УДК 517.95
ББК 22.162

О ВАРИАЦИОННОМ РАВЕНСТВЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ОБЩЕГО ВИДА [1]

А.А. Клячин

В работе определяется одна характеристика, служащая мерой отличия двух векторов, связанная с выпуклой функцией, в терминах которой установлено вариационное равенство для экстремалей функционала общего вида. Рассматриваются полученные результаты для уравнения минимальной поверхности в финслеровом пространстве и дается их геометрическая интерпретация. Следствием результатов является сходимость «в среднем» последовательности, минимизирующей данный функционал.

Ключевые слова: *вариационные задачи, минимизация выпуклого функционала, уравнение минимальной поверхности, смешанная краевая задача, финслерова метрика.*

1. Вариационное равенство

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $G(x,z,\xi)$ — функция, определенная для любой точки $x\in\Omega$, любой точки $z=(z^1,...,z^m)\in\mathbf{R}^m$ и любого набора векторов $\xi=(\xi^1,...,\xi^m)$ из $\mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что $G(x,z,\xi)\in C(\overline{\Omega}\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m)$, а по совокупности переменных $z^1,...,z^m$, ξ^1, ..., ξ^m является выпуклой вниз. В случае, когда функция G не зависит от z, будем использовать обозначение $G(x,\xi)$.

Если $\vec{u}=(u^1,...,u^m)\in\mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$, то вектор-функция $\vec{u}$ дифференцируема почти всюду в Ω и мы полагаем $D\vec{u}=(\nabla u^1,...,\nabla u^m)$.

Определим функционал

$$I(\vec{u})=\int\limits_{\Omega}G(x,\vec{u}(x),D\vec{u}(x))dx \qquad (1)$$

для любой вектор-функции $\vec{u}=(u^1,...,u^m)\in\mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$, при условии, что интеграл в (1) сходится.

В случае, когда функция $G(x,z,\xi)$ достаточно гладкая, мы можем записать систему уравнений Эйлера — Лагранжа (см., например, [1, гл. 6, ч. I]) для данного функционала

$$Q^i[\vec{u}]\equiv\sum_{h=1}^{n}\frac{d}{dx_h}\left(G_{\xi_h^i}(x,\vec{u},D\vec{u})\right)-G_{z^i}(x,\vec{u},D\vec{u})=0,\quad i=1,...,m. \qquad (2)$$

Здесь $\xi^1=(\xi_1^1,\,...,\xi_n^1)$, ..., $\xi^m=(\xi_1^m,...,\xi_n^m)$.

Одним из способов приближенного решения краевых задач эллиптических уравнений и систем уравнений дивергентного вида является вариационный метод (см., например, [5; 8]). При этом мало изученным, особенно для нелинейных уравнений, является вопрос о сходимости построенных этим методом приближенных решений к точному решению. Классическим примером является уравнение минимальных поверхностей, для которого определенные результаты получены в работах [2; 3]. В настоящей работе мы обобщаем результаты работы [2] на случай функционалов общего вида.

Ниже нами определяется величина $\delta_G(z,\xi,w,\eta)$ через функцию G, служащая мерой отличия элемента (z,ξ) от элемента (w,η). В терминах этой величины мы получаем равенство, связывающее, с одной стороны, разность значений функционала (1) для произвольных функций $\vec{u},\vec{v}$, среди которых $\vec{u}$ является экстремалью данного функционала, а с другой стороны, величину $\delta_G(\vec{u},D\vec{u},\vec{v},D\vec{v})$. Из полученного равенства непосредственно будет следовать сходимость минимизирующей последовательности к решению системы (2) в терминах величины $\delta_G(z,\xi,w,\eta)$. Некоторые частные случаи для уравнения минимальной поверхности и уравнения p-Лапласа были рассмотрены в работе [2].

