon_k^0(r)$ существует $j > 0$ такое, что
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\upsilon_{k+j}^0(r)}{\upsilon_k^0(r)} = \infty.$$

В первую очередь покажем существование такого j, что начиная с некоторого r_1 выполнено $\upsilon_{k+j}^0(r) > 2\upsilon_k^0(r)$. Предположим противное, то есть для любого j и для любого $r > r_0$ выполнено
$$\upsilon_{k+j}^0 \leq 2\upsilon_k^0.$$

Из последнего неравенства и интегрального вида спектрального уравнения (9) следует, что

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \left[\lambda_{k+j} b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right] q^{n-3}(\xi)\upsilon_{k+j}^0(\xi)d\xi + 1 \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \left[\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right] q^{n-3}(\xi)\upsilon_k^0(\xi)d\xi + 2.$$

Из условий (3) и (4) следует, что

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} \int\limits_{r_0}^{t} \left(\lambda_{k+j} b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi)\upsilon_{k+j}^0(\xi)d\xi + 1 \geq$$

$$\geq \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \lambda_{k+j} m q^{n-3}(\xi) \upsilon_{k+j}^0(\xi) d\xi + 1$$

и

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{q^{n-1}(t)b(t)} \int_{r_0}^{t} \left(\lambda_k b(\xi) + c(\xi) q^2(\xi)\right) q^{n-3}(\xi) \upsilon_k^0(\xi) d\xi + 1 \leq$$

$$\leq \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \left(\lambda_k H + d\right) q^{n-3}(\xi) \upsilon_k^0(\xi) d\xi + 1.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \lambda_{k+j} m q^{n-3}(\xi) \upsilon_{k+j}^0(\xi) d\xi -$$

$$-2 \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \left(\lambda_k H + d\right) q^{n-3}(\xi) \upsilon_k^0(\xi) d\xi \leq 1.$$

Выберем j так, чтобы выполнялось условие $\lambda_{k+j} m \geq 2\left(\lambda_k H + d\right)$. Это возможно, так как $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\lambda_{k+j} m \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \left(\upsilon_{k+j}^0(\xi) - \upsilon_k^0(\xi)\right) q^{n-3}(\xi) d\xi \leq 1. \tag{15}$$

Возьмем некоторое $r^* > r_0$. Имеем $\upsilon_{k+j}^0(r^*) - \upsilon_k^0(r^*) = c_1 > 0$, и для $r > r^*$ выполнено $\upsilon_{k+j}^0(r) - \upsilon_k^0(r) \geq c_1$. Из замечания в начале пункта следует расходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} q^{n-3}(\xi) d\xi.$$

Тогда, начиная с некоторого r_1, неравенство (15) не выполняется, то есть $\upsilon_{k+j}^0(r) > 2\upsilon_k^0(r)$ для $r > r_1$. Дальнейшее доказательство основано на методе математической индукции. Пусть $\upsilon_{k+j}^0(r) > 2^z \upsilon_k^0(r)$ при $r > r_z$. Докажем, что $\upsilon_{k+j}^0(r) > 2^{z+1} \upsilon_k^0(r)$, начиная с некоторого r_{z+1}. Предположим противное, то есть для всех r выполнено

$$\upsilon_{k+j}^0(r) \leq 2^{z+1} \upsilon_k^0(r).$$

Как и выше, выберем j так, что

$$\lambda_{k+j} m \geq 2\left(\lambda_k H + d\right).$$

Точно так же, как и выше,

$$\lambda_{k+j} m \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} \left(\upsilon_{k+j}^0(\xi) - 2^z \upsilon_k^0(\xi)\right) q^{n-3}(\xi) d\xi \leq 2^{z+1} - 1 \tag{16}$$

и существует $r^* > r_z$, для которого $\upsilon^0_{k+j}(r^*) - 2^z\upsilon^0_k(r^*) = c_2 > 0$. В силу (15) получаем, что, начиная с некоторого r_1, неравенство (16) не выполняется. Следовательно, $\upsilon^0_{k+j}(r) > 2^z\upsilon^0_k(r)$ для любого $z \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \nu > 0$ и $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu \geq 0$. Тогда для любого $i > 0$ такого, что $\lambda_{k+i} > \lambda_k$, выполнено

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\upsilon^0_{k+i}(r)}{\upsilon^0_k(r)} = \infty.$$

Предположим противное. Пусть для любого $r > r_0$ выполнено $\upsilon^0_{k+i} \leq a\upsilon^0_k$, где

$$a = 1 + \frac{\nu(\lambda_{k+i} - \lambda_k)}{\nu(2\lambda_k\lambda_{k+i} + 2\lambda_k + \lambda_{k+i}) + \mu(\lambda_{k+i} + \lambda_k + 3)} > 1.$$

