



УДК 524.7-8
ББК 22.193

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА CSPH — TVD: ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОГРАНИЧИТЕЛЕЙ НАКЛОНОВ¹

Кузьмин Николай Михайлович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования
Волгоградского государственного университета
nmkuzmin@gmail.com, infomod@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Белоусов Антон Владимирович

Студент Института математики и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
anton.belousov@mail.ru, infomod@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Шушкевич Татьяна Сергеевна

Студент Института математики и информационных технологий
Волгоградского государственного университета
shushkevich_tanya@mail.ru, infomod@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Храпов Сергей Сергеевич

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования
Волгоградского государственного университета
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Описано обобщение численной схемы cSPH — TVD для уравнений идеальной газодинамики в отсутствие внешних сил для одномерного случая. Представлены результаты численного решения задачи о распаде газодинамического разрыва с помощью различных вариантов численной схемы. Исследовано влияние ограничителей наклонов и способов вычисления потоков на качество численного решения.

Ключевые слова: численные схемы, SPH, TVD, ограничители наклонов, комбинированный лагранжево-эйлеров подход.

Введение

В работе [7] была предложена новая численная схема cSPH — TVD (combined Smoothed Particle Hydrodynamics — Total Variation Diminishing) для интегрирования уравнений Сен-Венана, описывающих динамику поверхностных вод в приближении мелкой воды на нерегулярном рельефе местности, содержащем изломы и резкие перепады уровней воды. Метод основан на совместном использовании лагранжева (SPH) и эйлерова (TVD) подходов. Алгоритм cSPH — TVD для уравнений Сен-Венана является хорошо сбалансированным, консервативным и позволяет проводить устойчивый расчет нестационарных границ «вода — сухое дно» на существенно неоднородном рельефе дна [3–6; 13].

В работе [1] было предложено обобщение численной схемы cSPH — TVD на случай полной системы уравнений невязкой газодинамики в одномерном приближении для идеального газа в отсутствии внешних сил.

В работе [8] была описана численная схема SPH — PPM, являющаяся обобщением численной схемы cSPH — TVD на случай кусочно-параболического распределения газодинамических параметров внутри эйлеровых ячеек.

Целью данной работы является исследование влияния различных ограничителей наклонов и методов решения задачи Римана на качество численного решения методом cSPH — TVD.

1. Основные уравнения

Система уравнений невязкой газодинамики в интегральной форме при отсутствии внешних сил для одномерного случая имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{L(t)} \rho dL = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{L(t)} \rho u dL = - \int_{L(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dL, \\ \frac{d}{dt} \int_{L(t)} e dL = - \int_{L(t)} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dL, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ — плотность; u — скорость; p — давление; e — объемная плотность энергии; t — время; x — пространственная координата; $L(t)$ — размер жидкой частицы; изменяющийся в процессе ее движения. Система уравнений (1) замыкается калорическим уравнением состояния

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (2)$$

где γ — показатель адиабаты.

Для описания численной схемы перепишем систему уравнений (1) в дифференциальном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(eu)}{\partial x} = -\frac{\partial(pu)}{\partial x}. \end{cases} \quad (3)$$

2. Численная схема cSPH – TVD

В расчетной области $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ введем неподвижную эйлерову сетку

$$x_i = x_{min} + \left(i - \frac{1}{2}\right)h, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где $h = (x_{max} - x_{min})/N$, в центры ячеек которой поместим подвижные лагранжевы жидкие частицы.

2.1. Лагранжев этап

На этом этапе вычисляются изменения характеристик подвижных лагранжевых жидких частиц и их координат, обусловленные работой сил давления.

Обозначив средние значения газодинамических величин $a = (\rho, u, p, e)$ внутри i -й ячейки как $a_i = \frac{1}{h} \int_{L_i(t)} a dL$, перепишем систему уравнений (1) в дискретизированном виде:

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ (\rho u)_i \\ e_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = - \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \frac{\varphi_i}{2} \left(u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_i} \right) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\varphi = \sqrt{2p}$, $\frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{x=x_i}$.

