



УДК 517.954
ББК 22.161

О ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗРЕШИМОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ L -ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ¹

Корольков Сергей Алексеевич

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и теории функций
Волгоградского государственного университета
sergei.a.korolkov@gmail.com, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Применен подход к постановке краевых задач, основанный на введении понятия класса слабо эквивалентных функций. В работе получены достаточные условия разрешимости некоторых краевых задач в рассматриваемых областях.

Ключевые слова: краевые задачи, L -гармонические функции, римановы многообразия, решения стационарного уравнения Шредингера, эквивалентные функции.

Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно актуальным направлением в современной математике и лежит на стыке дифференциальной геометрии, математического анализа, теории случайных процессов. Важный класс проблем данного направления относится к получению теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств ограниченных решений некоторых эллиптических уравнений на многообразии. Достаточно подробно современное состояние исследований в данном вопросе изложено в [9].

С другой стороны, существует широкий класс некомпактных римановых многообразий, которые допускают существование нетривиальных ограниченных решений эллиптических дифференциальных уравнений. Так, например, в [8] и [13] рассматриваются односвязные римановы многообразия с отрицательной секционной кривизной, отделенной от нуля и бесконечности. Строя геометрическую компактификацию многообразия M путем добавления сферы $S(\infty)$ на бесконечности, авторы работ доказывают разрешимость задачи Дирихле на $\bar{M} = M \cup S(\infty)$ о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным на $S(\infty)$.

Заметим, что задачу Дирихле можно поставить на любом некомпактном римановом многообразии, на котором существует естественная компактификация. В частности, это можно сделать на сферически-симметричных многообразиях или на более общих классах модельных и квазимодельных многообразий. Точные результаты, касающиеся теорем типа Лиувилля и разрешимости задачи Дирихле на модельных и квазимодельных многообразиях были получены в работах [1; 4–6; 12].

С другой стороны, на произвольном некомпактном римановом многообразии постановка задачи Дирихле вызывает затруднения. Однако в [7] был предложен новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия класса эквивалентных функций и позволивший осуществлять постановку краевых задач на многообразиях, на которых отсутствует естественная геометрическая компактификация (см. также: [1; 2; 10; 11]).

Отметим, что все приведенные выше результаты относятся к случаю, когда гармонические функции рассматриваются на некомпактных римановых многообразиях *без края* (или когда край компактен). Естественным образом возникает вопрос о том, что же будет в случае, когда многообразие имеет некомпактный край, как в этом случае ставить краевые задачи, какие условия являются необходимыми и достаточными для разрешимости таких задач?

В данной работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \quad (1)$$

в неограниченных областях римановых многообразий с некомпактным краем. Здесь $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, причем $c(x) \not\equiv 0$. Всюду далее решения уравнения (1) будем называть L -гармоническими функциями. Целью работы является получение условий разрешимости краевых задач для L -гармонических функций в рассматриваемых областях.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть M — связное некомпактное гладкое риманово многообразие без края и Ω — односвязная неограниченная область в M с C^1 -гладким краем $\partial\Omega$. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — гладкое исчерпание M , то есть такая последовательность предкомпактных открытых подмножеств многообразия M с C^1 -гладкими краями ∂B_k , что $M = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, $\bar{B}_k \subset B_{k+1}$ для всех k . Всюду далее будем считать, что исчерпание выбрано таким образом, что $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, множества $B_k \cap \Omega$ односвязны, ∂B_k и $\partial\Omega$ трансверсальны для всех k . В работе рассматриваются L -гармонические (на M , на Ω) функции $u(x)$.

Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на M (на Ω , на $\partial\Omega$, соотв.) функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на M (на Ω , на $\partial\Omega$, соотв.)*, и использовать обозначение $f_1 \stackrel{M}{\sim} f_2$ ($f_1 \stackrel{\Omega}{\sim} f_2$, $f_1 \stackrel{\partial\Omega}{\sim} f_2$, соотв.), если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ многообразия M выполнено равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{M \setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\Omega \setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\partial\Omega \setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, соотв.). Отношение « \sim » является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания M (см.: [7; 11]).

Введем понятие L -потенциала многообразия M относительно некоторого компакта $B \subset M$ (с C^1 -границей ∂B). Не ограничивая общности, будем считать, что $B \subset B_k$ для всех k . Пусть $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность решений следующих задач Дирихле в

$B_k \setminus B$

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{на } B_k \setminus B, \\ v_k = 1, & \text{на } \partial B, \\ v_k = 0 & \text{на } \partial B_k. \end{cases}$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ в силу принципа максимума монотонно возрастает и сходится к предельной функции $v_{M \setminus B}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x)$, которая является L -гармонической на $M \setminus B$ и $0 \leq v_M(x) \leq 1$ на $M \setminus B$. Функция $v_{M \setminus B}(x)$ называется L -потенциалом многообразия M относительно компакта B (см. также [7]).

