МАТЕМАТИКА

УДК 517.95
ББК 22.161.6

О ДОПУСТИМОЙ СКОРОСТИ СТРЕМЛЕНИЯ К НУЛЮ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАД ПОЛОСООБРАЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ

Р.С. Акопян

В данной работе объектом исследования являются решения уравнения минимальных поверхностей, заданных над полосообразной областью и удовлетворяющих некоторым нулевым граничным значениям. Получена оценка возможного предельного поведения гауссовой кривизны описанных выше минимальных поверхностей.

Ключевые слова: *уравнения минимальных поверхностей, полосообразная область, гауссова кривизна, асимптотическое поведение, голоморфные функции.*

Исследованию решений уравнения минимальных поверхностей, заданных над неограниченными областями, посвящены многие работы (см., например, [1; 2; 4; 5; 7–10]), в которых изучались различные задачи асимптотического поведения минимальных поверхностей.

1. Пусть $z = f(x, y)$ – C^2 – решение уравнения минимальных поверхностей

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f'_x(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right)=0, \tag{1}$$

заданное над областью $\Pi = \{(x,y)\in R^2 : 0 < x < +\infty,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\theta(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\theta(x)$, $\varphi(x), \theta(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, определенные на всей полуоси $x > 0$ ($|\varphi'(x)| < M, |\theta'(x)| < M$).

Символами $\partial'\Pi$ и $\partial''\Pi$ обозначим участки границы $\partial\Pi$:

$$\partial'\Pi = \partial\Pi \cap \{(x,y)\in R^2 : x = 0\}, \quad \partial''\Pi = \partial\Pi \setminus \partial'\Pi.$$

Предположим, что решение $f(x,y)\in C^1(\overline{\Pi})$ удовлетворяет на границе $\partial''\Pi$ следующему условию:

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial''\Pi} = f'_x(x,y)\cdot n_x + f'_y(x,y)\cdot n_y = 0, \tag{2}$$

где $n = (n_x, n_y)$ – внешняя нормаль.

На вертикальном участке $\partial'\Pi$ границы решение произвольно.

Для любого $x > 0$ введем в рассмотрение величину

$$m(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{1 + f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\, dy.$$

Заметим, что уравнение минимальных поверхностей (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right) = 0, \tag{3}$$

(см., например, [6]).

Пусть $x_2 > x_1 > 0$ – заданы произвольным образом. Обозначим через B область, ограниченную линиями $x = x_1$, $x = x_2$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Тогда по замкнутому контуру границы ∂B, применяя формулу Грина, будем иметь

$$\oint_{\partial B} \frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\,dx + \frac{1+f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\,dy = \iint_B \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\right)\right)dxdy = 0.$$

Отсюда, используя граничное условие (2), приходим к равенству

$$m(x_2) - m(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(1+\varphi'^2_2(x))f'^2_x(x,\varphi_2(x))}\,\varphi'_2(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(1+\varphi'^2_1(x))f'^2_x(x,\varphi_1(x))}\,\varphi'_1(x)dx. \tag{4}$$

2. Комплекснозначную функцию $h(x, y) = h_1(x, y) + ih_2(x, y)$ называют голоморфной в метрике поверхности, если она удовлетворяет системе уравнений Бельтрами в метрике этой поверхности (см.: [11, p. 10]). В случае графиков решений (1) эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) - \frac{1+f'^2_x(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1+f'^2_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) - \frac{f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y).$$

Зафиксируем произвольно точку $(x_0, y_0) \in \overline{\Pi}$ и введем в рассмотрение однозначную в $\overline{\Pi}$ функцию $v(x, y)$, существование которой следует из соотношения (3),

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{f'_x(t,s)f'_y(t,s)}{\sqrt{1+|\nabla f(t,s)|^2}}\,dt + \frac{1+f'^2_y(t,s)}{\sqrt{1+|\nabla f(t,s)|^2}}\,ds. \tag{5}$$

Известно, что отображение $w = u + iv$, где $u = x$, $v = v(x, y)$, является голоморфным в метрике поверхности $z = f(x, y)$ и осуществляет введение на графике изотермических координат (u, v) (см.: [6]). Подынтегральное дифференциальное выражение (5) обозначим через dv.

