УДК 524.7-8
ББК 22.193

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА CSPH-TVD: МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ [1]

А.Г. Жумалиев, С.С. Храпов

Описаны результаты тестовых расчетов на основе нового численного алгоритма cSPH-TVD, предназначенного для моделирования астрофизических течений. Исследована устойчивость численных решений, содержащих сильные ударные волны.

Ключевые слова: *численное моделирование, численные схемы в газодинамике, ударные волны, SPH, TVD, функции-ограничители.*

1. Моделирование сверхзвуковых течений

Необходимость моделирования ударных волн возникает при рассмотрении широкого круга задач в аэродинамике, теории взрыва, астрофизике [3; 6], в технических приложениях (например, связанных со сваркой, взрывом, при проведении строительных работ). Точность описания фронта ударной волны часто используют в качестве универсального теста, определяющего качество численных алгоритмов интегрирования уравнений газодинамики.

В работе [4] была предложена оригинальная численная схема cSPH-TVD (combined Smoothed Particle Hydrodynamics – Total Variation Diminishing) для моделирования динамики поверхностных вод на основе модели Сен-Венана. Наиболее существенным свойством разработанной в [4] численной схемы является устойчивый сквозной счет нерегулярных или разрывных профилей рельефа дна и нестационарных границ «вода — сухое дно».

В данной работе проведено обобщение численной схемы cSPH-TVD на случай полной системы уравнений газодинамики в одномерном приближении. Предложенный подход позволяет проводить устойчивый сквозной счет астрофизических течений, содержащих нестационарные границы «газ — вакуум» [1]. В основе алгоритма лежит последовательное применение лагранжева и эйлерова подходов для решения уравнений газодинамики (рис. 1). В данной работе сделан акцент на исследование устойчивости и точности получаемых численных решений, содержащих сильные ударные волны.

2. Основные уравнения

Будем исходить из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии для сплошной среды. Запишем систему уравнений газодинамики в интегральной форме при отсутствии внешних сил:

$$\frac{d}{dt}\int_{L(t)} \rho \, dL = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{L(t)} \rho u \, dL = -\int_{L(t)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dL\,, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{L(t)} e \, dL = -\int_{L(t)} \frac{\partial\,(up)}{\partial x}\, dL\,, \tag{3}$$

где $L(t)$ — объем «жидких» частиц в одномерном приближении, деформирующийся в процессе движения произвольным образом; ρ — плотность среды; u — скорость газа; $e = \rho(|u|^2/2+\varepsilon)$ — полная энергия газа; ε — удельная внутренняя энергия; p — изотропное давление. Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния идеального газа $\varepsilon = p\,/\left[\,(\gamma-1)\,\rho\,\right]$, где γ — показатель адиабаты. Для дальнейшего описания метода представим систему уравнений (1)–(3) в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u^2)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial\,(ue)}{\partial x} = -\frac{\partial\,(up)}{\partial x}\,. \tag{6}$$

Далее будем использовать только безразмерные величины: $\hat{\rho} = \rho/\rho_0$, $\hat{u} = u/u_0$, $\hat{e} = e/e_0$, $\hat{p} = p/p_0$, где ρ_0, $u_0 = x_0/t_0$, e_0, $p_0 = (\gamma-1)(e_0 - \rho_0 u_0^2/2)$ — характерные значения плотности, скорости, энергии и давления; x_0 — длина расчетной области; t_0 — характерное время рассматриваемых процессов.

3. Численный алгоритм cSPH-TVD

Воспользуемся стандартными процедурами дискретизации сплошной среды, применяемыми в численных схемах, основанных на лагранжевом и эйлеровом подходах. Покроем расчетную область равномерной эйлеровой (неподвижной) сеткой с пространственным шагом h и поместим в центры эйлеровых ячеек лагранжевы (подвижные) «жидкие» частицы. Введем временные слои t_n с неравномерным шагом τ_n. Таким образом, после дискретизации любую величину, входящую в исходные гидродинамические уравнения, можно представить в виде $A(x,t) \to A(x_i,t_n) \equiv A_i^n$, где i — пространственный индекс; n — индекс временного слоя. Число ячеек и частиц равно N. Рассмотрим отдельно каждый из этапов метода.

