



УДК 514.75
ББК 22.151

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ЦИКЛИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ

Бодренко Ирина Ивановна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуются свойства нормальных сечений и геодезических на n -мерных циклически рекуррентных подмногообразиях F^n в $(n+p)$ -мерных евклидовых пространствах E^{n+p} . Устанавливаются условия, при которых циклически рекуррентные подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ имеют нулевое геодезическое кручение в каждой точке по любому направлению.

Ключевые слова: вторая фундаментальная форма, циклически рекуррентное подмногообразие, геодезическое кручение, нормальное сечение, нормальная кривизна, нормальное кручение, связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Введение

Пусть F^n — n -мерное ($n \geq 2$) гладкое подмногообразие в $(n+p)$ -мерном ($p \geq 1$) пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$. В геометрии погруженных многообразий важное место занимают исследования, касающиеся подмногообразий $F^n \subset M^{n+p}(c)$ со специальными свойствами второй фундаментальной формы.

Обозначим через b вторую фундаментальную форму F^n , через $\bar{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *параллельной* (в связности $\bar{\nabla}$), если $\bar{\nabla}b = 0$. Подмногообразия с $\bar{\nabla}b = 0$ называются *параллельными*. Параллельные подмногообразия F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$ являются внешне-геометрическими аналогами локально симметрических пространств, то есть римановых

пространств с ковариантно постоянным тензором кривизны R . Критерий параллельности второй фундаментальной формы b установлен в [2].

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *рекуррентной*, если на F^n существует 1-форма μ такая, что $\bar{\nabla}b = \mu \otimes b$. Внутренняя геометрия подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой исследована в [1]. Полная локальная классификация и геометрическое описание подмногообразий с не параллельной рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны получены в [12]. Свойства элеровых подмногообразий с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной голоморфной секционной кривизны установлены в [5]. Некоторые свойства вещественных римановых симметрических пространств с комплексной структурой, то есть эрмитовых симметрических пространств, изучены в [22].

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется *циклически рекуррентной* [4], если на F^n существует 1-форма μ такая, что

$$\bar{\nabla}_X b(Y, Z) = \mu(X)b(Y, Z) + \mu(Y)b(Z, X) + \mu(Z)b(X, Y) \quad (1)$$

для любых векторных полей X, Y, Z , касательных к F^n .

Определение 1. Подмногообразие $F^n \subset M^{n+p}(c)$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ будем называть *циклически рекуррентным подмногообразием* [10].

Класс циклически рекуррентных подмногообразий содержит подклассы параллельных подмногообразий и не параллельных рекуррентных подмногообразий, но не исчерпывается ими. Некоторые свойства гиперповерхностей F^n с циклически рекуррентной не параллельной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах E^{n+1} установлены в [4; 8; 19]. Циклически рекуррентные подмногообразия F^n с плоской нормальной связностью в евклидовых пространствах E^{n+p} классифицированы в [3; 7; 13].

В терминах второй фундаментальной формы b подмногообразия $F^n \subset M^{n+p}(c)$ определяются специальные классы нормальных векторных полей. В [17] введено понятие рекуррентного вектора нормальной кривизны и изучены свойства $F^n \subset E^{n+p}$ с параллельным нормальным векторным полем специального вида. В [15] получена классификация двумерных поверхностей F^2 с плоской нормальной связностью в пространствах постоянной кривизны, на которых каждая геодезическая имеет постоянную кривизну. В [11] описаны параллельные нормальные поля вдоль геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях F^n в пространствах постоянной кривизны $M^{n+p}(c)$.

С помощью второй фундаментальной формы b и связности $\bar{\nabla}$ получены формулы для вычисления нормальной кривизны $k_N(x, t)$ и нормального кручения $\varkappa_N(x, t)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t , установлены необходимые и достаточные условия принадлежности F^n некоторым $(n+1)$ -мерным плоскостям $E^{n+1} \subset E^{n+p}$ [18; 20; 21]. В работе [16] изучены свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 . Эти исследования для $F^n \subset E^{n+p}$ были продолжены в [6; 9] для произвольных n и p . Некоторые свойства нормальных сечений циклически рекуррентных подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$ установлены в [10]. Свойства геодезических и нормальных сечений на вещественных флаговых многообразиях исследовались в [23].

