УДК 517.51
ББК 22.161

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

И.В. Журавлев

В работе получен негладкий вариант теоремы о неявной функции. Доказана теорема о неявной функции для отображений с соболевскими производными. Наш метод доказательства использует нормированную матрицу Якоби.

Ключевые слова: *неявные функции, нормированная матрица Якоби, производная Кларка, обратная функция, соболевские производные.*

Введение

Более сорока лет назад Ф. Кларк доказал теорему об обратной функции для отображений класса Липшица [2; 5], что позволило перенести на этот класс отображений теорему о неявной функции [7]. Намного позже М. Кристи [6] получил теорему об обратной функции для более широкого класса отображений, включающих отображения классов Соболева, и это позволяет надеяться, что теорема о неявной функции также допускает распространение на более широкие классы отображений, например на соболевские отображения. Некоторые результаты в этом направлении получены в настоящей работе.

Основные результаты

Обозначим через $B^n(x,r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса $r > 0$. Пусть $M_{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, — множество $m \times n$-матриц с вещественными элементами. Для матрицы $A \in M_{m\times n}$ полагаем $\|A\| = (tr(A \cdot A^T))^{1/2}$ (T-транспонирование), $|A| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^{n+m}$ и $F : D \to \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что для каждого (x, y) из D функция $F(x, y)$ принадлежит классу Соболева $W^1_{1,loc}(D)$. Для функции $F(x,\, y)$ почти всюду в D определена ее формальная матрица Якоби $F'(x,\, y)$. В дальнейшем мы предполагаем, что почти всюду в D выполняется неравенство $|F'(x,y)| > 0$. Для точки $(x_0, y_0) \in D$ обозначим через $\kappa(x_0, y_0)$ наименьшее из замкнутых выпуклых множеств V в $M_{m\times(n+m)}$, каждое из которых обладает следующим свойством: существует такая окрестность $\Delta(x_0, y_0, r) = B^n(x_0, r) \times B^m(y_0, r) \subset D$ точки (x_0, y_0), что для почти всех $(x, y) \in \Delta(x_0, y_0, r)$ выполняется включение $\frac{F'(x,y)}{|F'(x,y)|} \in V$.

Множество $\kappa(x_0, y_0)$ является аналогом производной Кларка [2; 5] и некоторым аналогом нормированной матрицы Якоби [1]. Пусть $\left(F'_y/|F'|\right)(x_0, y_0)$ — проекция множества $\kappa(x_0, y_0) \subset M_{m\times(n+m)}$ на $M_{m\times m}$ (последние m столбцов матрицы $B \in \kappa(x_0, y_0)$ рассматриваются как квадратная m-матрица).

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^{n+m}$, $a \in D$, и $F : D \to \mathbb{R}^m$ — непрерывная функция класса $W^1_{1,loc}(D)$.*

Предположим, что $\|F'(x, y)\| \geq C$ п.в. в D для некоторой постоянной $C > 0$ и $det\ A \neq 0$ для всех $A \in \left(F'_y/|F'|\right)(a)$. Тогда существует $\rho > 0$ и единственная непрерывная функция

$$G : B^n(x_0, \rho) \to \mathbb{R}^m, G(x_0) = y_0,$$

такая, что $F(x, G(x)) = F(x_0, y_0)$ для всех $x \in B^n(x_0, \rho)$.

Доказательство. В доказательстве мы используем теорему о радиусе инъективности для отображений с ограниченным искажением [3; 8].

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $P : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_1(\Omega)$. Обозначим через P_h среднюю функцию функции P [3; 4]. Здесь h — параметр (радиус) усреднения. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть A — отображение, определенное в $\mathbb{R}^n$ и принимающее значения в множестве вещественных $m\times k$-матриц. Предположим, что функции a^i_j — элементы матрицы A, — локально суммируемы в $\mathbb{R}^n$. Пусть A_h — матричнозначная функция, которая получается сглаживанием функций a^i_j. Тогда $|A_h(x)| \leq |A|_h(x)$ и $\|A_h(x)\| \leq \leq \|A\|_h(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