Следуя [7], многообразие M будем называть L -строгим, если L -потенциал многообразия M относительно некоторого компакта $B \subset M$ эквивалентен нулю. Отметим, что свойство L -строгости многообразия не зависит от выбора компакта B (см., например, [7]).

Определим L -потенциал неограниченной области Ω следующим образом. Обозначим $B'_k = B_k \setminus \Omega$. Пусть $v_{M \setminus B'_k}$ — L -потенциал многообразия M относительно B'_k . В силу принципа максимума, последовательность $\{v_{M \setminus B'_k}\}_{k=1}^\infty$ монотонно возрастает, ограничена, а значит, существует предельная функция v_Ω , которая является L -гармонической в Ω , $0 \leq v_\Omega \leq 1$, причем $v_\Omega|_{\partial\Omega} = 1$. Функцию v_Ω будем называть L -потенциалом множества Ω .

Введем понятие слабой эквивалентности функций. Пусть Υ — связное неограниченное подмножество M , v_Λ — L -потенциал некоторого множества Λ , причем для некоторого компакта $B \ \Upsilon \setminus B \subseteq \Lambda$. Пусть f_1 и f_2 — непрерывные на $\overline{\Upsilon}$ функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 слабо эквивалентны на $\Upsilon \setminus B$ относительно L -потенциала v_Λ , и использовать обозначение $f_1 \stackrel{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon \setminus B$, если для некоторой константы C

$$|f_1 - f_2| \leq C v_\Lambda \text{ на } \overline{(\Upsilon \setminus B)}.$$

Будем говорить, что непрерывная на Υ функция f принадлежит классу слабо допустимых на Υ функций относительно L -потенциала v_Λ и обозначать $f \in K_\Lambda^*(\Upsilon)$, если для некоторого компакта B найдется такая L -гармоническая на $\Upsilon \setminus B$ функция u , что

$$u \stackrel{\Lambda}{\simeq} f \text{ на } \Upsilon \setminus B.$$

Замечание. Пусть $\Upsilon \subseteq \Lambda$, f_1 и f_2 — непрерывные на $\overline{\Upsilon}$ функции, B — некоторый компакт. Тогда, если $f_1 \stackrel{\Lambda}{\simeq} f_2$ на $\Upsilon \setminus B$, то в силу принципа максимума $f_1 \stackrel{\Lambda}{\simeq} f_2$ на Υ .

С учетом замечания 3 в случае, когда $\Upsilon \subseteq \Lambda$ под записью $f_1 \stackrel{\Lambda}{\simeq} f_2$, всюду далее будем иметь в виду то, что $f_1 \stackrel{\Lambda}{\simeq} f_2$ на Υ .

Замечание. Если M — L -строгое многообразие и B — компакт, то из $f \stackrel{M \setminus B}{\simeq} 0$ следует, что $f \stackrel{M}{\simeq} 0$. Обратное, вообще говоря, неверно (для L -строгого многообразия M из условия $f \stackrel{M}{\simeq} 0$ в общем случае не следует, что $f \stackrel{M \setminus B}{\simeq} 0$ для некоторого компакта B).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть B — некоторый компакт и $u(x)$ — L -гармоническая на $\Omega \setminus B$ функция. Тогда найдется такая константа C и L -гармоническая на Ω функция f , что

$$|f - u| \leq C v_{M \setminus B} \text{ на } \Omega \setminus B.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение, в котором получено достаточное условие разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

Теорема 2. Пусть $f \in K_{\Omega}^*(\Omega)$. Тогда для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ такой, что $\varphi \stackrel{\Omega}{\simeq} f$ на $\partial\Omega$, существует решение следующей задачи в Ω

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \stackrel{\Omega}{\simeq} f. \end{cases}$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 полностью обобщают результат, полученный в [11] для случая, когда M является L -строгим и $\Omega = M$ (либо $\Omega = M \setminus B$ для некоторого компакта B). А именно, в случае, когда $\Omega = M$ и M является L -строгим как следствие теоремы 1, принимая во внимание замечание 3, получаем результат, доказанный ранее в [11] (теорема 1, импликация (iii) \Rightarrow (i)). В случае, когда M является L -строгим и $\Omega = M \setminus B$, где B — некоторый компакт, как следствие теоремы 2 получаем импликацию (iii) \Rightarrow (ii) теоремы 1 указанной работы. Обратные импликации очевидны.