Пример 1. В случае, если $m=n$ и

$$G(x,z^1,...,z^m,\xi^1,...,\xi^n)=\sum_{i,j,h,k}a_{ij}^{hk}(x)\xi_i^h\xi_j^k+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}F^i(x)z^i,$$

где коэффициенты удовлетворяют условию симметрии $a_{ij}^{hk}=a_{ji}^{kh}=a_{hj}^{ik}$ и неравенству

$$\kappa_1\sum_{i,h}\eta_i^h\eta_i^h\le\sum_{i,j,h,k}a_{ij}^{hk}(x)\eta_i^h\eta_j^k\le\kappa_2\sum_{i,h}\eta_i^h\eta_i^h,\ \ \eta_i^h=\eta_h^i,$$

система (2) будет стационарной системой линейной теории упругости. Данная система будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{j,h,k}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{ij}^{hk}(x)\frac{\partial u^j}{\partial x_k}\right)=F^i(x),\ \ i=1,...,n. \tag{3}$$

Отметим, что для системы (3) доказательство разрешимости различных краевых задач в обобщенном смысле приводится, например, в монографиях [6] и [9], а в работе [9] устанавливается регулярность полученных решений.

Пример 2. Если

$$G(x,z^1,...,z^m,\xi_1^1,...,\xi_n^m)=\sum_{i,h}(\xi_i^h)^2,$$

то система (2) имеет вид

$$\Delta u^1=0,...,\Delta u^m=0$$

и описывает гармонические отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$.

Пример 3. В случае, когда $m = 1$ и

$$G(x, z, \xi) = G(x, z, \xi_1, ..., \xi_n),$$

имеем одно уравнение

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{d}{dx_h} \left(G_{\xi_h}(x, u, \nabla u)\right) = G_z(x, u, \nabla u).$$

В частности, если $G(x, z, \xi) = |\xi|^2$, получим уравнение Лапласа. Если $G(x, z, \xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, то имеем уравнение минимальных поверхностей. В случае, когда $G(x, z, \xi) = \sqrt{1 - |\xi|^2}$, приходим к уравнению максимальных поверхностей, которое описывает пространственно подобные поверхности нулевой средней кривизны в пространстве-времени Минковского.

Дадим определение обобщенного решения смешанной краевой задачи для системы (2).

Определение 1. *Пусть Γ — кусочно-гладкий кусок границы $\partial\Omega$ и заданы вектор-функции $\vec{\psi} = (\psi^1, ..., \psi^m) \in L_2(\Gamma)$ и $\vec{\varphi} = (\varphi^1, ..., \varphi^m) \in C(\partial\Omega \setminus \Gamma)$. Вектор-функция $\vec{u} = (u^1, ..., u^m) \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ называется обобщенным решением смешанной задачи системы (2), если*

1) $\vec{u} \in C(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma))$ и $\vec{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \vec{\varphi}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}$;

2) для любой вектор-функции $\vec{v} = (v^1, ..., v^m) \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma)) \cap L_2(\Gamma)$, такой, что $\vec{v} = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$, выполнено

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{h=1}^{n} G_{\xi_h^i}(x, \vec{u}(x), D\vec{u}(x)) v^i_{x_h}\, dx - \int\limits_{\Gamma} v^i \psi^i\, ds + \int\limits_{\Omega} G_{z^i}(x, \vec{u}(x), D\vec{u}(x)) v^i(x) dx = 0$$

для всех $i = 1, ..., m$.

Замечание. Если граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой, функция $G(x, z, \xi)$ дважды непрерывно-дифференцируемой и функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет приведенному определению, то не сложно показать, что u будет классическим решением системы уравнений (2), удовлетворяющим краевым условиям

$$\vec{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \vec{\varphi}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}\,,$$

$$\sum_{h=1}^{n} G_{\xi_h^i}(x, \vec{u}, D\vec{u}) \nu_h|_{\Gamma} = \psi^i|_{\Gamma}\,, \quad i = 1, ..., m,$$

где $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Отметим, что при $\Gamma = \emptyset$ краевая задача является задачей Дирихле, а при $\Gamma = \partial\Omega$ имеем задачу Неймана.