Закон движения i -й частицы определяется уравнением движения

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i. \quad (6)$$

Входящие в (5) пространственные производные будем аппроксимировать на основе модифицированного метода SPH с использованием сглаживающего ядра W [1; 7]:

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} \approx \sum_{k=i-1}^{i+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{W}(|x_i - x_k|, h), \quad (7)$$

где $\bar{W} = hW$. В качестве сглаживающего ядра может быть использован кубический сплайн Монагана [16]:

$$W(|x|, h) = A_w \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \leq q \leq 1; \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & 1 \leq q \leq 2; \\ 0, & 2 \leq q. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $q = \frac{|x|}{h}$, $A_w = \frac{2}{3h}$. Из (8) видно, что

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\text{sign}(x)}{h}. \quad (9)$$

Подставляя (7) в (5), получим

$$\mathbf{Q}_i \approx - \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \sum_k \varphi_k \frac{\partial \bar{W}_{ik}}{\partial x_i} \\ \frac{\varphi_i}{2} \sum_k \left[(u_i + u_k) \varphi_k \frac{\partial \bar{W}_{ik}}{\partial x_i} \right] \end{pmatrix}. \quad (10)$$

С учетом (10) система уравнений (5), (6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому для ее численного интегрирования можно использовать методы типа Рунге — Кутты. Приведем метод Рунге — Кутты второго порядка точности, удовлетворяющий TVD-условию [18] для продвижения решения по времени с момента времени t_n до момента времени t_{n+1} .

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_i^* = \mathbf{U}_i^n + \tau \mathbf{Q}_i(\mathbf{U}_k^n, x_k^n), \\ x_i^* = x_i^n + \tau \frac{u_i^n + \tilde{u}_i^*}{2}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{U}_i^n + \tilde{\mathbf{U}}_i^* + \tau \mathbf{Q}_i(\tilde{\mathbf{U}}_k^*, x_k^*) \right], \\ x_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left[x_i^n + x_i^* + \tau \frac{u_i^n + \tilde{u}_i^{n+1}}{2} \right]. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь знак « $\tilde{}$ » означает, что центр масс соответствующей частицы смещен относительно центра эйлеровой ячейки.

2.2. Эйлеров этап

На этом этапе вычисляются изменения газодинамических величин, обусловленные потоками через границы неподвижных эйлеровых ячеек:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1} - \frac{\tau}{h} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ eu \end{pmatrix}.$$

Потоки $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ можно вычислять используя приближенные решения задачи Римана:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L, \mathbf{U}_{i+1/2}^R), \quad (14)$$

где $\mathbf{U}_{i+1/2}^L$ и $\mathbf{U}_{i+1/2}^R$ характеризуют состояния газа слева и справа от границы между i -й и $(i+1)$ -й ячейками.

Будем считать, что внутри эйлеровых ячеек газодинамические параметры имеют кусочно-линейное распределение. Тогда, проводя интерполяцию относительно центра масс ячейки, сместившегося на лагранжевом этапе за счет работы сил давления, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{i+1/2}^L = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \frac{h}{2} \left(1 - \bar{\xi}_i^{n+1}\right) \Theta_i^{n+1/2}, \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^R = \tilde{\mathbf{U}}_{i+1}^{n+1/2} - \frac{h}{2} \left(1 + \bar{\xi}_{i+1}^{n+1}\right) \Theta_{i+1}^{n+1/2}, \end{cases} \quad (15)$$

где $\Theta_i^{n+1/2}$ — вектор наклонов линейного распределения величины $\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = (\mathbf{U}_i^n + \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1})/2$ внутри i -й ячейки и

$$\bar{\xi}_i^{n+1} = \frac{\xi_i^{n+1}}{h}, \quad \xi_i^{n+1} = x_i^{n+1} - x_i^n.$$

Для того чтобы наклоны кусочно-линейного распределения (15) удовлетворяли условию TVD [11], их ограничители:

$$\Theta_i^{n+1/2} = \mathcal{L} \left(\frac{\tilde{\mathbf{U}}_{i+1}^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2}}{\kappa_i h}, \frac{\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} - \tilde{\mathbf{U}}_{i-1}^{n+1/2}}{\kappa_{i-1} h} \right), \quad (16)$$

где $\kappa_i = 1 + \bar{\xi}_{i+1}^{n+1/2} - \bar{\xi}_i^{n+1/2}$, $\xi_i^{n+1/2} = \xi_i^{n+1}/2$.