На *лагранжевом этапе* определяется изменение характеристик и положений «жидких» частиц под действием сил газодинамического давления (рис. 1). На данном этапе применяется модифицированный SPH-подход [8]. Для описания динамики «жидких» частиц представим систему интегральных уравнений газодинамики (1)–(3) в консервативной лагранжевой форме. Определив средние значения величин $\varphi = (\rho,\, \rho u\,, e)$ внутри ячейки $\langle\varphi\rangle_i = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{L_i(t)} \varphi\, dL$, получим:

$$\frac{d\,\langle \mathbf{q}\,\rangle_i}{dt} = \mathbf{F}_i\,, \quad \langle \mathbf{q}\,\rangle_i = \begin{pmatrix} \langle\rho\rangle_i \\ \langle\rho u\rangle_i \\ \langle e\rangle_i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -\,\langle\xi\rangle_i\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x_i} \\ -\dfrac{1}{2}\,\langle\xi\rangle_i\,u_i\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x_i} - \dfrac{1}{2}\,\langle\xi\rangle_i\,\dfrac{\partial(\xi u)}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\langle\xi\rangle_i = \sqrt{2\,(\gamma-1)\,(\langle e\rangle_i - \langle\rho\rangle_i\,|u_i|^2/2)}$, $\xi = \sqrt{2p}$.

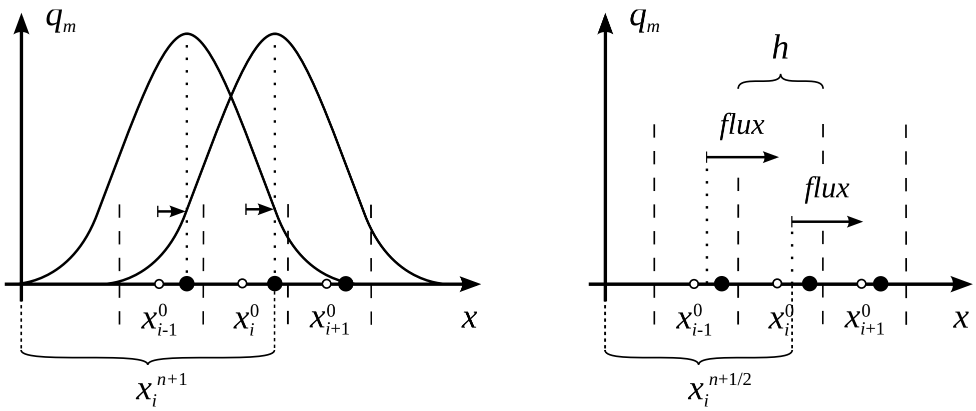

Рис. 1. На *лагранжевом этапе* (слева) определяется изменение характеристик «жидких» частиц, обусловленное действием на них сил газодинамического давления. На *эйлеровом этапе* (справа) вычисляются потоки массы, импульса и энергии, обусловленные перемещением жидкости через границы ячеек. Положение x_i^{n+1} соответствует координате лагранжевой «жидкой» частицы, положение x_i^0 — центру эйлеровой ячейки

Для аппроксимации пространственных производных, входящих в уравнение (7), будем использовать модифицированный SPH-подход со сглаживающим ядром W [4]:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_i} = \sum_{k=i-1}^{i+1} \langle\xi\rangle_k\,\frac{\partial}{\partial x_i}\widehat{W}\,(|x_i - x_k|)\ , \tag{8}$$

где $\widehat{W} = hW$. В качестве сглаживающего ядра, удовлетворяющего условию нормировки $2\pi\int\limits_0^\infty sW(s)ds = 1$, где $s = |x_i - x_k|\,/h$, может быть использован кубический сплайн *Монагана* [8]:

$$W = A_w \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}s^2 + \dfrac{3}{4}s^3, & 0 \le s \le 1; \\ \dfrac{1}{4}(2-s)^3, & 1 < s \le 2; \\ 0, & 2 < s. \end{cases}, \tag{9}$$