Отметим, что в работе рассмотрен случай $c(x) \not\equiv 0$. В случае, когда $c(x) \equiv 0$, стационарное уравнение Шредингера превращается в уравнение Лапласа — Бельтрами. В случае рассмотрения L -гармонических функций появляются некоторые отличия по сравнению с гармоническими функциями (то есть решениями уравнения Лапласа — Бельтрами). Так, например, тривиальность пространства ограниченных гармонических функций на многообразии без края эквивалентна тривиальности пространства неотрицательных гармонических функций на таких многообразиях (см., например, [9]). Для L -гармонических функций данное свойство уже не выполняется (см., например, [10]). Результаты, касающиеся вопросов разрешимости некоторых краевых задач для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий и на конусах модельных многообразий можно найти, например, в [3].

1. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Если B — компакт, то $f_1 \stackrel{\Omega}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$ тогда и только тогда, когда $f_1 \stackrel{\Omega \setminus B}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$.

Доказательство. Пусть сначала $f_1 \stackrel{\Omega \setminus B}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$. В силу определения слабой эквивалентности, имеем $|f_1 - f_2| \leq C v_{\Omega \setminus B}$ для некоторой константы C .

В силу принципа максимума, $0 < d = \inf_{\partial B \cap \Omega} v_{\Omega} < 1$. Применяя в $\Omega \setminus B$ принцип сравнения для функций $\frac{v_{\Omega}}{d}$ и $v_{\Omega \setminus B}$, получаем, что $\frac{v_{\Omega}}{d} > v_{\Omega \setminus B}$. Из последнего заключаем, что $f_1 \stackrel{\Omega}{\simeq} f_2$ на $\Omega \setminus B$.

Доказательство в обратную сторону непосредственно следует из принципа максимума.

Лемма 2. Пусть B — некоторый компакт. Тогда $v_{M \setminus B} \stackrel{\Omega}{\simeq} 0$ на $\Omega \setminus B$.

Доказательство. Пусть сначала $\Omega \cap B = \emptyset$.

Пусть, как и ранее, $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — гладкое исчерпание M и $B'_k = B_k \setminus \Omega$. Тогда $B \subset B'_k$ начиная с некоторого k и в силу принципа максимума $v_{M \setminus B} < v_{M \setminus B'_k}$ в $M \setminus B'_k$ начиная с некоторого k . Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $v_{M \setminus B} < v_\Omega$ в Ω , откуда следует требуемое.

Пусть теперь $\Omega \cap B \neq \emptyset$. Заметим, что $v_{M \setminus B} \stackrel{\Omega \setminus B}{\simeq} 0$ на $\Omega \setminus B$ в силу только что доказанного. С учетом леммы 1 получаем требуемое.

Доказательство теоремы 1. Пусть $B' \subset B$, причем $dist(\partial B', \partial B) \neq 0$, $B' \cap \Omega \neq \emptyset$. Продолжим по непрерывности функцию u нулем всюду на $\Omega \cap B'$, причем так, что $|u| < \max_{\partial B \cap \Omega} |u|$ на $\partial \Omega \cap (B \setminus B')$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — гладкое исчерпание M , выбранное таким образом, что $\Omega \cap B_k \neq \emptyset$, $\partial \Omega$ и ∂B_k трансверсальны для всех k и $B \subset B_k$ для всех k .

Положим $\Omega(k) = \partial(B_k \cap \Omega)$, $\Omega(0) = \partial B \cap \Omega$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} L\varphi_k = 0 & \text{на } B_k \cap \Omega, \\ \varphi_k|_{\Omega(k)} = u|_{\Omega(k)}. \end{cases}$$

Докажем сначала, что последовательность φ_k равномерно ограничена на $\Omega(0)$.

Предположим противное. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{k_n\}$, что $a_{k_n} = \max_{\Omega(0)} |\varphi_{k_n}| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Полагаем $k_n = k$ и $\Phi_k = \varphi_k/a_k$ на $B_k \cap \Omega$. Тогда

$$\begin{cases} \Phi_k = u/a_k & \text{на } \partial(B_k \cap \Omega) \setminus B, \\ \Phi_k = 0 & \text{на } \partial \Omega \cap B', \\ \max_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1, \\ \Phi_k = u/a_k & \text{на } \partial \Omega \cap (B \setminus B'). \end{cases}$$

Применяя принцип максимума для функции $\Phi_k - \frac{u}{a_k}$ сначала на $(B_k \cap \Omega) \setminus B$, а затем на $B \cap \Omega$, получаем, что

$$-1 - \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} + \frac{u}{a_k} \leq \Phi_k \leq 1 + \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} + \frac{u}{a_k} \text{ на } B_k \cap \Omega. \quad (2)$$