2.3. Заключительный этап

На этом этапе подвижные лагранжевы частицы возвращаются в центры неподвижных эйлеровых ячеек. Это означает, что после вычисления \mathbf{U}_i^{n+1} во всех ячейках расчетной области, перед выполнением следующего шага по времени, должно быть сделано присваивание

$$x_i^{n+1} = x_i^0, i = 1, 2, \dots, N,$$

где x_i^0 — координаты центров масс ячеек в начальный момент времени t_0 .

2.4. Шаг по времени

Временной шаг τ должен определяться из соотношения [1]

$$\tau = \text{CFL} \min_i \left(\frac{h}{2 \max_i |u_i^n|}, \frac{h}{\max_i (|u_i^n| + c_i^n)} \right), \quad (17)$$

где $0 < CFL < 1$ — число Куранта — Фридрихса — Леви, $c_i^n = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$ — адиабатическая скорость звука. Уравнение (17) гарантирует, что за один временной шаг на лагранжевом этапе центр масс частиц не сместится на расстояние, превышающее $h/2$ относительно начального положения, а на эйлеровом этапе возмущения не распространятся на расстояние, большее размера ячейки h .

3. Различные реализации численной схемы

Для численной схемы, описанной в разделе 2, возможен выбор различных способов приближенного решения задачи Римана и ограничения наклонов. Опишем некоторые из них.

3.1. Приближенные решения задачи Римана

Обозначим $\mathbf{U}^{L,R} = \mathbf{U}_{i+1/2}^{L,R}$, $\mathbf{F}^{L,R} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{L,R})$, тогда метод Лакса — Фридрихса [14] (LF) может быть записан в виде

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{F}^L + \mathbf{F}^R}{2} + S^* \frac{\mathbf{U}^L - \mathbf{U}^R}{2}, \quad (18)$$

где $S^* = \max(|S^L|, |S^R|)$ и

$$S^L = \min(u^L - c^L, u^R - c^R), \quad S^R = \max(u^L + c^L, u^R + c^R), \quad c^{L,R} = \sqrt{\gamma p^{L,R} / \rho^{L,R}}.$$

Метод Хартена — Лакса — ван Лиры [12] (HLL) может быть записан в виде

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}^L, & 0 < S^L, \\ \frac{S^R \mathbf{F}^L - S^L \mathbf{F}^R + S^L S^R (\mathbf{U}^L - \mathbf{U}^R)}{S^R - S^L}, & S^L \leq 0 \leq S^R, \\ \mathbf{F}^R, & S^R < 0. \end{cases} \quad (19)$$

3.2. Ограничители наклонов

Одно из первых применений ограничителей описано в [2], где использовалась функция

$$\mathcal{L}_{Kolgan}(a, b) = \begin{cases} a, & |a| = \min(|a|, |b|, \frac{1}{2}|a+b|); \\ b, & |b| = \min(|a|, |b|, \frac{1}{2}|a+b|); \\ \frac{1}{2}(a+b), & |a| = \min(|a|, |b|, \frac{1}{2}|a+b|). \end{cases} \quad (20)$$

Для описания различных видов ограничителей наклонов часто используется функция

$$\text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sign}(a) + \text{sign}(b)] \min(|a|, |b|). \quad (21)$$

Запишем ее для общего случая n аргументов:

$$\text{minmod}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{sign}(a_1) \max[0, \min(|a_1|, \text{sign}(a_1)a_2, \dots, \text{sign}(a_1)a_n)]. \quad (22)$$

Эта функция является простейшим ограничителем наклонов, гарантирующим выполнение условия TVD и монотонности численной схемы:

$$\mathcal{L}_{mm}(a, b) = \min\text{mod}(a, b). \quad (23)$$

Другим примером является предложенный в [15] ограничитель

$$\mathcal{L}_{vL}(a, b) = \begin{cases} \frac{2ab}{a+b}, & ab > 0; \\ 0, & ab \leq 0. \end{cases} \quad (24)$$

В работе [9] был предложен гладкий ограничитель

$$\mathcal{L}_{vA}(a, b) = \frac{(a^2 + \epsilon)b + (b^2 + \epsilon)a}{a^2 + b^2 + 2\epsilon}, \quad (25)$$

где $\epsilon \ll 1$ — малая положительная константа, добавляемая во избежание деления на ноль.