Для произвольных $(z, \xi), (w, \eta) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{mn}$ введем следующую величину

$$\delta_G(z, \xi, w, \eta) = G(x, w, \eta) - G(x, z, \xi) - \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} G_{\xi_h^i}(x, z, \xi)(\eta_h^i - \xi_h^i) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} G_{z^i}(x,z,\xi)(w^i - z^i).$$

Отметим, что в силу выпуклости функции $G(x,z,\xi)$ по переменным (z,ξ), введенная величина неотрицательна при всех (w,η) и всех (z,ξ), в которых функция $G(x,z,\xi)$ дифференцируема по ξ и z. Более того, если функция G строго выпукла по совокупности переменных z и ξ, то

$$\delta_G(z,\xi,w,\eta) > 0, \quad \text{если } \xi \neq \eta \text{ или } z \neq w.$$

Пример 4. Пусть $m = 1$. Положим

$$G(x,z,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j,$$

где $||a_{ij}(x)||$ — положительно определенная матрица. Тогда

$$\delta_G(z,\xi,w,\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j).$$

В частности, если $G(x,z,\xi) = |\xi|^2$, то $\delta_G(z,\xi,w,\eta) = |\xi - \eta|^2$.

Пусть $\Gamma \subset \Omega$ — кусочно-гладкий кусок границы области Ω.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $\vec{u} \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma))$ является обобщенным решением смешанной краевой задачи системы уравнений (2) с вектор-функцией $\vec{\psi} \in \in L_2(\Gamma)$ и пусть задана произвольная вектор-функция $\vec{v} \in \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \Gamma)) \cap L_2(\Gamma)$ такая, что*

$$\vec{u}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \vec{v}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \delta_G(\vec{u}, D\vec{u}, \vec{v}, D\vec{v})dx = I(\vec{v}) - I(\vec{u}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \psi^i(v^i - u^i)\, ds.$$

Доказательство. Полагая $z = \vec{u}$, $w = \vec{v}$, $\xi = D\vec{u}$, $\eta = D\vec{v}$ в определении величины $\delta_G(z,w,\xi,\eta)$, интегрируя по области Ω и применяя определение обобщенного решения, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \delta_G(\vec{u}, D\vec{u}, \vec{v}, D\vec{v})dx = \int\limits_{\Omega} G(x,\vec{v},D\vec{v})dx - \int\limits_{\Omega} G(x,\vec{u},D\vec{u})dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} G_{\xi_h^i}(x,\vec{u},D\vec{u})(v^i_{x_h} - u^i_{x_h})dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} G_{z^i}(x,\vec{u},D\vec{u})(v^i - u^i) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} G(x,\vec{v},D\vec{v})dx - \int\limits_{\Omega} G(x,\vec{u},D\vec{u})dx - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \psi^i(v^i - u^i)\, ds = I(\vec{v}) -$$

$$-I(\vec{u}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \psi^i(v^i - u^i)\, ds.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что если ввести функционал

$$I_1(\vec{v}) = I(\vec{v}) - \int\limits_{\Gamma} \sum_{i=1}^{m} \psi^i v^i \, ds,$$

то теорема 1, в частности, утверждает, что на решении $\vec{u}$ функционал I_1 достигает своего минимума. Более того, если найдена последовательность $\{\vec{v}_m\}$, минимизирующая данный функционал, то есть $I_1(\vec{v}_m) \to I_1(\vec{u})$, то

$$\int\limits_{\Omega} \delta_G(\vec{u}, \vec{v_m}, D\vec{u}, D\vec{v_m}) dx \to 0.$$

Данный факт можно интерпретировать как сходимость $(v_m, D\vec{v}_m)$ к $(u, D\vec{u})$ «в среднем». Например, если $m = 1$ и $G(x, z, \xi) = |\xi|^2$, то указанная сходимость будет иметь вид

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla v_m|^2 dx \to 0,$$

то есть $v_m \to u$ по норме пространства $W^{1,2}(\Omega)$. Отметим также, что из полученной сходимости для уравнения минимальной поверхности в работе [3] доказывается и равномерная сходимость при дополнительных условиях на последовательность v_m.