В настоящей работе изучаются свойства нормальных сечений и геодезических на циклически рекуррентных подмногообразиях $F^n \subset E^{n+p}$ при произвольных n и p .

Пусть x — произвольная точка F^n , $T_x F^n$ — касательное пространство к F^n в точке x . Пусть $\gamma_g(x, t)$ — геодезическая на F^n , проходящая через точку $x \in F^n$ в направлении $t \in T_x F^n$. Обозначим через $k_g(x, t)$ и $\varkappa_g(x, t)$ кривизну и кручение геодезической $\gamma_g(x, t) \subset E^{n+p}$, соответственно, вычисленные в точке x .

Определение 2. Кручение $\varkappa_g(x, t)$ геодезической $\gamma_g(x, t)$ называется геодезическим кручением подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t .

Обозначим через \mathcal{R}_0 (см.: [14]) множество подмногообразий $F^n \subset E^{n+p}$, на которых

$$k_g(x, t) \neq 0, \quad \varkappa_g(x, t) \equiv 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (2)$$

Пусть $T_x^\perp F^n$ — нормальное пространство к F^n в точке x . Рассмотрим в точке $x \in F^n$ для любого ненулевого вектора $t \in T_x F^n$ $(p+1)$ -мерную плоскость

$$E^{p+1}(x, t, T_x^\perp F^n) \subseteq E^{n+p}.$$

Плоскость $E^{p+1}(x, t, T_x^\perp F^n)$ пересекает F^n в окрестности точки x по некоторой кривой $\gamma_N(x, t)$.

Определение 3. Кривая $\gamma_N(x, t)$, ее кривизна $k_N(x, t)$ и кручение $\varkappa_N(x, t)$ в E^{n+p} , вычисленные в точке x , называются, соответственно, нормальным сечением, нормальной кривизной и нормальным кручением подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t .

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. F^n принадлежит множеству \mathcal{R}_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$k_N(x, t) = k(x), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+2} без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3), то F^n имеет плоскую нормальную связность $R^\perp \equiv 0$.

Замечание. Поверхность $F^2 \subset E^4$, у которой индикатриса нормальной кривизны в каждой точке x является окружностью с центром в x , удовлетворяет условию (3) и при этом не принадлежит множеству \mathcal{R}_0 , и $R^\perp \neq 0$.

Теорема 3. Пусть F^n есть связное циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+2} без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3), то F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некоторой гиперплоскости $E^{n+1} \subset E^{n+2}$.

Теорема 4. Пусть F^n есть связное циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} ($p \geq 3$) без асимптотических направлений. Если F^n удовлетворяет условию (3) и имеет n линейно независимых сопряженных направлений в каждой точке $x \in F^n$, то F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некотором $(n+1)$ -мерном подпространстве $E^{n+1} \subset E^{n+p}$.

**1. Уравнения циклически рекуррентных подмногообразий
в евклидовом пространстве**

Пусть E^{n+p} — $(n+p)$ -мерное евклидово пространство с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^{n+p})$, \langle, \rangle — скалярное произведение в E^{n+p} . Пусть F^n — гладкое подмногообразие в E^{n+p} . В окрестности каждой точки $x \in F^n$ подмногообразия F^n можно задать уравнениями

$$x^a = f^a(u^1, \dots, u^n), \quad (u^1, \dots, u^n) \in D, \quad a = \overline{1, n+p},$$

где D — некоторая область параметрического пространства (u^1, \dots, u^n) , $f^a(u^1, \dots, u^n) \in C^\infty(D)$.