Выпишем однопараметрическое семейство ограничителей

$$\mathcal{L}_k(a, b) = \frac{1}{2}[\text{sign}(a) + \text{sign}(b)] \max(|\min\text{mod}(ka, b)|, |\min\text{mod}(a, kb)|), \quad (26)$$

где $1 \leq k \leq 2$. При $k = 1$ этот ограничитель тождественен ограничителю $\min\text{mod}$, а при $k = 2$ — ограничителю «superbee» [17].

Приведем ограничитель из работы [10], соответствующий кусочно-параболическому распределению параметров внутри ячейки:

$$\mathcal{L}_{CW}(a, b) = \min\text{mod}\left(2a, 2b, \frac{a+b}{2}\right). \quad (27)$$

4. Тестирование

Условимся об обозначениях для различных вариантов схемы cSPH — TVD: оно будет состоять из двух частей, разделенных дефисом. При этом первая часть будет обозначать метод, применяемый для приближенного решения Задачи Римана, а вторая — ограничитель наклонов. Например, схема, написанная с использованием формул (18) и (23), будет обозначаться как «LF-mm».

В качестве тестовой рассмотрим задачу о распаде разрыва газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ в точке $x_0 = 0.3$ с начальными условиями

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0.75, 1), & x < x_0, \\ (0.125, 0, 0.1), & x_0 \leq x. \end{cases} \quad (28)$$

Все вычисления проводились на сетке с количеством ячеек $N = 100$, число Куранта — Фридрихса — Леви CFL = 0.5. На рисунках 1, 2 приведены результаты тестирования для некоторых вариантов схемы (для схем LF-k и HLL-k параметр $k = 2$).

Для каждого из вариантов схемы была рассчитана относительная ошибка в норме L_1 :

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\rho_n - \rho_e}{\rho_e} \right| \times 100\%, \quad (29)$$

где ρ_e — аналитическое решение; ρ_n — численное. Результаты представлены в таблицах 1, 2.