Рассмотрим отображение $w(x, y)$ на границе $\partial''\Pi$. Будем иметь:

$$v(x,\varphi_1(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,\varphi_1(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi_1(x_0))} dv + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi_1'^2(x))f_x'^2(x,\varphi_1(x))}\,\varphi_1'(x)dx,$$

$$v(x,\varphi_2(x)) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,\varphi_2(x))} dv = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_0,\varphi_2(x_0))} dv + \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1+(1+\varphi_2'^2(x))f_x'^2(x,\varphi_2(x))}\,\varphi_2'(x)dx.$$

Таким образом, используя равенство (4), получим:

$$v(x,\varphi_2(x)) - v(x,\varphi_1(x)) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{1+f_y'^2(x,y)}{\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}\,dy = \mu(x).$$

Обозначим $\Phi(x) = \dfrac{1}{2}(v(x,\varphi_2(x)) + v(x,\varphi_1(x)))$.

Отображение $w(x, y)$ есть диффеоморфизм $\overline{\Pi}$ на $\overline{\Pi}_w$ (см.: [1]), где

$$\Pi_w = \left\{(u,v)\in R^2 : 0 < u < +\infty,\ \Phi(u) - \frac{1}{2}\mu(u) < v < \Phi(u) + \frac{1}{2}\mu(u)\right\}.$$

Если функция $h(x, y)$ голоморфна в метрике поверхности $f(x, y)$, то сложная функция $h(x(u, v), y(u, v))$ будет голоморфной в области Π_w в традиционном понимании. Здесь $x = x(u, v)$, $y = y(u,v)$ – отображение, обратное к отображению $w(x, y)$.

Пользуясь теоремами типа Фрагмена – Линделефа для функций, голоморфных в полосообразных областях (см.: [3, с. 316]), сформулируем вспомогательную теорему.

Теорема 1. *Пусть функция $h(x, y)$ – голоморфна в метрике поверхности $z = f(x, y)$ в области Π, непрерывна в $\overline{\Pi}$ и удовлетворяет неравенству*

$$\ln|h(x,y)| \le -\nu(x),$$

где $\nu(x)$ – положительная, непрерывная, неубывающая на $(0, +\infty)$ функция.

Обозначим $\sigma(x) = \pi\int\limits_0^x \dfrac{1+\Phi'^2(t)}{\mu(t)}dt$. *Если функция $\nu(x)$ такова, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \nu(x)e^{-\sigma(x)}\frac{dx}{\mu(x)} = +\infty,$$

то $h(x, y) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную в Π_w функцию

$$\tilde{h}(u,v) = h(x(u,v), y(u,v)).$$

Имеем $\ln|\tilde{h}(u,v)| = \ln|h(x(u,v), y(u,v))| \le -\nu(x) = -\nu(u)$

и также $\int\limits_0^{+\infty} \nu(u)e^{-\sigma(u)}\dfrac{du}{\mu(u)} = \int\limits_0^{+\infty} \nu(x)e^{-\sigma(x)}\dfrac{dx}{\mu(x)} = +\infty$.

Таким образом, для голоморфной в Π_w функции $\tilde{h}(u,v)$ оказываются справедливыми условия теоремы (см.: [там же]), согласно которой $\tilde{h}(u,v) \equiv 0$. Последнее возможно лишь в случае, когда $h(x, y) \equiv 0$.

Теорема доказана.

3. Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\chi(x,y) = \frac{f_x'(x,y)}{1+\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}} - i\frac{f_y'(x,y)}{1+\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}}.$$

Известно [11, p. 113], что данная функция является голоморфной в метрике минимальной поверхности $z = f(x, y)$. Введем функцию

$$g(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{1+f_x'^2(t,s)}{\sqrt{1+|\nabla f(t,s)|^2}}\,dt+\frac{f_x'(t,s)f_y'(t,s)}{\sqrt{1+|\nabla f(t,s)|^2}}\,ds.$$

Известно (см.: [ibid.]), что через производную голоморфной в метрике поверхности функции $\chi(x, y)$ по параметру $\zeta=\xi+i\eta$, где $\xi=x+g(x,y)$, $\eta=y+v(x,y)$, выражается гауссова кривизна $K(x, y)$, причем

$$|\chi'(x,y)|^2=\frac{-K(x,y)(1+|\nabla f(x,y)|^2)^2}{(1+\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2})^4}\le -K(x,y). \tag{6}$$

