УДК 519.83
ББК 22.17

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РАВНОВЕСНЫЕ ПРИМЕРЫ В МОДЕЛЯХ СЕТЕВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

И.А. Башлаева

В работе рассматриваются вопросы сетевой конкуренции нескольких лиц. Построены экстремальные примеры сетей, когда равновесие по Нэшу существует независимо от весовой функции прибыли и метрики.

Ключевые слова: *равновесие по Нэшу, ориентированный граф, нормальная форма игры, алгоритмы кратчайших путей, сложность алгоритмов.*

Особенностью сложных социально-экономических и экологических систем является наличие в них нескольких участников, решения которых влияют на развитие системы и которые действуют в своих интересах. При этом решение одного игрока не может полностью определить развитие системы, поэтому актуальна проблема выработки общеприемлемых решений. Этот процесс носит конфликтный характер, для его описания применяются методы теории игр.

Важным условием для решения задачи выработки общеприемлемого решения является декларирование принципа оптимальности – математической формализации интуитивного представления о рациональном поведении участников в процессе конфликта. Построение универсального принципа оптимальности, пригодного для конфликтных управляемых процессов различной природы, оказывается невозможным. Поэтому в теории игр имеется широкое семейство принципов оптимальности, удовлетворяющих различным системам аксиом. Одним из наиболее распространенных принципов оптимальности является ситуация равновесия по Нэшу, сформулированная им в 1950 году.

Одним из удобных и часто применяемых методов при рассмотрении различных конфликтных ситуаций, встречающихся в теории игр, является использование элементов теории графов, в частности сетевых и графовых моделей. Эти модели охватывают довольно широкий спектр задач, характерной особенностью которых является большая размерность. Необходимы более эффективные алгоритмы оптимизации, которые позволяли бы экономить вычислительные ресурсы конкретных систем и обеспечивать их гибкость по отношению к изменениям исходных данных. Плодотворной основой для построения таких алгоритмов могут служить их представления на сетях. Сеть – это не что иное, как граф, каждой дуге которого поставлены в соответствие одно или несколько чисел.

Рассмотрим модель конкуренции нескольких коммивояжеров на сети с равным дележом.
Задана сеть $(V; E; t; c)$.
$(V; E)$ – неориентированный граф.
$t : E -- Z^{+}$ – временная функция переходов $t(e) \geq 0$.
$c : V -- Z^{+0}$ – функция стоимости узлов $c(v) \geq 0$.

Два коммивояжера (сервера) продвигаются по узлам (вершинам) сервера и выполняют работы, получая соответствующую прибыль, прибыль $c(v)$ забирает тот сервер, который приходит в вершину первым, опоздавший не получает ничего, если сервера пришли одновременно, то прибыль $c(v)$ делится пополам.

Пусть x, y – траектории (проходящие по всем узлам графа) первого и второго серверов из исходной вершины v, w; $a(x, y)$, $b(x, y)$ – суммарные прибыли первого, второго серверов.

Определение. Равновесием по Нэшу называется пара траекторий по всем узлам x, y, что выполнены условия равновесия:

для любой траектории: x' : $a(x', y) \le a(x, y)$;

для любой траектории: y' : $b(x, y') \le b(x, y)$

(то есть в равновесии каждый из серверов получает максимальную прибыль при фиксированной траектории противника).

Ранее получены следующие результаты.

Критерий равновесия. *x, y – равновесие по Нэшу $\Leftrightarrow$ сервера на своих траекториях гарантируют половину суммарной прибыли по всем вершинам сети.*

Критерий оптимальности. *X^* – множество траекторий, которые гарантируют серверу половину суммарной прибыли S по всем вершинам сети, $x \in X^*$, при движении по траектории должно быть выполнено следующее условие: пусть v – текущая вершина траектории x, Z – максимальный кратчайший участок траектории начиная с v (то есть траектория x представляется в следующем виде: $Z'vZ(w)vZ''$, где Z' – начало, vZ – кратчайший путь, $vZw(v)$ – не кратчайший, Z'' – окончание). При этом выполняется условие: $c(Z) \ge (S - n(Z'v)) / 2$ (в весе траектории учитываются только веса еще непройденных вершин).*

Утверждение. *Задача поиска равновесия по Нэшу в сети с единственным кратчайшим путем между любой парой вершин и начальным расположением серверов в одной и той же вершине полиномиально разрешима.*

В общем случае наличие равновесия по Нэшу, как видно из этих результатов, зависит от функции прибыли и метрики на графе. Когда граф сети небольшой, возможно, что равновесие по Нэшу существует всегда, независимо от функции прибыли и метрики. Проверке этой гипотезы и посвящена данная работа.