где $A_w = 2\,/\,(3h)$ — весовой коэффициент. Для численного интегрирования по времени уравнения (7) запишем рекуррентные соотношения, используя алгоритм «предиктор—корректор». На шаге «предиктор» вычисляем значения $\langle \mathbf{q}\,\rangle_i$ и x_i в момент времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$:

$$\langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1/2} = \langle \mathbf{q} \rangle_i^n + \frac{\tau_n}{2}\,\mathbf{F}_i\left(\langle \mathbf{q} \rangle^n\,,\,x^n\right)\,, \qquad x_i^{n+1/2} = x_i^n + \frac{\tau_n}{4}\left(\frac{\langle \rho u\rangle_i^{n+1/2}}{\langle \rho\rangle_i^{n+1/2}} + \frac{\langle \rho u\rangle_i^{n}}{\langle \rho\rangle_i^{n}}\right)\,. \quad (10)$$

На шаге «корректор» вычисляем значения $\langle \mathbf{q} \rangle_i$ и x_i в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ с учетом рассчитанных ранее значений этих величин на временном слое $t_{n+1/2}$:

$$\langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1} = \langle \mathbf{q} \rangle_i^n + \tau_n\,\mathbf{F}_i\left(\langle \mathbf{q} \rangle^{n+1/2}\,,\,x^{n+1/2}\right)\,, \quad x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{\tau_n}{2}\left(\frac{\langle \rho u\rangle_i^{n+1}}{\langle \rho\rangle_i^{n+1}} + \frac{\langle \rho u\rangle_i^{n}}{\langle \rho\rangle_i^{n}}\right)\,. \quad (11)$$

Для устойчивости численной схемы на лагранжевом этапе необходимо, чтобы за время интегрирования τ_n частица не вышла за пределы ячейки.

На *эйлеровом этапе* вычисляются потоки массы, импульса и энергии, обусловленные перемещением жидкости через границы ячеек, в момент времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ (рис. 1). На данном этапе применяется модифицированный TVD-подход, предложенный *Хартеном* [5], и приближенное решение задачи Римана. Разность втекающих и вытекающих в ячейки потоков позволяет определить изменения характеристик «жидких» частиц, рассчитанных на предыдущем этапе в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$. Представим систему уравнений (4)–(6) в консервативной эйлеровой форме при отсутствии сил газодинамического давления:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = 0\,, \quad (12)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{q}\cdot u$ — потоки массы, импульса и энергии (см. (7)). Применив стандартную процедуру конечно-разностной аппроксимации к уравнению (12), для i-й ячейки получим соотношение:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1} - \frac{\tau_n}{h}\left(\mathbf{G}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i-1/2}^{n+1/2}\right)\,, \quad (13)$$

где значения $\langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1}$ вычисляются на лагранжевом этапе по формулам (11), а значения потоков на границах ячеек $\mathbf{G}_{i\pm1/2}^{n+1/2} = \mathbf{G}\left(\mathbf{q}_{i\pm1/2}^{n+1/2}\right)$ находятся из приближенных решений задачи Римана с использованием метода *Лакса — Фридрихса* или *Хартена — Лакса — ван Лира* [11]. Для подавления нефизических осцилляций и обеспечения монотонности профилей сеточных величин на потоки $\mathbf{G}_{i\pm1/2}^{n+1/2}$ накладывается функция-ограничитель [10]. Для устойчивости численной схемы на эйлеровом этапе необходимо, чтобы за время интегрирования τ_n возмущения не распространились на расстояние, превышающее размер ячейки.

Затем определяется изменение интегральных характеристик лагранжевых «жидких» частиц, обусловленное их потоками через границы эйлеровых ячеек. После чего «жидкие» частицы помещаются в исходное положение — в центры ячеек.