В качестве следствия из доказанной теоремы получаем теорему единственности решения смешанной краевой задачи.

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, при этом вектор-функция $\vec{v}$ также является обобщенным решением смешанной краевой задачи системы (2). Тогда почти всюду*

$$\delta_G(\vec{u}, \vec{v}, D\vec{u}, D\vec{v}) + \delta_G(\vec{v}, \vec{u}, D\vec{v}, D\vec{u}) = 0.$$

В частности, если функция $G(x, z, \xi)$ является строго выпуклой по переменной z или по переменной ξ, то $\vec{u} = \vec{v} + \mathrm{const}$. Причем, если $\Gamma \neq \partial\Omega$, то $\mathrm{const} = 0$.

Доказательство. Для каждого из решений можем записать равенства

$$\int\limits_{\Omega} \delta_G(\vec{u}, \vec{v}, D\vec{u}, D\vec{v}) dx = I_1(\vec{v}) - I_1(\vec{u}), \quad \int\limits_{\Omega} \delta_G(\vec{v}, \vec{u}, D\vec{v}, D\vec{u}) dx = I_1(\vec{u}) - I_1(\vec{v}).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\int\limits_{\Omega} (\delta_G(\vec{u}, \vec{v}, D\vec{u}, D\vec{v}) + \delta_G(\vec{v}, \vec{u}, D\vec{v}, D\vec{u})) dx = 0.$$

Тогда подынтегральное выражение почти всюду равно нулю. Если функция G строго выпукла по переменной z, то почти всюду $\vec{u} = \vec{v}$. Если же функция G строго выпукла по переменной ξ, то почти всюду $D\vec{u} = D\vec{v}$. Так как функции $\vec{u}$ и $\vec{v}$ локально липшицевы, то получаем, что $\vec{u} - \vec{v} \equiv \mathrm{const}$.

Замечание. Пусть $m = n$ и $G(x, z, w, \xi, \eta) = G(x, \xi, \eta)$. Если предположить, что выполнено неравенство

$$\delta_G(\xi, \eta) \geq \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_j^i - \eta_j^i)^2$$

для некоторого $\lambda_0 > 0$ и всех ξ, η таких, что $\xi_j^i = \xi_i^j$, $\eta_j^i = \eta_i^j$, то функция $G(\xi, \eta)$ может быть не строго выпуклой по переменной ξ. В этом случае для формулировки и доказательства теоремы единственности нужно воспользоваться известными неравенствами Корна (см., например, [6]).

Замечание. В монографии [4] даются оценки величины $\delta_G(\xi, \eta) + \delta_G(\eta, \xi)$ для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} u_{x_i} \right) = 0,$$

то есть для $m = 1$ и $G(x, z, \xi) = |\xi|^p$. С помощью этих оценок устанавливаются теоремы единственности и принцип максимума для разности решений данного уравнения.

Далее рассмотрим ряд примеров и выясним геометрический смысл теоремы 1 для уравнения минимальной поверхности в финслеровой метрике.

2. Финслерова метрика

Дадим необходимые определения и вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся для формулировки и доказательства основных результатов.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что для всех точек $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbf{R}^n$ определена непрерывная функция $\Phi(x, \xi)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\Phi(x, \xi) \geq 0$;
2) $\Phi(x, \lambda\xi) = \lambda\Phi(x, \xi)$ для всех $\lambda > 0$;
3) множество

$$\Xi(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^n : \Phi(x, \xi) < 1\}$$

является выпуклым и ограниченным для каждой точки $x \in \Omega$.