В вершинах неориентированного графа задана весовая функция прибыли, на ребрах заданы расстояния. Выделена некоторая начальная, *свободная* вершина h. В этой вершине находятся два конкурента – *игрока*, которые передвигаются по вершинам графа, исполняя в них определенную работу и получая за нее прибыль по следующему правилу: тот игрок, который пришел в вершину первый, забирает прибыль. Если игроки пришли в вершину одновременно, то варианты дележа прибыли таковы:

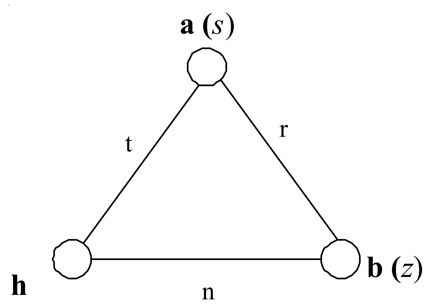
1) игроки делят прибыль пополам;

2) никто не получает прибыли;

3) между игроками задана иерархия и прибыль получает более важный игрок.

Такой динамической игре будет соответствовать нормальная форма игры, где стратегии игроков – это всевозможные допустимые маршруты, проходящие по всем вершинам графа.

I. Рассмотрим три варианта дележа для сети с тремя вершинами.



1) Прибыль делится пополам при одновременном приходе в вершину.

Наличие равновесия по Нэшу

	$s > z$	$s < z$	$s = z$
$t + r = n$	+	+	+
$t + r > n$	+	+	+

2) Никто не получает прибыли.

Наличие равновесия по Нэшу

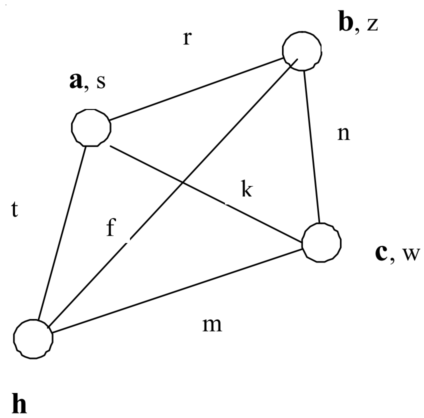
	$s > z$	$s < z$	$s = z$
$t + r = n$	+	+	+
$t + r > n$	+	+	+

3) Прибыль получает 1-й игрок

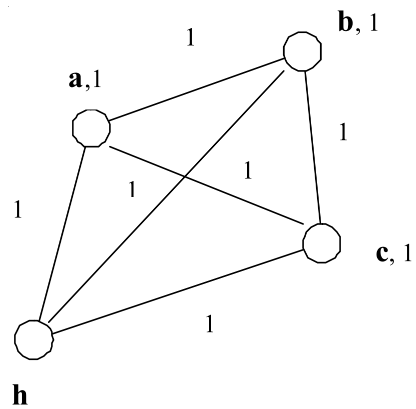
Наличие равновесия по Нэшу

	$s > z$	$s < z$	$s = z$
$t + r = n$	+	+	+
$t + r > n$	?	?	?

II. Три варианта дележа для сети с четырьмя вершинами.



Можно придумать сеть, при которой равновесия по Нэшу не существует ни для каких вариантов дележа:



Вывод. *Для первого варианта дележа прибыли максимальный равновесный пример – сеть из трех вершин, для второго варианта – сеть из трех вершин, для третьего – сеть из двух вершин.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо, А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979. – 536 с.
2. Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М. : Мир, 1971. – 230 с.
3. Tsurkov, V. Nash equilibria solutions in the competitive salesman problem on a network / V. Tsurkov, I. Averbach, V. Lebedev // Applied and Computational Mathematics. – 2008. – V. 7, № 110. – 138 p.

EXTREME EXAMPLES OF EQUILIBRIUM IN THE MODEL OF NETWORK COMPETITION

I.A. Bashlaeva

The paper considers problems of network competition of several persons. Built extreme examples of networks, when Nash equilibrium exists regardless of the weight function of profit and metrics.

Key words: *Nash equilibrium, directed graph, the normal form of the game, the shortest path algorithms, complexity of algorithms.*