Временной шаг τ_n для алгоритма cSPH-TVD с учетом требований устойчивости схемы на лагранжевом и эйлеровом этапах должен определяться из условия:

$$\tau_n = K\,\min\left(\frac{h}{2\,|u_i^n|}\,,\,\frac{h}{\lambda_{max}}\right)\,, \quad (14)$$

где $\lambda_{max} = \max\limits_i\left(|u_i^n| + a_i^n\right)$ — максимальная скорость возмущений; a_i^n — адиабатическая скорость звука; $0 < K < 1$ — число Куранта.

4. Результаты моделирования

Применим описанную численную схему к решению задачи Римана для уравнений газодинамики. Зададим начальные условия с левой границы от разрыва $\rho_L = 1,\ u_L = 0,\ p_L = 1\,000$ и с правой границы от разрыва $\rho_R = 1,\ u_R = 0,\ p_R = 0.01$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Данный тест применяется для оценки устойчивости численной схемы при моделировании сильных ударных волн [12]. Решение состоит из сильной ударной волны, контактной волны и левой волны разрежения. Перепад давления на фронте ударной волны составляет $p_*/p_R = 46\,000$, что может нарушить используемые приближения идеального газа, но для оценки устойчивости численной схемы данный тест представляет значительный интерес. Результаты численного моделирования сравним с точным решением задачи Римана. Так как для уравнений газодинамики не существует точного решения, применим итерационную численную схему, позволяющую получить решение с необходимой точностью. На рисунках 2–5 представлены профили давления и плотности в момент времени $t = 0.012$ для $N = 300$, точное решение показано сплошной линией, численные решения показаны символами.

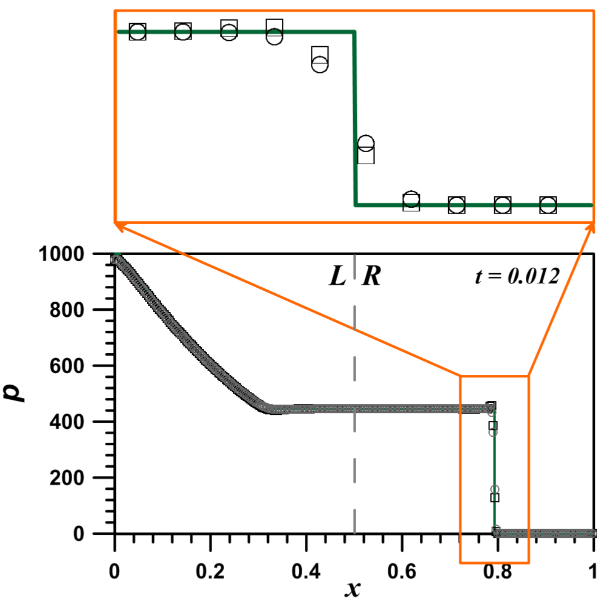

Рис. 2. Профиль давления, полученный с применением приближенных решений задачи Римана: метод *Лакса — Фридрихса* (кружки) и метод HLL (квадраты). Точное решение показано сплошной линией. На врезке изображена структура ударной волны

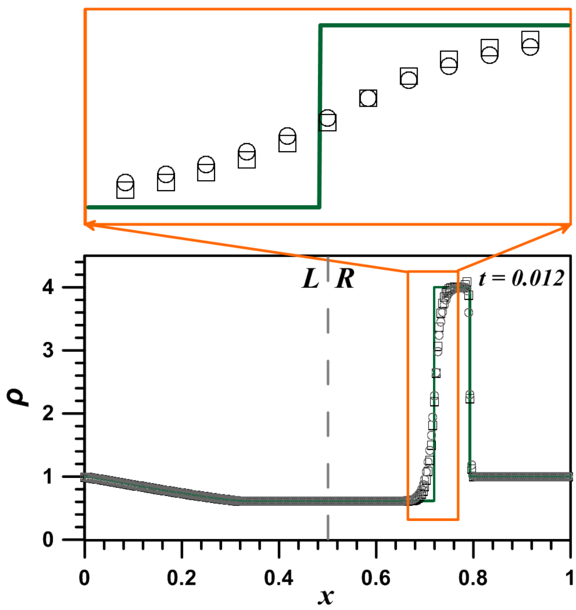

Рис. 3. Профиль плотности, полученный с применением приближенных решений задачи Римана: метод *Лакса — Фридрихса* (кружки) и метод HLL (квадраты). Точное решение показано сплошной линией. На врезке изображена структура контактной волны