Определим двойственную функцию

$$H(x, \eta) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\Phi(x, \xi)}. \tag{4}$$

Справедливо следующее равенство (см. [7, §15])

$$\Phi(x, \xi) = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{H(x, \eta)}. \tag{5}$$

Отметим также, что функция $H(x, \eta)$ будет удовлетворять тем же свойствам 1)–3), что и функция $\Phi(x, \xi)$.

Далее будем предполагать, что функции $\Phi^2(x, \xi)$ и $H^2(x, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\Omega \times \mathbf{R}^n$. Положим

$$A = A(x, \xi) = \nabla_\xi \Phi(x, \xi), \quad \xi \neq 0,$$

$$B = B(x, \eta) = \nabla_\eta H(x, \eta), \quad \eta \neq 0.$$

Отметим, что по теореме Эйлера об однородных функциях выполнены следующие равенства

$$\langle A(x, \xi), \xi \rangle = \Phi(x, \xi), \quad \langle B(x, \eta), \eta \rangle = H(x, \eta) \tag{6}$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$.

Замечание. Далее будем считать, что множество $\Xi(x)$ строго выпукло. Тогда равенства (4) и (5) достигаются на единственных векторах $\xi' = \xi'(\eta)$ и $\eta' = \eta'(\xi)$ таких, что

$$\Phi(x, \xi'(\eta)) = 1, \quad H(x, \eta'(\xi)) = 1.$$

Для векторов $A(x, \xi)$ и $B(x, \eta)$ докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$A(x, \xi) = \eta'(\xi), \qquad B(x, \eta) = \xi'(\eta).$$

Доказательство. Для любого вектора $\theta \in \mathbf{R}^n$ из равенства (2) имеем

$$\Phi(x, \xi + t\theta) - \Phi(x, \xi) \geq \langle \xi + t\theta, \eta'(\xi) \rangle - \langle \xi, \eta'(\xi) \rangle =$$

$$= t \langle \theta, \eta'(\xi) \rangle.$$

Следовательно,

$$\langle A(x, \xi), \theta \rangle \geq \langle \theta, \eta'(\xi) \rangle.$$

В силу произвольности вектора θ получаем первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично.

Лемма 2. *Для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\langle A(x, \xi), \eta \rangle \leq \Phi(x, \eta).$$

Причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $\xi = \lambda\eta$ для некоторого $\lambda > 0$.

Доказательство. Применяя лемму 1, получаем

$$\langle A(x, \xi), \eta \rangle \leq H(x, A(x, \xi)) \Phi(x, \eta) =$$

$$= H\left(x, \eta'(\xi)\right) \Phi(x, \eta) = \Phi(x, \eta).$$

Если в доказываемом неравенстве выполнено равенство, то

$$H(x, \eta'(\xi)) = 1 = \frac{\langle \eta'(\xi), \eta \rangle}{\Phi(x, \eta)}.$$

С другой стороны, из определения $\eta'(\xi)$ имеем

$$\Phi(x, \xi) = \frac{\langle \eta'(\xi), \xi \rangle}{H(x, \eta'(\xi))}$$

или

$$H(x, \eta'(\xi)) = \frac{\langle \eta'(\xi), \xi \rangle}{\Phi(x, \xi)}.$$

В силу замечания 2 получаем

$$\frac{\xi}{\Phi(x, \xi)} = \frac{\eta}{\Phi(x, \eta)}.$$

Лемма доказана.

Для произвольной пары векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ определим следующую величину

$$\delta(\xi, \eta) = \Phi^2(x, \xi) + \Phi^2(x, \eta) - 2\Phi(x, \xi)\langle A(x, \xi), \eta \rangle.$$

Отметим, что $\delta(\xi, \eta) \geq 0$ и $\delta(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$. Действительно, из леммы 2 имеем

$$\delta(\xi, \eta) \geq \Phi^2(x, \xi) + \Phi^2(x, \eta) - 2\Phi(x, \xi)\Phi(x, \eta) =$$

$$= (\Phi(x, \xi) - \Phi(x, \eta))^2 \geq 0.$$

При этом, если выполнено равенство, то, во-первых,

$$\Phi(x, \xi) = \Phi(x, \eta),$$

а во-вторых, $\langle A(x, \xi), \eta \rangle = \Phi(x, \eta)$. Тогда из леммы 2 получаем, что

$$\frac{\xi}{\Phi(x, \xi)} = \frac{\eta}{\Phi(x, \eta)},$$

поэтому $\xi = \eta$.