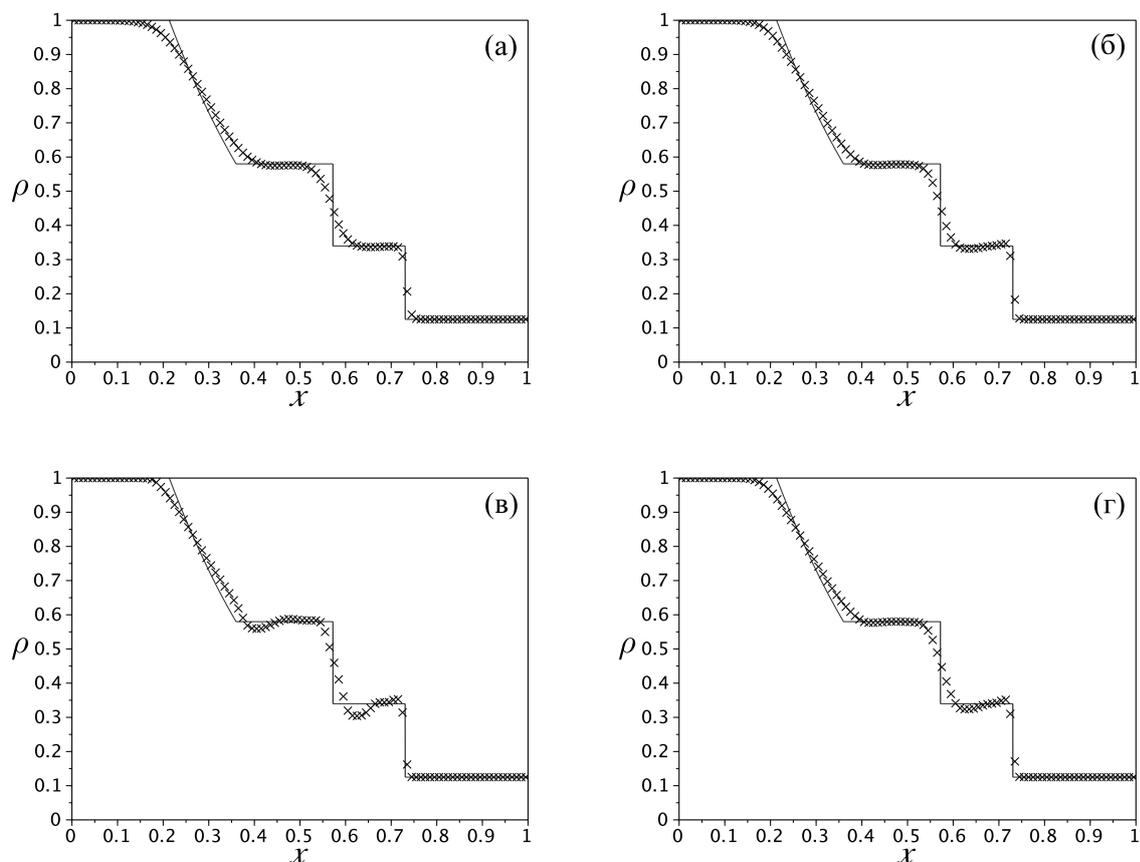


Рис. 1. Результаты тестирования с использованием методов LF-mm (а), LF-vL (б), LF-k (в) и LF-CW (г) для момента времени $t = 0.2$. Сплошной линией показано аналитическое решение для профиля плотности, крестиками — численное

Таблица 1

Относительные ошибки для LF-вариантов схемы

| Схема | LF-mm | LF-vL | LF-vA | LF-Kolgan | LF-k | LF-CW |
|--------|-------|-------|-------|-----------|------|-------|
| Ошибка | 3,10 | 2,52 | 2,69 | 3,09 | 2,79 | 2,52 |

Таблица 2

Относительные ошибки для HLL-вариантов схемы

| Схема | HLL-mm | HLL-vL | HLL-vA | HLL-Kolgan | HLL-k | HLL-CW |
|--------|--------|--------|--------|------------|-------|--------|
| Ошибка | 2,50 | 2,10 | 2,26 | 2,51 | 1,76 | 2,01 |

Заключение

Две пары ограничителей наклонов — \mathcal{L}_{mm} , \mathcal{L}_{Kolgan} и \mathcal{L}_{vL} , \mathcal{L}_{CW} приводят к похожим результатам для обоих методов численного решения задачи Римана: LF и HLL.

Ограничитель \mathcal{L}_{CW} привел к наилучшему согласию численного решения с аналитическим для метода LF, а \mathcal{L}_{mm} — к наихудшему. Ограничитель \mathcal{L}_k привел к наилучшему согласию численного решения с аналитическим для метода HLL, а \mathcal{L}_{Kolgan} — к наихудшему.