Используя теорему 1 для голоморфной в метрике поверхности функции $\chi'(x,y)$, выводим, что для гауссовой кривизны минимальной поверхности $K(x, y)$ будет справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$ – C^2 – решение уравнения (1) в области П, удовлетворяющее условию (2). И пусть $\nu(x)$ – положительная, неубывающая, непрерывная на $(0, +\infty)$ функция, для которой*

$$\int\limits_0^{+\infty}\nu(x)e^{-\sigma(x)}\frac{dx}{\mu(x)}=+\infty. \tag{7}$$

Тогда, если всюду в П выполнено

$$\ln(-K(x,y))\le-\nu(x), \tag{8}$$

то $f(x, y)$ есть плоскость.

Доказательство. Имеем, что $\chi'(x,y)$ – голоморфна в метрике поверхности $f(x, y)$. Условия (6), (8) приводят к неравенству

$$\ln|\chi'(x,y)|\le\frac{\ln(-K(x,y))}{2}\le\frac{-\nu(x)}{2}.$$

При этом из (7) следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\nu(x)}{2}e^{-\sigma(x)}\frac{dx}{\mu(x)}=+\infty.$$

Таким образом, используя теорему 1 для функции $\chi'(x,y)$, заключаем, что $\chi'(x,y)\equiv 0$. Следовательно, из (6) получаем, что $K(x, y) \equiv 0$ и $f(x, y)$ есть плоскость. Теорема доказана.

Отметим, что результаты, полученные ранее в [2] о допустимой скорости стремления к нулю гауссовой кривизны минимальной поверхности над полуполосой являются следствием представленной выше теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. Теоремы типа Фрагмена – Линделефа для минимальной поверхности над полуполосой / Р. С. Акопян // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. – 2001. – Вып. 6. – С. 65–75.

2. Акопян, Р. С. Условия стабилизации минимальной поверхности над полуполосой / Р. С. Акопян // Докл. РАН. – 1999. – № 368(5). – С. 583–585.

3. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1991. – 448 с.

4. Миклюков, В. М. Некоторые вопросы качественной теории уравнений типа минимальной поверхности / В. М. Миклюков // Граничные задачи математической физики. – Киев : Наук. думка, 1983. – С. 137–146.

5. Миклюков, В. М. Об одном новом подходе к теореме Берштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей / В. М. Миклюков // Мат. сб. – 1979. – № 108 (2). – С. 263–289.

6. Осерман, Р. Минимальные поверхности / Р. Осерман // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. XXII. – № 4. – С. 55–136.

7. Пелих, В. И. Теоремы Фрагмена – Линделефа на минимальных поверхностях / В. И. Пелих // Геометрический анализ и его приложения : Научные школы ВолГУ. – 1999. – № 1. – С. 352–368.

8. Collin, P. Le Problème de Dirichlet pour lequation des surfaces minimales sur des domains non bornès / P. Collin, R. Krust // Bull. Soc. Math. France. – 1991. – № 199. – С. 443–462.

9. Langevin, R. A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications / R. Langevin, H. Rosenberg // Duke Math. J. – 1988. – № 57 (3). – С. 819–828.

10. Hwang, J. F. A uniqueness theorem for the minimal surface equation / J. F. Hwang // Pacific J. of Math. – 1996. – № 176 (2). – С. 357–365.

11. Nitsche, J. C. C. Vorleungen über Minimalflächen / J. C. C. Nitsche. – Berlin : Springer-Verlag ; N. Y. : Heidelberg, 1975. – 775 p.

ABOUT THE ADMISSIBLE SPEED OF APPROACHING TO ZERO OF GAUSSIAN CURVATURE OF MINIMAL SURFASE OVER STRIP DOMAIN

R.S. Akopyan

In this paper as our object of research there are solutions of the equation of the minimal surfaces given over strip domain and satisfying some zero boundary values. Estimations of possible asymptotic behavior of Gaussian curvature, the minimal surfaces described above are received.

Key words: *equations of the minimal surfaces, strip domain, Gaussian curvature, asymptotic behavior, holomorphic functions.*