Пример 5. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, \xi) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \right)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n),$$

где $(g^{ij}(x))$ — симметричная положительно определенная матрица. Тогда

$$H(x, \eta) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\eta_i\eta_j \right)^{1/2}, \quad \eta = (\eta_1, ..., \eta_n),$$

где $g_{ij}(x)$ — коэффициенты обратной матрицы к $(g^{ij}(x))$. В этом случае имеем

$$\delta(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)(\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j).$$

Лемма 3. *Для любого вектора* $\eta \neq 0$ *справедливо равенство*

$$A(x, B(x, \eta)) = \frac{\eta}{H(x, \eta)}.$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $B(x,\eta) = \xi'(\eta)$. При этом

$$\Phi(x, \xi'(\eta)) = 1 \qquad H(x,\eta) = \langle \xi'(\eta), \eta \rangle.$$

В силу леммы 1 и замечания 1 нам достаточно проверить, что

$$\Phi(x, B(x,\eta)) = \langle \frac{\eta}{H(x,\eta)}, B(x,\eta) \rangle,$$

которое следует из предыдущих равенств. Лемма доказана.

3. Вариационное равенство для уравнения минимальной поверхности в финслеровой метрике

Далее введем функционал типа площади и для экстремалей данного функционала получим одно вариационное равенство.

Пусть $a(x)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция, заданная в области Ω. Положим

$$\sigma(f) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \Phi^2(x, \nabla f)}\, a(x)\, dx.$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа, соответствующее этому функционалу, имеет вид (см., например, [1, гл. 6])

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Phi(x,\nabla f) A(x, \nabla f) a(x)}{\sqrt{1 + \Phi^2(x, \nabla f)}} \right) = 0. \tag{7}$$

В случае, когда $\Phi(x,\xi) = |\xi|, \quad a(x) \equiv 1$, функционал $\sigma(f)$ определяет площадь поверхности графика функции f в $\mathbf{R}^{n+1}$, а уравнение (7) является уравнением минимальных поверхностей.

Для произвольной функции $f \in C^1(\Omega)$ положим

$$\nu_f = \frac{(\nabla f, -1)}{\sqrt{1 + \Phi^2(x, \nabla f)}}.$$

Тогда для любых векторов $\chi' = (\xi', t')$, $\chi'' = (\xi'', t'') \in \mathbf{R}^{n+1}$ определим следующую величину

$$\Delta(\chi', \chi'') = \delta(\xi', \xi'') + (t' - t'')^2.$$

Из леммы 2 следует, что $\Delta(\chi', \chi'') \geq 0$ и $\Delta(\chi', \chi'') = 0$ в том и только в том случае, когда $\chi' = \chi''$.

Теорема 2. *Пусть ограниченная область Ω содержит гладкий кусок Γ, $f \in C^2(\Omega) \cap \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение уравнения (7) и функция $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma) \cap C(\overline{\Omega})$ такова, что $f = g$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и*

$$\frac{\Phi(x,\nabla f) \langle A(x,\nabla f), \vec{n} \rangle}{\sqrt{1 + \Phi^2(x,\nabla f)}} = \frac{\Phi(x,\nabla g) \langle A(x,\nabla g), \vec{n} \rangle}{\sqrt{1 + \Phi^2(x,\nabla g)}} = 0$$

на Γ. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Delta(\nu_f, \nu_g) \sqrt{1 + \Phi^2(x, \nabla g)}\, a(x)\, dx = 2(\sigma(g) - \sigma(f)). \tag{8}$$