Тогда из (7) следует

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\left[\lambda_{k+i}b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right]q^{n-3}(\xi)\upsilon^0_{k+i}(\xi)d\xi -$$

$$- a\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\left[\lambda_k b(\xi) + c(\xi)q^2(\xi)\right]q^{n-3}(\xi)\upsilon^0_k(\xi)d\xi \leq a - 1.$$

Так как $\lim\limits_{r\to\infty} b(r) = \nu$ и $\lim\limits_{r\to\infty} c(r)g^2(r) = \mu$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r_1 > r_0$, начиная с которого выполнено $-\varepsilon < b(r) - \nu < \varepsilon$ и $-\varepsilon < c(r)g^2(r) - \mu < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \frac{(\lambda_{k+i}-\lambda_k)\nu}{\lambda_k+\lambda_{k+i}+3}$. Тогда с некоторого r_1 выполнено неравенство

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\left[\lambda_{k+i}\left(\nu - \frac{(\lambda_{k+i} - \lambda_k)\nu}{\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3}\right) + \mu - \frac{(\lambda_{k+i} - \lambda_k)\nu}{\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3}\right]q^{n-3}(\xi)\upsilon^0_{k+i}(\xi)d\xi -$$

$$- a\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dt}{b(t)q^{n-1}(t)}\int\limits_{r_0}^{t}\left[\lambda_k\left(\nu + \frac{(\lambda_{k+i} - \lambda_k)\nu}{\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3}\right) + \mu + \frac{(\lambda_{k+i} - \lambda_k)\nu}{\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3}\right]q^{n-3}(\xi)\upsilon^0_{k+i}(\xi)d\xi \leq$$

$$\leq a - 1.$$

Подставляя в это неравенство значение a, получаем

$$\frac{\nu(2\lambda_k\lambda_{k+i} + 2\lambda_{k+i} + \lambda_k) + \mu(\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3)}{\lambda_k + \lambda_{k+i} + 3}\times$$

$$\times\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dt}{b(t)g^{n-1}(t)}\int\limits_{r_1}^{t}g^{n-3}(\xi)\left(\upsilon^0_{k+i}(\xi) - \upsilon^0_k(\xi)\right)\right)d\xi \leq a - 1.$$

Так как $J = \infty$, то с некоторого r_1 последнее неравенство не выполняется. Следовательно, $\upsilon^0_{k+i}(r) > a\upsilon^0_k$. И, как и выше, получаем, что $\upsilon^0_{k+i}(r) > a^z\upsilon^0_k(r)$ для любого $z \in \mathbb{N}$ и любого i такого, что $\lambda_{k+i} > \lambda_k$. Третий пункт доказан.

Доказательство последнего пункта леммы дословно повторяет доказательство предложения 2 в [6]. Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корольков, С. А. Решение эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2011. — № 1 (14). — С. 23–40.
2. Лосев, А. Г. Гармонические функции предписанного роста на квазимодельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Укр. мат. вестн. — 2004. — Т. 1. — № 2. — С. 230–243.
3. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.
4. Лосев, А. Г. О неограниченных решениях стационарного уравнения Шредингера на модельных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа, В. Ю. Чебаненко // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 7 (530). — С. 46–56.
5. Лосев, А. Г. Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 6 (445). — С. 41–49.
6. Лосев, А. Г. Решения стационарного уравнения Шредингера предписанного роста на модельных многообразиях / А. Г. Лосев, В. Ю. Чебаненко // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2003–2004. — Вып. 8. — С. 62–72.
7. Лосев, А. Г. Теоремы типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях / А. Г. Лосев // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1998. — Вып. 3. — С. 18–31.
8. Лосев, А. Г. Уравнение Шредингера на искривленных римановых произведениях / А. Г. Лосев // Труды по анализу и геометрии. — Новосибирск : Изд-во ИМ СО РАН, 2000. — С. 350–369.
9. Позняк, Э. Г. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство / Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин. — М. : Изд-во МГУ, 1990. — 384 с.
10. Grigor'yan, A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 36. — P. 135–249.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR UNBOUNDED SOLUTIONS OF THE ELLIPTIC EQUATION ON THE MODEL RIEMANNIAN MANIFOLDS

R.F. Kurmakaev, A.G. Losev

In this paper we consider solutions of the some elliptic equations on the non-compact Riemannian manifolds which is the generalized spherically symmetric manifolds. By the spectral properties of such manifolds the exact estimations of the dimension of the space of unbounded solutions of the elliptic equations were obtained.

Key words: *Liouville type theorem, model Riemannian manifolds, unbounded L-harmonic functions, potential theory, spectral properties.*