На рисунках 2, 3 представлены профили давления и плотности, полученные с применением приближенных решений задачи Римана [2]: кружки соответствуют методу *Лакса — Фридрихса*, квадраты — методу *Хартена — Лакса — ван Лира* (HLL). Алгоритм, основанный на приближенном решении *Лакса — Фридрихса*, позволяет получить наиболее монотонный профиль. При использовании метода HLL возникают незначительные возмущения на фронте ударной волны.

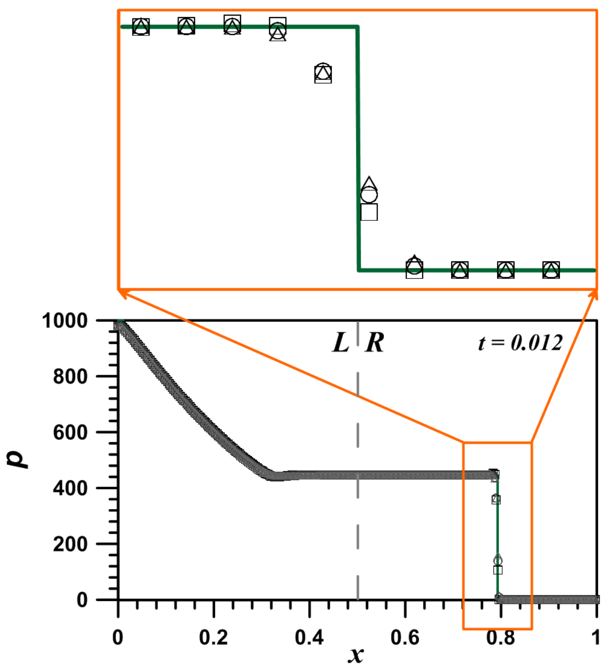

Рис. 4. Профиль давления, полученный с применением различных функций-ограничителей потоков: *minmod* (треугольники), ограничитель *ван Альбады* (кружки), ограничитель *ван Лира* (квадраты). Точное решение показано сплошной линией. На врезке изображена структура ударной волны

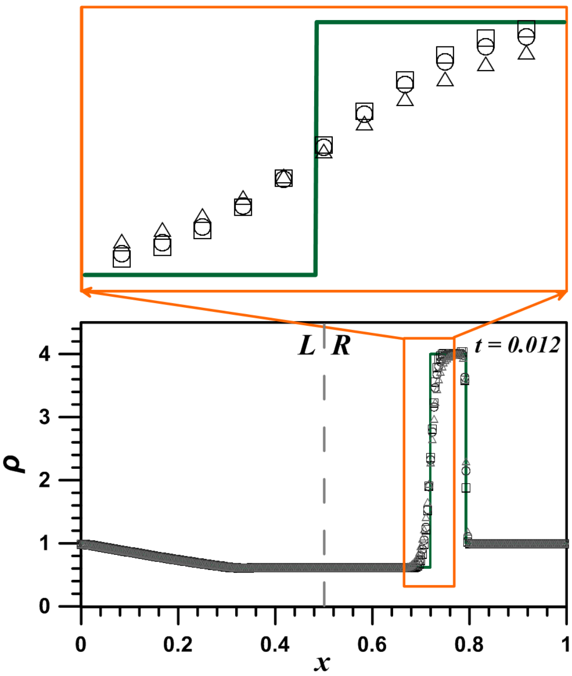

Рис. 5. Профиль плотности, полученный с применением различных функций-ограничителей потоков: *minmod* (треугольники), ограничитель *ван Альбады* (кружки), ограничитель *ван Лира* (квадраты). Точное решение показано сплошной линией. На врезке изображена структура контактной волны