Доказательство. Данное равенство непосредственно следует из теоремы 1. Для этого достаточно заметить, что

$$\Delta(\nu_f,\nu_g)\sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla g)} = 2\sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla g)}-$$

$$-2\frac{\Phi(x,\nabla f)\langle A(x,\nabla f),\nabla g\rangle+1}{\sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla f)}} =$$

$$= 2\left(\sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla g)} - \sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla f)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Phi(x,\nabla f)\langle A(x,\nabla f),\nabla g-\nabla f\rangle}{\sqrt{1+\Phi^2(x,\nabla f)}}\right) = 2\delta_G(\nabla f,\nabla g).$$

Здесь величина δ_G вычисляется для функции

$$G(x,\xi) = \sqrt{1+\Phi^2(x,\xi)}.$$

Для завершения доказательства нужно это равенство домножить на $a(x)$, проинтегрировать по области Ω и воспользоваться теоремой 1. Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим случай, когда $\Phi(x,\xi) = |\xi|$, $a(x) \equiv 1$. Тогда уравнение (7) есть уравнение минимальной поверхности. Не сложно увидеть, что величина $\Delta(\nu_f,\nu_g)$ представляет собой квадрат разности $\nu_f-\nu_g$. В этом случае полученное в теореме 2 равенство можно переписать следующим образом

$$\int\limits_\Omega \sin^2\frac{\alpha}{2}\ \ \sqrt{1+|\nabla g|^2}dx = \frac{1}{2}(\sigma(g)-\sigma(f)),$$

где α — угол между нормалями ν_f и ν_g в точках $(x,f(x))$ и $(x,g(x))$ соответственно.

4. Вариационное равенство для уравнения p-Лапласа

Для произвольной функции $u\in C^1(\Omega)\cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ и $p>1$ положим

$$I_p(u) = \int\limits_\Omega \Phi^p(x,\nabla u)\,dx + \int\limits_\Omega F(x)u(x)dx,$$

где $F(x)$ — некоторая ограниченная измеримая функция, определенная в области Ω. Далее будем рассматривать уравнение

$$\operatorname{div}\left(\Phi^{p-1}(x,\nabla u)A(x,\nabla u)\right) = F(x), \tag{9}$$

являющееся уравнением экстремалей для функционала $I_p(u)$.

Введем величину, характеризующую отклонение вектора $\eta\in\mathbf{R}^n$ от вектора $\xi\in\mathbf{R}^n$, следующим образом

$$\delta_p(\xi,\eta) = (p-1)\Phi^p(x,\xi)+\Phi^p(x,\eta)-p\Phi^{p-1}(x,\xi)\langle A(x,\xi),\eta\rangle.$$

Отметим, что $\delta_2(\xi,\eta)=\delta(\xi,\eta)$.

Лемма 4. *Для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ величина $\delta_p(\xi, \eta) \geq 0$. Причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда $\xi = \eta$.*

Доказательство. Применяя лемму 2 и неравенство Юнга, получаем

$$\delta_p(\xi, \eta) \geq (p-1)\Phi^p(x,\xi) + \Phi(x,\eta) - p\Phi^{p-1}(x,\xi)\Phi(x,\eta) \geq$$

$$\geq (p-1)\Phi^p(x,\xi) + \Phi^p(x,\eta) - (p-1)\Phi^p(x,\xi) - \Phi^p(x,\eta) = 0.$$

В случае, когда выполнено равенство, из леммы 2 получаем, что $\eta = \lambda\xi$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда

$$0 = \delta_p(\xi,\eta) = (p - 1 + \lambda^p - p\lambda)\Phi^p(x,\xi).$$

Так как функция λ^p для $p > 1$ строго выпукла вниз по переменной λ, то равенство

$$p - 1 + \lambda^p - p\lambda = 0$$

возможно только при $\lambda = 1$. Таким образом, $\xi = \eta$.