Пусть

$$\vec{r}(u^1, \dots, u^n) = \{f^1(u^1, \dots, u^n), f^2(u^1, \dots, u^n), \dots, f^{n+p}(u^1, \dots, u^n)\} -$$

векторное параметрическое уравнение подмногообразия F^n в окрестности точки $x \in F^n$.

Условимся, что здесь и далее индексы будут принимать следующие значения: $i, j, k, l, m, \dots = 1, \dots, n$, $\alpha, \beta, \sigma, \dots = 1, \dots, p$, и всюду действует правило суммирования Эйнштейна.

Рассмотрим нормальное оснащение подмногообразия F^n , заданное полем ортонормированных реперов $\{\vec{n}_{\alpha|i}\}$ в нормальном расслоении $T^\perp F^n$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$, $\langle \vec{n}_{\alpha|i}, \vec{n}_{\beta|j} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Обозначим

$$\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}(u^1, \dots, u^n)}{\partial u^i}, \quad \vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}(u^1, \dots, u^n)}{\partial u^i \partial u^j}, \quad \vec{n}_{\alpha|i} = \frac{\partial \vec{n}_\alpha(u^1, \dots, u^n)}{\partial u^i}.$$

Векторы $\{\vec{r}_i(x)\}$ образуют базис касательного пространства $T_x F^n$ подмногообразия F^n в точке x .

Метрическая форма подмногообразия F^n имеет вид:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j,$$

где $g_{ij} = \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle$.

Обозначим через

$$II(\vec{n}_{\alpha|i}) = b_{\alpha|i;j} du^i du^j$$

вторую квадратичную форму подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ относительно нормали $\vec{n}_{\alpha|i}$, где $b_{\alpha|i;j} = \langle \vec{n}_{\alpha|i}, \vec{r}_{ij} \rangle$.

В каждой точке $x \in F^n$ оператор Вейнгартена $A_\alpha : T_x F^n \rightarrow T_x F^n$ относительно нормали $\vec{n}_{\alpha|i}(x)$ определяется по формуле

$$\langle A_\alpha \vec{r}_i(x), \vec{r}_j(x) \rangle = \langle \vec{n}_{\alpha|i}(x), \vec{r}_{ij}(x) \rangle.$$

Коэффициенты $\Gamma_{\alpha\beta|i}^\perp = \langle \vec{n}_{\alpha|i}, \vec{n}_{\beta|i} \rangle$ называются компонентами нормальной связности D подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$.

Ковариантная производная вектора $\vec{n}_{\alpha|i}$ в нормальной связности D вычисляется по формуле

$$D_i \vec{n}_{\alpha|i} = \Gamma_{\alpha|i}^{\perp\beta} \vec{n}_{\beta|i}, \quad \text{где } \Gamma_{\alpha|i}^{\perp\beta} = \delta^{\beta\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha|i}^\perp, \quad \text{матрица } \|\delta^{\alpha\beta}\| = \|\delta_{\alpha\beta}\|^{-1}.$$

Линейные формы

$$\omega_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta|i}^\perp du^i$$

называются линейными формами кручения подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$.

Компоненты тензора нормальной кривизны R^\perp вычисляются по формуле

$$R_{\beta|i j}^{\perp\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta|i}^{\perp\alpha}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{\beta|j}^{\perp\alpha}}{\partial u^i} + \Gamma_{\beta|i}^{\perp\sigma} \Gamma_{\sigma|j}^{\perp\alpha} - \Gamma_{\beta|j}^{\perp\sigma} \Gamma_{\sigma|i}^{\perp\alpha}. \quad (4)$$

Ковариантная производная второй фундаментальной формы b в связности Ван дер Вардена — Бортолотти $\bar{\nabla}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\nabla}_i b_{jk}^\alpha = \frac{\partial b_{jk}^\alpha}{\partial u^i} - \Gamma_{ij}^l b_{lk}^\alpha - \Gamma_{ik}^l b_{jl}^\alpha + \Gamma_{\beta|i}^{\perp\alpha} b_{jk}^\beta, \quad (5)$$

где Γ_{ij}^l — символы Кристоффеля, вычисленные относительно метрического тензора g_{ij} , $b_{ij}^\alpha = \delta^{\alpha\sigma} b_{\sigma|ij}$.