По условию $det\ A \neq 0$ для всех $A \in \left(F'_y/|F'|\right)(a)$, и в силу результатов Кларка [2; 5] найдутся такие d, $0 < d < 1$, и $r > 0$, что выполняются следующие условия: для каждого $u \in \mathbb{R}^m$, $|u| = 1$, существует $w \in \mathbb{R}^m$, $|w| = 1$, для которого неравенство $\left\langle w, \frac{F'_y}{|F'|}(a)\, u\right\rangle \geq d$, $z = (x, y)$, справедливо почти всюду в окрестности $D_r = B^n(x_0, r) \times \times B^m(y_0, r) \subset D$. Для некоторой ортогональной матрицы $O \in M_{m\times m}$ выполняется равенство $w = O^{-1}u$. В силу неравенства

$$\left\langle O^{-1}u, \frac{F'_y}{|F'|}(z)\, u\right\rangle = \left\langle O^{T}u, \frac{F'_y}{|F'|}(z)\, u\right\rangle = \left\langle u, O\frac{F'_y}{|F'|}(z)\, u\right\rangle \geq d$$

имеем

$$\left|OF'_y(z)\, u - I(z)\, u\right| \leq kI(z), \tag{1}$$

где $I(z) = \frac{|(F')(z)|}{d}$, $k = \sqrt{1-d^2} < 1$.

Используя лемму, получаем

$$\left|OF'_{h,y}(z)\, u - I_h(z)\, u\right| \leq kI_h(z),$$

где $z \in D_{r/2} = B^n(x_0, r/2) \times B^m(y_0, r/2)$ и $h < r/4$. Функция $I(z)$ положительна почти всюду в D_r. Следовательно, $I_h(z) > 0$ всюду в $D_{r/2}$.

Неравенство (1) приводит к оценке

$$\left|F'_{h,y}(z)\right| \leq (k+1)\, I_h(z). \tag{2}$$

Более того, как следует из (1), справедливо неравенство $(1-k)\,I_h(z) \le \left|F'_{h,y}(z)\,u\right|$, и мы приходим к выводу, что

$$(1-k)\,I_h(z) \le \left|\det\left(F'_{h,y}(z)\right)\right|^{1/m}. \tag{3}$$

Неравенство (3) показывает, что для каждого фиксированного $x \in B^n(x_0, r/2)$ отображение $F_h(z)$ локально гомеоморфно на $B^m(y_0, r/2)$ относительно $y \in B^m(y_0, r/2)$.

Рассмотрим случай $m \ge 3$.

Из (2) и (3) делаем вывод, что коэффициент искажения

$$Q\left(F_h(z)\right) = \sup_{B^m(y_0,r/2)} \frac{\left|F'_{h,y}(z)\right|^m}{\left|\det\left(F'_{h,y}(z)\right)\right|}$$

отображения $F_h(z)$ ограничен сверху величиной $\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m$, которая не зависит от выбора $h < r/4$ и $x \in B^n(x_0, r/2)$. Поскольку каждое из отображений $F_h(z)$, $h < r/4$, $x \in B^n(x_0, r/2)$, является локально гомеоморфным на $B^m(y_0, r/2)$, то по теореме о радиусе инъективности для отображений с ограниченным искажением [3; 8] найдется такая окрестность $B^m(y_0, r_1)$ $(r_1 < r/2)$ точки y_0, что каждое из отображений $F_h(z)$, $h < r/4$, $x \in B^n(x_0, r/2)$ гомеоморфно на $B^m(y_0, r_1)$. Из (3) и неравенства $Q\left(F_h(z)\right) \le \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m$, переходя к пределу при h, стремящемся к нулю, приходим к выводу, что отображение $F(z)$, $z \in D_{r/2}$, не постоянно и является квазиконформным гомеоморфизмом на $B^m(y_0, r_1)$ для каждого фиксированного $x \in B^n(x_0, r/2)$.

Теперь рассмотрим случай $m \le 2$. Зафиксируем точку $x \in B^n(x_0, r/2)$. Пусть $z_1 = (x, y_1)$, $z_2 = (x, y_2) \in D_{r/2} = B^n(x_0, r/2) \times B^m(y_0, r/2)$ и $y_1 \ne y_2$. Полагаем

$$u = \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|},\ z_t = z_1 + t\,(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1].$$

Из (2) получаем

$$\left|OF'_{h,y}(z_t)\,(z_2 - z_1) - I_h(z_t)\,(z_2 - z_1)\right| \le kI_h(z_t)\,|z_2 - z_1|,$$

После интегрирования имеем

$$\left|O\left(F_h(z_2) - F_h(z_1)\right) - (z_2 - z_1)\int_0^1 I_h(z_t)\,dt\right| \le k\,|z_2 - z_1|\int_0^1 I_h(z_t)\,dt$$

и

$$(1-k)\,|z_2 - z_1| \cdot \int_0^1 I_h(z_t)\,dt \le |F_h(z_2) - F_h(z_1)|.$$

Из неравенства $\int_0^1 I_h(z_t)\,dt \ge \frac{C}{d}$ следует, что

$$|F_h(x, y_2) - F_h(x, y_1)| \ge \beta\,|y_2 - y_1|, \tag{4}$$

где $\beta = \frac{C(1-k)}{d}$, $y_2, y_1 \in \overline{B}^m(y_0, r/2)$, $x \in B^n(x_0, r/2)$.