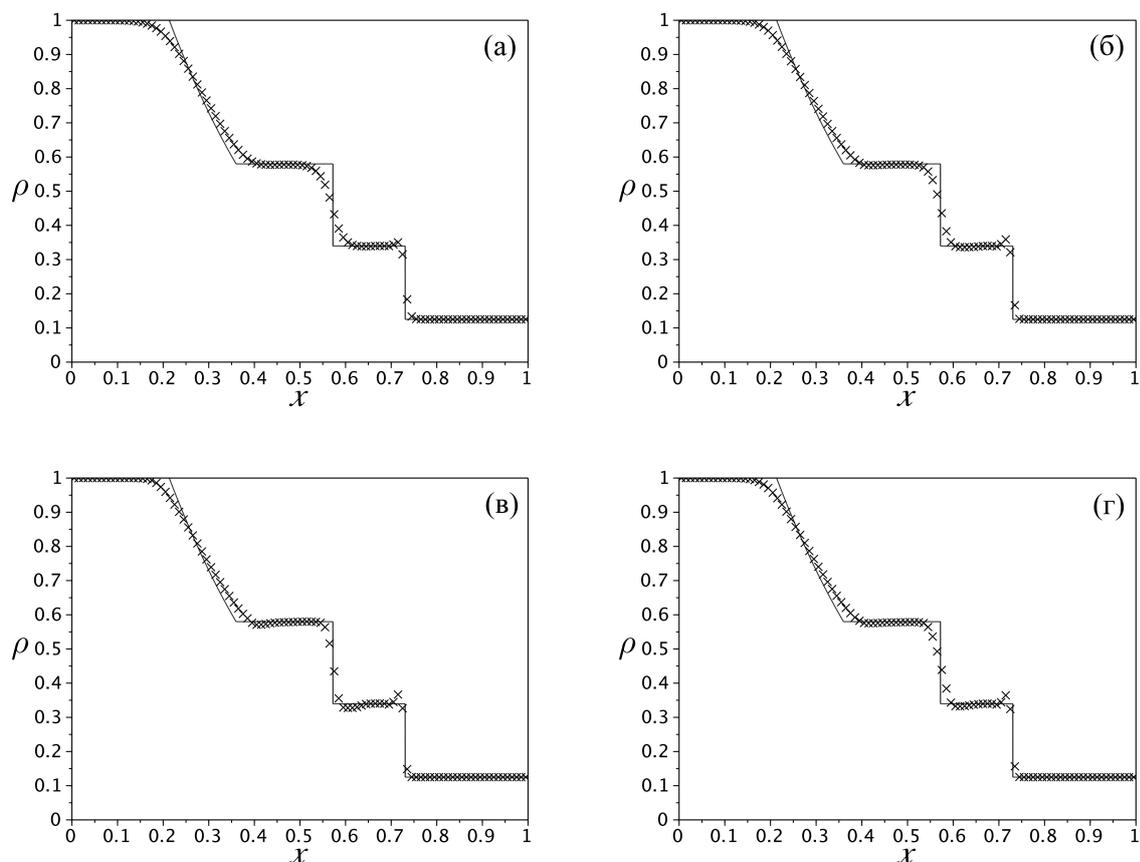


Рис. 2. Результаты тестирования с использованием методов HLL-m (а), HLL-vL (б), HLL-k (в) и HLL-CW (г) для момента времени $t = 0.2$. Сплошной линией показано аналитическое решение для профиля плотности, крестиками — численное

Относительная ошибка для профиля плотности в норме L_1 находится в пределах от 1.76 % до 3.1 % в зависимости от метода вычисления численных потоков и используемого в вычислениях ограничителя наклонов. Таким образом, все варианты cSPH — TVD схемы показывают хорошее согласие численного решения с аналитическим.

Отметим, что метод LF-k приводит к особенностям в профиле плотности перед контактным разрывом и перед волной разрежения. При этом метод HLL-k свободен от указанного недостатка и показал наилучшее согласие численного решения с аналитическим.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 13-07-97056-р_поволжье_а, № 13-01-97062-р_поволжье_а, № 13-05-97065-р_поволжье_а и Гостемы № 8.2419.2011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жумалиев, А. Г. Численная схема cSPH — TVD: моделирование фронта ударной волны / А. Г. Жумалиев, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2 (17). — С. 60–67.