Уравнения Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи, соответственно, имеют вид:

$$\sum_{\sigma=1}^p b_{ij}^\sigma b_{kl}^\sigma - b_{ik}^\sigma b_{jl}^\sigma = g_{ml} \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{ks}^m - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^m \right), \quad (6)$$

$$\bar{\nabla}_i b_{jk}^\alpha = \bar{\nabla}_j b_{ik}^\alpha, \quad (7)$$

$$R_{\beta|i j}^{\perp\alpha} = g^{kl} (b_{\beta|ik} b_{lj}^\alpha - b_{\beta|jk} b_{li}^\alpha). \quad (8)$$

Условие (1) имеет вид

$$\bar{\nabla}_i b_{jk}^\alpha = \mu_i b_{jk}^\alpha + \mu_j b_{ki}^\alpha + \mu_k b_{ik}^\alpha, \quad (9)$$

где $\mu_i = \mu_i(u^1, \dots, u^n)$ — компоненты 1-формы $\mu = \mu_i du^i$.

Система уравнений (6)–(9) определяет циклически рекуррентные подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ и только их.

2. Основные леммы

Лемма 1. Кривизна $k_g(x, t)$ и кручение $\varkappa_g(x, t)$ геодезической $\gamma_g(x, t)$ вычисляются по формулам:

$$k_g(x, t) = |b(\tau, \tau)|, \quad (10)$$

$$\varkappa_g(x, t) = \left(\frac{|[\tau \wedge A_{b(\tau, \tau)} \tau]|^2}{|b(\tau, \tau)|^2} + \frac{|[b(\tau, \tau) \wedge (\bar{\nabla}_\tau b)(\tau, \tau)]|^2}{|b(\tau, \tau)|^4} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$, \wedge — внешнее произведение в E^{n+p} . Формула (11) имеет смысл, когда t — неасимптотическое направление.

Доказательство. Формулы (10), (11) следуют из определения $k_g(x, t)$, $\varkappa_g(x, t)$. Доказательство (10), (11) содержится в [10] (см.: [10, гл. 8, лемма 8.1]).

Лемма 2. Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. Тогда геодезическое кручение F^n в точке x по направлению t вычисляется по формуле:

$$\varkappa_g(x, t) = \frac{|[\tau \wedge A_{b(\tau, \tau)}\tau]|}{|b(\tau, \tau)|}, \quad (12)$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$, \wedge — внешнее произведение в E^{n+p} .

Доказательство. В силу (9) имеем

$$\bar{\nabla}_t b(t, t) = 3\mu(t)b(t, t), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Отсюда находим

$$[b(t, t) \wedge (\bar{\nabla}_t b)(t, t)] = [b(t, t) \wedge 3\mu(t)b(t, t)] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (13)$$

Тогда из (11), учитывая (13), приходим к (12).

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть F^n есть циклически рекуррентное подмногообразие в E^{n+p} без асимптотических направлений. F^n принадлежит множеству \mathcal{R}_0 тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in F^n$ для всех взаимно ортогональных векторов $X, Y \in T_x F^n$ выполнено уравнение:

$$\langle b(X, X), b(X, Y) \rangle = 0. \quad (14)$$

Доказательство. В силу (12) F^n принадлежит множеству \mathcal{R}_0 тогда и только тогда, когда выполнено уравнение

$$[t \wedge A_{b(t, t)}t] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (15)$$

Так как равенство $[t \wedge A_{b(t, t)}t] = 0$ означает, что векторы t и $A_{b(t, t)}t$ коллинеарны, то (15) равносильно условию (14).