На рисунках 4, 5 представлены профили давления и плотности, полученные с применением различных функций-ограничителей, предназначенных для подавления нефизических осцилляций [11]:

$$\mathcal{L}(a,b) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sign} a + \operatorname{sign} b\right) \min\left(|a|,|b|\right), \tag{15}$$

$$\mathcal{L}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b}, & \text{при } ab > 0, \\ 0, & \text{при } ab \le 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\mathcal{L}(a,b) = \frac{(a^2+\zeta)b + (b^2+\zeta)a}{a^2+b^2+2\zeta}, \tag{17}$$

где a и b — векторы наклонов распределения консервативной величины $\mathbf{q}$ внутри ячейки, ζ — малая константа. Все перечисленные ограничители удовлетворяют условию невозрастания вариации численного решения (TVD-принцип). Для приближенного решения задачи Римана использовался метод *Лакса — Фридрихса*. Функция-ограничитель *minmod* (15), предложенная *Роу* [9], позволяет получить профиль наиболее приближенный к монотонному, при этом масштабы численной размазки получаются более существенными. Функция-ограничитель (16), предложенная *ван Лиром* [7], приводит к появлению характерных численных всплесков на границах разрывов. Функция-ограничитель

(17), предложенная *ван Альбада* [2], позволяет получить профиль без выраженных всплесков с меньшей численной размазкой, чем в случае ограничителя *minmod*.

Заключение

Полученные решения свидетельствуют об устойчивости численной схемы cSPH-TVD при моделировании сильных ударных волн. Изучены реализации алгоритма с применением методов приближенного решения задачи Римана и различных ограничителей потоков, сохраняющих TVD-свойство разностной схемы.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Авторы благодарны профессору А.В. Хоперскову за полезные обсуждения и помощь в подготовке работы. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 12–02–00685–а, 11–02–12247–офи–м–2011, 11–07–97025–р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремин, М. А. Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики / М. А. Еремин, А. В. Хоперсков, С. А. Хоперсков // Изв. Волгогр. гос. техн. ун-та. Сер.: Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. — 2010. — Т. 6, № 8. — С. 24–27.
2. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. — М. : Физматлит, 2001. — 608 с.
3. Фридман, А. М. Физика галактических дисков / А. М. Фридман, А. В. Хоперсков. — М. : Физматлит, 2011. — 640 с.
4. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.
5. Harten, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws / A. Harten // Journal of Computational Physics. — 1983. — V. 49. — P. 357–393.
6. Khoperskov, A. V. Dissipative-Acoustic Instability in Accretion Disks at a Nonlinear Stage / A. V. Khoperskov, S. S. Khrapov, E. A. Nedugova // Astronomy Letters. — 2003. — V. 29. — P. 246–257.
7. Leer, B. van Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme / B. van Leer // Journal of Computational Physics. — 1974. — V. 14. — P. 361–370.
8. Monaghan, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics / J. J. Monaghan // Annual Review of Astronomy and Astrophysics — 1992. — V. 30. — P. 543–574.
9. Roe, P. L. Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows / P. L. Roe // Proceedings of the SIAM/AMS Seminar. — 1983. — P. 163–193.
10. Sweby, P. K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws / P. K. Sweby // SIAM Journal. — 1984. — V. 21, № 5. — P. 995–1011.
11. Toro, E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics / E. F. Toro. — Verlag : Springer, 1999. — 624 p.

12. Woodward, P. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks / P. Woodward, P. Colella // Journal of Computational Physics. — 1984. — V. 54. — P. 115–173.

A NUMERICAL SCHEME BASED ON THE COMBINED SPH-TVD APPROACH: SIMULATION OF THE SHOCK FRONT

A.G. Zhumaliev, S.S. Khrapov

The results of numerical simulation based on the new numerical scheme cSPH–TVD are considered. The numerical scheme cSPH–TVD is developed for simulation of gas dynamics within astrophysical environments. The stability of the numerical solutions with strong shocks is investigated.

Key words: *numerical simulation, numerical schemes in gas dynamics, shock waves, SPH, TVD, limiter functions.*