Если $|Y - F_h(x, y_0)| < \beta\dfrac{r}{4}$, то для произвольной точки $y \in \partial\overline{B}^m(y_0, r/2)$ справедливо

$$|Y - F_h(x, y_1)| \geq |F_h(x, y_1) - F_h(x, y_0)| - |Y - F_h(x, y_0)| >$$

$$> \beta \frac{r}{2} - \beta \frac{r}{4} = \beta \frac{r}{4}.$$

Следовательно, $\min\limits_{y \in \partial \overline{B}^m(y_0, r/2)} |Y - F_h(x, y)|^2$ достигается в точке $y^* \in B^m(y_0, r/2)$ и

$$\left(|Y - F_h(x, y)|^2\right)'_y (y^*) = 2F'_{h,y}(x, y^*)(Y - F_h(x, y^*)) = 0.$$

Так как $\det F'_{h\ y}(x, y^*) \neq 0$, получаем $Y = F_h(x, y^*)$ и

$$B^m(F_h(x, y_0), \beta \frac{r}{4}) \subset F(x, B^m(y_0, r/2)).$$

Пользуясь (4), переходя к пределу при h, стремящемся к нулю, приходим к выводу, что отображение $F(z)$, $z \in D_{r/2}$, гомеоморфно на $B^m(y_0, r/2)$ для каждого фиксированного $x \in B^n(x_0, r/2)$.

В каждом из случаев $m \geq 3$ и $m \leq 2$ для достаточно малого r_0 выполняется $B^m(Y_0, r_0) \subset F(x, B^m(y_0, r_1))$ ($Y_0 = F(x_0, y_0)$ для всех $x \in B^n(x_0, r_0)$.

Рассмотрим отображение $\Phi : D_{r_0} \to \mathbb{R}^{n+m}$, определенное соотношением

$$(x, y) \stackrel{\Phi}{\to} (X, Y) = (x, F(x, y)),$$

$(x, y) \in D_{r_0} = B^n(x_0, r_0) \times B^m(y_0, r_0)$. Из сказанного выше следует, что Φ — гомеоморфизм и $\Phi(D_{r_0}) \supset B^n(x_0, r_0) \times B^m(y_0, r_0)$.

Отображение Φ определено так, что его обратное отображение имеет вид $x = X$, $y = g(X, Y)$. Отсюда следует, что

$$(X, Y) = \Phi(\Phi^{-1}(X, Y)) = (X, F(X, g(X, Y))) \tag{5}$$

и $F(X, g(X, Y)) = Y$. Полагаем $G(x) = g(X, Y_0)$. Пользуясь (5), получаем

$$F(x, G(x)) = Y_0 = F(x_0, y_0) \text{ и } G(x_0) = g(x_0, Y_0) = g(X_0, Y_0) = y_0.$$

Единственность отображения следует из биективности Φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев, И. В. Достаточные условия локальной квазиконформности отображений с ограниченным искажением / И. В. Журавлев // Мат. сб. — 1994. — Т. 78, № 2. — С. 437–445.
2. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ / Ф. Кларк. — М. : Наука, 1988. — 451 с.
3. Решетняк, Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю. Г. Решетняк. — Новосибирск : Наука, 1982. — 288 с.
4. Соболев, С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 337 с.
5. Clarke, F. H. On the invers function theorem / F. H. Clarke // Pac. J. Math. — 1976. — V. 64, № 1. — P. 97–102.
6. Cristea, M. A generalization of some theorems of F. H. Clarke and B. H. Pourciau / M. Cristea // Rev. Roumanie Math. Pures Appl. — 2005. — V. 50, № 2. — P. 137–152.

7. Hiriart-Urruty, J. B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces / J. B. Hiriart-Urruty // Math. Oper. Res. — 1979. — V. 4. — P. 78–97.
8. Martio, O. Topological and metric properties of quasiregular mappings / O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. — 1971. — № 488. — P. 1–31.

AN IMPLICIT FUNCTION THEOREM FOR SOBOLEV MAPPINGS

I.V. Zhuravlev

In the paper we obtained a non-smooth version of the implicit function theorem. We proved the implicit function theorem for mappings with Sobolev's derivatives. Our method of proof uses a normalized Jacobi matrix.

Key words: *implicit functions, normalized Jacobi matrix, Clarke derivative, inverse function, Sobolev's derivatives.*