2. Колган, В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики / В. П. Колган // Ученые записки ЦАГИ. — 1972. — Т. 3, № 6. — С. 68–77.
3. Писарев, А. В. Численная модель динамики поверхностных вод в русле Волги: оценка коэффициента шероховатости / А. В. Писарев, С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — С. 114–130.
4. Писарев, А. В. Численная схема на основе комбинированного подхода SPH — TVD: проблема моделирования сдвиговых течений / А. В. Писарев, С. С. Храпов, А. В. Хоперсков // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 2 (15). — С. 138–141.
5. Хоперсков, А. В. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС — Волго-Ахтубинская пойма». Ч. 1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка / А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, А. В. Писарев, А. А. Воронин, М. В. Елисеева, И. А. Кобелев // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 18–25.
6. Храпов, С. С. Моделирование динамики поверхностных вод / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, М. А. Еремин. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2010. — 132 с.
7. Храпов, С. С. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH — TVD подхода / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.
8. Шушкевич, К. С. Одномерная численная схема для газодинамического моделирования на основе комбинированного подхода SPH — PPM / К. С. Шушкевич, Н. М. Кузьмин // Вестник магистратуры. — 2013. — № 5 (20). — С. 40–44.
9. Albada, G. D. van. A comparative study of computational methods to cosmic gas dynamics / G. D. van Albada, B. van Leer, W. W. Roberts // Astronomy and Astrophysics. — 1982. — Vol. 108. — P. 76–84.
10. Colella, P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations / P. Colella, P. R. Woodward // Journal of Computational Physics. — 1984. — Vol. 54, № 1. — P. 174–201.
11. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws / A. Harten // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 49, № 3. — P. 357–393.
12. Harten, A. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws / A. Harten, P. Lax, B. van Leer // SIAM Review. — 1983. — Vol. 25, № 1. — P. 35–61.
13. Khrapov, S. S. The numerical simulation of shallow water: estimation of the roughness coefficient on the flood stage / S. S. Khrapov, A. V. Pisarev, I. A. Kobelev, A. G. Zhumaliev, E. O. Agafonnikova, A. G. Losev, A. V. Khoperskov // Advances in Mechanical Engineering. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1–11. — Electronic text data. — Mode of access: Article ID 787016, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/787016>. — Title from screen.
14. Lax, P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation / P. D. Lax // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1954. — Vol. 7, № 1. — P. 159–193.
15. Leer, B. van. Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow / B. van Leer // Journal of Computational Physics. — 1977. — Vol. 23, № 3. — P. 263–275.
16. Monaghan, J. J. Smoothed particle hydrodynamics / J. J. Monaghan // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1992. — Vol. 30. — P. 543–574.
17. Roe, P. L. Efficient construction and use of approximate Riemann solvers / P. L. Roe, J. Pike // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, VI. — Amsterdam : North-Holland, 1983. — P. 499–518.
18. Shu, C. W. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing

schemes. I / C. W. Shu, S. Osher // Journal of Computational Physics. — 1988. — Vol. 77, № 2. — P. 439–471.

REFERENCES

1. Zhumaliev A.G., Khrapov S.S. Chislennaya skhema cSPH — TVD: modelirovanie fronta udarnoy volny [Numerical scheme cSPH — TVD: front of shock wave simulation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 2 (17), pp. 60–67.

2. Kolgan V.P. Primenenie printsipa minimal'nykh znacheniy proizvodnykh k postroeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya rascheta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki [The application of derivatives' minimum values to construction finite-difference schemes for computation of gas dynamics' discontinuous solutions]. *Uchenye zapiski TsAGI* [Science notes of CAHI], 1972, vol. 3, no. 6, pp. 68–77.

3. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Agafonnikova E.O., Khoperskov A.V. Chislennaya model' dinamiki poverkhnostnykh vod v rusle Volgi: otsenka koeffitsienta sherokhovatosti [Numerical model of surface water dynamics in Volgas bed: estimation of roughness coefficient]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki* [Journal of Udmurt university. Mathematics. Mechanics. Computer science], 2013, no. 1, pp. 114–130.

4. Pisarev A.V., Khrapov S.S., Khoperskov A.V. Chislennaya skhema na osnove kombinirovannogo podkhoda SPH — TVD: problema modelirovaniya sdvigovykh techeniy [Numerical scheme on the base of combined SPH — TVD approach: the problem of shear flows simulation]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2011, no. 2 (15), pp. 138–141.

5. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Pisarev A.V., Voronin A.A., Eliseeva M.V., Kobelev I.A. Zadacha upravleniya gidrologicheskim rezhimom v ekologo-ekonomicheskoy sisteme «Volzhskaya GES — Volgo-Akhtubinskaya poyma». Ch. 1. Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod v period vesennego pavodka [The problem of management hydrological regime in ecology-economic system “Volga HPS — Volga-Akhtuba flood-plain”. Part 1. Simulation of surface water dynamics in springtime flood]. *Problemy upravleniya* [Problems of management], 2012, no. 5, pp. 18–25.

6. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Eremin M.A. *Modelirovanie dinamiki poverkhnostnykh vod* [Simulation of surface water dynamics]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2010. 132 p.