Лемма доказана.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 условие (2) эквивалентно следующим соотношениям:

$$b(t, t) \neq 0, \quad [t \wedge A_{b(t, t)}t] = 0, \quad [b(t, t) \wedge (\bar{\nabla}_t b)(t, t)] = 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (16)$$

Нормальная кривизна $k_N(x, t)$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$ в точке x по направлению t вычисляется по формуле

$$k_N(x, t) = |b(\tau, \tau)|,$$

где $\tau = t/|t|$, $|t| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$.

Следовательно, условие (3) равносильно соотношению

$$|b(t, t)| = k(x)|t|^2, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n. \quad (17)$$

Замечая, что (17) эквивалентно условию (14), учитывая (16) и применяя леммы 2, 3, приходим к утверждению теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x \in F^n$ — произвольная точка. Введем в некоторой окрестности $O(x)$ геодезические нормальные координаты (u^1, \dots, u^n) такие, что

$$g_{1m} = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m = \overline{2, n}. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть $\vec{n}_{1|}, \vec{n}_{2|}$ — оснащение в нормальном расслоении $T^\perp F^n$ подмногообразия $F^n \subset E^{n+2}$. Рассмотрим в $O(x)$ векторные поля

$$\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{n}_{\alpha|}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Так как F^n не имеет асимптотических направлений, то $\vec{b}_{11} \neq 0$ в точке x . Тогда в некоторой окрестности $U(x) \subset O(x)$ векторное поле $\vec{b}_{11} \neq 0$.

Используя равенство (17), построим в $U(x)$ оснащение $\vec{n}_{1|}^*, \vec{n}_{2|}^*$, положив

$$\vec{n}_{1|}^* = \frac{\vec{b}_{11}}{k(u^1, \dots, u^n)}.$$

Положим

$$\vec{b}_{ij} = b_{ij}^{*\alpha} \vec{n}_{\alpha|}^*, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Учитывая (18), находим, что в $U(x)$

$$\langle \vec{b}_{ii}, \vec{n}_{2|}^* \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, в силу (9), имеем

$$\langle (\nabla_i b_{ii}^{*\alpha}) \vec{n}_{\alpha|}^*, \vec{n}_{2|}^* \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Обозначим

$$\Gamma_{12|i}^{*\perp} = \langle \vec{n}_{1|}^*, \vec{n}_{2|i}^* \rangle, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя (5), из (19) находим:

$$\Gamma_{1|i}^{*\perp 2}(u^1, \dots, u^n) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Значит, в силу формулы (4) имеем: $R^\perp \equiv 0$ в $U(x)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из теоремы 1 следует, что F^n принадлежит множеству \mathcal{R}_0 . Тогда F^n является открытой частью гиперболы S^n в некоторой гиперплоскости $E^{n+1} \subset E^{n+2}$ (см.: [14, § 5, теорема 9]).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу теоремы 1 подмногообразие F^n принадлежит множеству \mathcal{R}_0 . Тогда F^n является открытой частью гиперсферы S^n в некотором $(n+1)$ -мерном подпространстве $E^{n+1} \subset E^{n+p}$ (см.: [14, § 5, теорема 11]).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, И. И. Внутренняя геометрия внешне рекуррентных подмногообразий / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 301.
2. Бодренко, И. И. Критерий параллельности второй фундаментальной формы / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 1999. — Т. 6, № 1. — С. 124–125.
3. Бодренко, И. И. Нормально плоские псевдорекуррентные подмногообразия в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 540–541.
4. Бодренко, И. И. О гиперповерхностях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2010. — Вып. 13. — С. 23–35.
5. Бодренко, И. И. О кэлеровых подмногообразиях с рекуррентной второй фундаментальной формой / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2006. — Т. 13, № 4. — С. 617–618.
6. Бодренко, И. И. О подмногообразиях с нулевым нормальным кручением в евклидовом пространстве / И. И. Бодренко // Сибирский математический журнал. — 1994. — Т. 35, № 3. — С. 527–536.
7. Бодренко, И. И. О подмногообразиях с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 746.
8. Бодренко, И. И. Об одном классе псевдорекуррентных подмногообразий / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 109.
9. Бодренко, И. И. Об n -мерных поверхностях в евклидовом пространстве E^{n+p} , принадлежащих некоторой $(n+1)$ -мерной плоскости / И. И. Бодренко // Математические заметки. — 1993. — Т. 54, № 4. — С. 19–23.
10. Бодренко, И. И. Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко. — Saarbrücken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co, 2013. — 200 с.
11. Бодренко, И. И. Параллельные поля нормальных q -направлений на псевдорекуррентных подмногообразиях / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2002. — Вып. 7. — С. 5–11.
12. Бодренко, И. И. Подмногообразия с рекуррентной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2007. — Т. 14, № 4. — С. 679–682.
13. Бодренко, И. И. Строение псевдорекуррентных подмногообразий в евклидовых пространствах / И. И. Бодренко // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 318–319.
14. Бодренко, И. И. Характеристический признак n -мерной сферы в евклидовом пространстве E^{n+p} / И. И. Бодренко // Математический сборник. — 1994. — Т. 185, № 11. — С. 23–30.
15. Фоменко, В. Т. Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны

/ В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 2000. — Т. 64, № 4. — С. 579–586.

16. Фоменко, В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 / В. Т. Фоменко // Математический сборник. — 1978. — Т. 106 (148), № 4 (8). — С. 589–603.

17. Фоменко, В. Т. Об одном обобщении поверхностей Дарбу / В. Т. Фоменко // Математические заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 107–113.

18. Bodrenko, I. I. A characteristic feature of the n -dimensional sphere in the Euclidean space E^{n+p} / I. I. Bodrenko // Sbornik Mathematics. — 1995. — Vol. 83, № 2. — P. 315–320.

19. Bodrenko, I. I. On generalized Darboux surfaces in Euclidean spaces / I. I. Bodrenko // Действия торов: топология, геометрия, теория чисел. — Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. — С. 14–15.

20. Bodrenko, I. I. On n -dimensional surfaces in Euclidean space E^{n+p} that belong to $(n+1)$ -dimensional plane / I. I. Bodrenko // Mathematical Notes. — 1994. — Vol. 54, № 4. — P. 992–994.

21. Bodrenko, I. I. On submanifolds with zero normal torsion in Euclidean space / I. I. Bodrenko // Siberian Mathematical Journal. — 1994. — Vol. 35, № 3. — P. 470–478.

22. Sánchez, C. U. The holomorphic 2-number of a Hermitian symmetric space / C. U. Sánchez // Geometriae Dedicata. — 1998. — Issue 1. — Vol. 72. — P. 69–81.

23. Sánchez, C. U. Geodesics and normal sections on real flag manifolds / C. U. Sánchez, A. M. Giunta, J. E. Tala // Revista de la Unión Matemática Argentina. — 2007. — Vol. 48, № 1. — P. 17–25.

REFERENCES

1. Bodrenko I.I. Vnutrennyaya geometriya vneshne rekurrentnykh podmnogoobraziy [Internal geometry of externally recurrent submanifolds]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2004, vol. 11, no. 2, pp. 301.

2. Bodrenko I.I. Kriteriy paralelnosti vtoroy fundamentalnoy formy [The criterion of parallelism of the second fundamental form]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 1999, vol. 6, no. 1, pp. 124–125.

3. Bodrenko I.I. Normalno ploskie psevdorekurrentnye podmnogoobraziya v evklidovykh prostranstvakh [Normally flat pseudo-recurrent submanifolds in Euclidean spaces]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2001, vol. 8, no. 2, pp. 540–541.

4. Bodrenko I.I. O giperpoverkhnostyakh s tsiklicheski rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy v evklidovom prostranstve [On hypersurfaces with cyclic recurrent second fundamental form in Euclidean space]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2010, issue 13, pp. 23–35.