Теорема 3. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ — решение уравнения (9) и функция $v \in \in C^2(\Omega) \cap C^{0,1}(\overline{\Omega})$ такова, что $u = v$ на $\partial\Omega$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Omega} \delta_p(\nabla u, \nabla v) = I_p(v) - I_p(u). \tag{10}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 1 и равенством

$$\delta_p(\xi,\eta) = (p-1)\Phi^p(x,\xi) + \Phi^p(x,\eta) - p\Phi^{p-1}(x,\xi)\langle A(x,\xi), \eta\rangle =$$

$$= \Phi^p(x,\eta) - \Phi^p(x,\eta) - p\Phi^{p-1}(x,\xi)\langle A(x,\xi), \eta - \xi\rangle = \delta_G(\xi,\eta),$$

получаем нужное. Здесь мы вычисляем величину δ_G для функции $G(x,\xi) = \Phi^p(x,\xi)$.

Теорема доказана.

Отметим, что на основе доказанного равенства можно получить принцип максимума и принцип сравнения для решений уравнения (9).

Теорема 4. *Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — решения уравнения (9). Тогда*

$$u(x) \leq v(x) + \sup_{\partial\Omega}(u - v).$$

Доказательство. Пусть найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что $u(x_0) > v(x_0) + \sup\limits_{\partial\Omega}(u - v)$. Положим $k = \sup\limits_{\partial\Omega}(u - v)$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, что $u(x_0) > v(x_0) + k + \varepsilon$ и обозначим через D_ε компоненту связности множества $\{x \in \Omega : u(x) > v(x) + k + \varepsilon\}$, содержащую точку x_0. Тогда $\overline{D_\varepsilon} \subset \Omega$, функции $u, v + k + \varepsilon$ удовлетворяют уравнению (9) в D_ε и $u = v + k + \varepsilon$ на ∂D_ε. Поэтому из теоремы 3 следуют равенства

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \delta_p(\nabla u, \nabla v)dx = \int\limits_{D_\varepsilon} \Phi^p(x, \nabla u)dx - \int\limits_{D_\varepsilon} \Phi^p(x, \nabla v)dx,$$

$$\int\limits_{D_\varepsilon} \delta_p(\nabla v, \nabla u)dx = \int\limits_{D_\varepsilon} \Phi^p(x, \nabla v)dx - \int\limits_{D_\varepsilon} \Phi^p(x, \nabla u)dx.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\int_{D_\varepsilon} \delta_p(\nabla u, \nabla v)dx + \int_{D_\varepsilon} \delta_p(\nabla v, \nabla u)dx = 0.$$

Пользуясь леммой 4, приходим к равенству $\nabla u = \nabla v$ в D_ε. Следовательно, $u \equiv v+k+\varepsilon$, что противоречит определению множества D_ε. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-97021-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровин, Б. А. Современная геометрия : Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — М. : Наука, 1986. — 760 с.
2. Клячин, А. А. Некоторые свойства решений уравнения минимальных поверхностей в финслеровой метрике / А. А. Клячин // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. XXVI. — М. : Изд-во МГУ, 2005. — С. 201–208.
3. Клячин, А. А. О скорости сходимости последовательности, минимизирующей функционал площади / А. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 136–142.
4. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.
5. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
6. Олейник, О. А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. — М. : Изд-во МГУ, 1990. — 311 с.
7. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М. : Мир, 1973. — 471 с.
8. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 336 с.
9. Фикер, Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикер. — М. : Мир, 1974. — 149 с.

THE VARIATIONAL EQUALITY FOR THE FUNCTIONAL OF THE GENERAL FORM

A.A. Klyachin

We defined a characteristic that serves as a measure of the difference of two vectors associated with a convex function. In terms of this characteristic we establish the variational equality for the extremals of the functional of general form. We consider the results for the minimal surface equation in Finsler space and give them a geometric interpretation. Corollary of results is the convergence “on average” sequence that minimizes this functional.

Key words: *variational problem, minimization of a convex functional, the minimal surface equation, mixed boundary value problem, Finsler metric.*