7. Khrapov S.S., Khoperskov A.V., Kuz'min N.M., Pisarev A.V., Kobelev I.A. Chislennaya skhema dlya modelirovaniya dinamiki poverkhnostnykh vod na osnove kombinirovannogo SPH — TVD podkhoda [Numerical scheme for simulation of dynamics surface waters on the base of combined SPH — TVD approach]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye: novye vychislitel'nye tekhnologii* [Numerical methods and programming], 2011, vol. 12, no. 1, pp. 282–297.

8. Shushkevich K.S., Kuz'min N.M. Odnomernaya chislennaya skhema dlya gazodinamicheskogo modelirovaniya na osnove kombinirovannogo podkhoda SPH — PPM [One-dimensional numerical scheme for gas-dynamics simulation on the base of combined SPH — PPM approach]. *Vestnik magistratury* [Masters journal], 2013, no. 5 (20), pp. 40–44.

9. Albada G.D. van., Leer V. van., Roberts W.W. A comparative study of computational methods to cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics*, 1982, vol. 108, pp. 76–84.

10. Colella P., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, 1984, vol. 54, no. 1, pp. 174–201.

11. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no. 3, pp. 357–393.

12. Harten A., Lax P., Leer B. van. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35–61.

13. Khrapov S.S., Pisarev A.V., Kobelev I.A., Zhumaliev A.G., Agafonnikova E.O., Losev A.G., Khoperskov A.V. The numerical simulation of shallow water: estimation of the roughness coefficient on the flood stage. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 2013, pp. 1–11. Available at: Article ID 787016, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/787016>.
14. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, vol. 7, no. 1, pp. 159–193.
15. Leer V. van. Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 1977, vol. 23, no. 3, pp. 263–275.
16. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, vol. 30, pp. 543–574.
17. Roe P.L., Pike J. Efficient construction and use of approximate Riemann solvers. *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, VI*, Amsterdam, North-Holland, 1983, pp. 499–518.
18. Shu C.W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. I. *Journal of Computational Physics*, 1988, vol. 77, no. 2, pp. 439–471.

NUMERICAL SCHEME CSPH — TVD: INVESTIGATION OF INFLUENCE SLOPE LIMITERS

Kuz'min Nikolay Mikhaylovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation
Volgograd State University
nmkuzmin@gmail.com, infomod@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Belousov Anton Vladimirovich

Student, Institute of Mathematics and IT
Volgograd State University
anton.belousov@mail.ru, infomod@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Shushkevich Tat'yana Sergeevna

Student, Institute of Mathematics and IT
Volgograd State University
shushkevich_tanya@mail.ru, infomod@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Khrapov Sergey Sergeevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation
Volgograd State University
xss-ip@mail.ru, infomod@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The generalisation of combined lagrange-eulerian numerical scheme cSPH — TVD for ideal gas-dynamics equations without external forces in one-dimensional case was described. The results of the Riemann problems numerical simulation for different variants of this numerical scheme are shown.

Influence of slope-limitiers and flux computation methods to quality of numerical solution are investigated.

Six version of slope limiters are investigated: minmod, van Leer, van Albada, Kolgan, k-parameter and Colella — Woodward. Two methods of numerical flux computation also investigated: Lax — Friedrichs and Harten — Lax — van Leer.

It is shown, that two pair of slope limiters leads to very similar numerical solution quality: minmod — Kolgan and van Leer — Colella — Woodward for the both version of numerical flux computation — Lax — Friedrichs and Harten — Lax — van Leer methods.

For the Lax — Friedrichs method of numerical flux computation Colella–Woodward slope limiter give the best results and minmod the worse.

For the Harten — Lax — van Leer method of numerical flux computation k-parameter slope limiter give the best results and Kolgan the worse.

The L_1 relative error in density varying from 1.76% to 3.1% depending on the numerical flux computation method and kind of slope limiter.

It is shown, that for all investigated variants of cSPH — TVD method numerical solution of Riemann problem very similar to exact.

It is very interesting, that k-parameter slope limiter in combination with Lax — Friedrichs method of numerical flux computation leads to strange features near to contact discontinuity and rarefaction wave. But, in combination with Harten — Lax — van Leer method of numerical flux computation it leads to the best of all results without these strange features.

Key words: numerical schemes, SPH, TVD, slope limiters, combined lag-range-eulerian approach.