5. Bodrenko I.I. O kelerovykh podmnogoobraziyakh s rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy [On Kaehler submanifolds with recurrent the second fundamental form]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2006, vol. 13, no. 4, pp. 617–618.

6. Bodrenko I.I. O podmnogoobraziyakh s nulevym normalnym krucheniem v evklidovom prostranstve [On submanifolds with zero normal torsion in Euclidean space]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1994, vol. 35, no. 3, pp. 527–536.

7. Bodrenko I.I. O podmnogoobraziyakh s tsiklicheski rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy v evklidovykh prostranstvakh [On submanifolds with cyclic recurrent the second fundamental form in Euclidean spaces]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2011, vol. 18, no. 5, pp. 746.

8. Bodrenko I.I. Ob odnom klasse psevdorekurrentnykh podmnogoobraziy [On pseudo-recurrent submanifolds]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2001, vol. 8, no. 1, pp. 109.

9. Bodrenko I.I. Ob n -mernykh poverkhnostyakh v evklidovom prostranstve E^{n+p} , prinallezhaschikh nekotoroy $(n + 1)$ -mernoy ploskosti [On n -dimensional surfaces in Euclidean space E^{n+p} that belong to $(n + 1)$ -dimensional plane]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1993, vol. 54, no. 4, pp. 19–23.
10. Bodrenko I.I. *Obobshchennye poverkhnosti Darbu v prostranstvakh postoyannoy krivizny* [Generalized Darboux surfaces in spaces of constant curvature]. Saarbrücken, Germany, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co Publ., 2013. 200 p.
11. Bodrenko I.I. Parallelnye polya normalnykh q -napravleniy na psevdorekurrentnykh podmnogoobraziyakh [Parallel fields of normal q -directions on pseudo-recurrent submanifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2002, issue 7, pp. 5–11.
12. Bodrenko I.I. Podmnogoobraziya s rekurrentnoy vtoroy fundamentalnoy formoy v prostranstvakh postoyannoy krivizny [Submanifolds with recurrent the second fundamental form in spaces of constant curvature]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2007, vol. 14, no. 4, pp. 679–682.
13. Bodrenko I.I. Stroenie psevdorekurrentnykh podmnogoobraziy v evklidovykh prostranstvakh [Structure of pseudo-recurrent submanifolds in Euclidean spaces]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [OP&PM Surveys in Applied and Industrial Mathematics], 2000, vol. 7, no. 2, pp. 318–319.
14. Bodrenko I.I. Kharakteristicheskiy priznak n -mernoy sfery v evklidovom prostranstve E^{n+p} [A characteristic feature of the n -dimensional sphere in the Euclidean space E^{n+p}]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik Mathematics], 1994, vol. 185, no. 11, pp. 23–30.
15. Fomenko V.T. Dvumernye poverkhnosti s ploskoy normalnoy svyaznostyu v prostranstve postoyannoy krivizny, nesuschie geodezicheskie postoyannoy krivizny [Two-dimensional surfaces with flat normal connections in spaces of constant curvature carrying geodesics of constant curvature]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2000, vol. 64, no. 4, pp. 579–586.
16. Fomenko V.T. Nekotorye svoystva dvumernykh poverkhnostey s nulevym normalnym krucheniem v E^4 [Some properties of two-dimensional surfaces with zero normal torsion in E^4]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik Mathematics], 1978, vol. 106 (148), no. 4 (8), pp. 589–603.
17. Fomenko V.T. Ob odnom obobshchenii poverkhnostey Darbu [A generalization of the Darboux surfaces]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1990, vol. 48, no. 2, pp. 107–113.
18. Bodrenko I.I. A characteristic feature of the n -dimensional sphere in the Euclidean space E^{n+p} . *Sbornik Mathematics*, 1995, vol. 83, no. 2, pp. 315–320.
19. Bodrenko I.I. On generalized Darboux surfaces in Euclidean spaces. *Deystviya torov: topologiya, geometriya, teoriya chisel* [Torus Actions: Topology, Geometry and Number Theory]. Khabarovsk, Pacific National University Publ., 2013, pp. 14–15.
20. Bodrenko I.I. On n -dimensional surfaces in Euclidean space E^{n+p} that belong to $(n + 1)$ -dimensional plane. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 54, no. 4, pp. 992–994.
21. Bodrenko I.I. On submanifolds with zero normal torsion in Euclidean space. *Siberian Mathematical Journal*, 1994, vol. 35, no. 3, pp. 470–478.
22. Sánchez C.U. The holomorphic 2-number of a Hermitian symmetric space. *Geometriae Dedicata*, 1998, issue 1, vol. 72, pp. 69–81.
23. Sánchez C.U., Giunta A.M., Tala J.E. Geodesics and normal sections on real flag manifolds. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 17–25.

**SOME PROPERTIES OF NORMAL SECTIONS AND GEODESICS
ON CYCLIC RECURRENT SUBMANIFOLDS**

Bodrenko Irina Ivanovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volograd State University
bodrenko@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volograd, Russian Federation

Abstract. Let F^n be n -dimensional ($n \geq 2$) submanifold in $(n + p)$ -dimensional Euclidean space E^{n+p} ($p \geq 1$). Let x be arbitrary point F^n , $T_x F^n$ be tangent space to F^n at the point x . Let $\gamma_g(x, t)$ be a geodesic on F^n passing through the point $x \in F^n$ in the direction $t \in T_x F^n$. Denote by $k_g(x, t)$ and $\varkappa_g(x, t)$ curvature and torsion of geodesic $\gamma_g(x, t) \subset E^{n+p}$, respectively, calculated for point x .

Torsion $\varkappa_g(x, t)$ of geodesic $\gamma_g(x, t)$ is called geodesic torsion of submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ at the point x in the direction t .

Let $\gamma_N(x, t)$ be a normal section of submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ at the point $x \in F^n$ in the direction $t \in T_x F^n$. Denote by $k_N(x, t)$ and $\varkappa_N(x, t)$ curvature and torsion of normal section $\gamma_N(x, t) \subset E^{n+p}$, respectively, calculated for point x .

Denote by b the second fundamental form of F^n , by $\bar{\nabla}$ the connection of van der Waerden – Bortolotti.

The fundamental form $b \neq 0$ is called cyclic recurrent if on F^n there exists 1-form μ such that

$$\bar{\nabla}_X b(Y, Z) = \mu(X)b(Y, Z) + \mu(Y)b(Z, X) + \mu(Z)b(X, Y)$$

for all vector fields X, Y, Z tangent to F^n .

Submanifold $F^n \subset E^{n+p}$ with cyclic recurrent the second fundamental form $b \neq 0$ is called cyclic recurrent submanifold.

The properties of normal sections $\gamma_N(x, t)$ and geodesics $\gamma_g(x, t)$ on cyclic recurrent submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$ are studied in this article. The conditions for which cyclic recurrent submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$ have zero geodesic torsion $\varkappa_g(x, t) \equiv 0$ at every point $x \in F^n$ in every direction $t \in T_x F^n$ are derived in this article.

Denote by \mathcal{R}_0 a set of submanifolds $F^n \subset E^{n+p}$, on which

$$k_g(x, t) \neq 0, \quad \varkappa_g(x, t) \equiv 0, \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

The following theorem is proved in this article.

Let F^n be a cyclic recurrent submanifold in E^{n+p} with no asymptotic directions. Then F^n belongs to the set \mathcal{R}_0 if and only if the following condition holds:

$$k_N(x, t) = k(x), \quad \forall x \in F^n, \quad \forall t \in T_x F^n.$$

Key words: the second fundamental form, cyclic recurrent submanifold, geodesic torsion, normal section, normal curvature, normal torsion, connection of van der Waerden – Bortolotti.