Действительно, так как $\max_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1$, то $-1 \leq \Phi_k \leq 1$ на $\Omega(0)$. Из последнего следует, что

$$-1 - \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u}{a_k} \leq 1 + \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \text{ на } \Omega(0).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Phi_k - \frac{u}{a_k} = \frac{\varphi_k}{a_k} - \frac{u}{a_k} = \frac{u}{a_k} - \frac{u}{a_k} = 0 \text{ на } (\partial \Omega \setminus B) \cup (\partial B_k \cap \Omega),$$

закключаем, что

$$-1 - \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \leq \Phi_k - \frac{u}{a_k} \leq 1 + \frac{\max_{\Omega(0)} |u|}{a_k} \text{ на } (B_k \cap \Omega) \setminus B. \quad (3)$$

С другой стороны, $\Phi_k = u/a_k$ на $\partial\Omega \cap B$. Учитывая, что $a_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $|\Phi_k| < 1/2$ на $\partial\Omega \cap B$ при достаточно больших k . Принимая во внимание то, что $\max_{\Omega(0)} |\Phi_k| = 1$, в силу принципа максимума, получаем, что

$$-1 \leq \Phi_k \leq 1 \text{ на } B \cap \Omega \quad (4)$$

для достаточно больших k .

Объединяя оценки (3) и (4), получаем (2).

Из (2) следует, что $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ локально равномерно ограничена в Ω . Отсюда следует существование подпоследовательности последовательности $\{\Phi_k\}$, сходящейся равномерно к некоторой предельной функции Φ на любом компактном подмножестве Ω , причем $L\Phi = 0$ в Ω , $|\Phi|_{\partial\Omega \cap B} < 1/2$ и $-1 \leq \Phi \leq 1$ на Ω . Заметим также, что выбирая подходящим образом подпоследовательность последовательности $\{\Phi_k\}$, можно считать, что $\max_{\Omega(0)} |\Phi| = 1$. Пришли к противоречию с принципом максимума.

Таким образом, предположение о том, что $a_{k_n} = \max_{\Omega(0)} \varphi_{k_n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ неверно, откуда следует, что последовательность φ_k равномерно ограничена на $\Omega(0)$. Из последнего получаем локальную равномерную ограниченность последовательности $\{\varphi_k - u\}_{k=1}^\infty$ на Ω , откуда следует, что существует $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$, $Lf = 0$.

Как было показано выше, существует $\bar{a} = \sup_k \max_{\Omega(0)} |\varphi_k| < \infty$. С учетом принципа максимума и того, что $\varphi_k|_{\Omega(k)} = u|_{\Omega(k)}$, имеем

$$u - (\bar{a} + \max_{\Omega(0)} |u|)v_{M \setminus B} \leq \varphi_k \leq u + (\bar{a} + \max_{\Omega(0)} |u|)v_{M \setminus B} \text{ на } (B_k \cap \Omega) \setminus B.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем требуемое.

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Лемма 3. Пусть B — компакт и g — непрерывная L -гармоническая на $M \setminus B$ функция. Тогда для любой функции Φ , непрерывной на ∂B , существует решение следующей задачи в $M \setminus B$

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } M \setminus B, \\ u|_{\partial B} = \Phi, \\ u \underset{M \setminus B}{\simeq} g. \end{cases}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует существование такой константы C и L -гармонической на M функции w , что

$$|g - w| \leq Cv_{M \setminus B} \text{ на } M \setminus B.$$

Из последнего заключаем, что $w \underset{M \setminus B}{\simeq} g$ на $M \setminus B$.

Поступая в точности как и в [11] (при доказательстве импликации (i) \rightarrow (ii) теоремы 1), получаем существование в $M \setminus B$ такой L -гармонической функции u , что $u|_{\partial B} = \Phi$,

$$|u - w| \leq (\max_{\partial B} |\Phi| + 1)v_{M \setminus B},$$

откуда следует требуемое.

Полагая $g \equiv 0$ в условии леммы 3 и, соответственно, $w \equiv 0$ в доказательстве леммы 3, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть B — компакт. Тогда для любой функции Φ , непрерывной на ∂B , существует решение следующей задачи в $M \setminus B$

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } M \setminus B, \\ u|_{\partial B} = \Phi, \\ u \underset{M \setminus B}{\simeq} 0, \end{cases}$$

такое, что $|u| \leq (1 + \max_{\partial B} \Phi)v_{M \setminus B}$.

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала теорему 2 для случая $f \equiv 0$, то есть что для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ такой, что $\varphi \underset{\Omega}{\simeq} 0$ на $\partial\Omega$, существует L -гармоническая в Ω функция w такая, что $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ и $w \underset{\Omega}{\simeq} 0$.

Пусть \hat{f} — непрерывное ограниченное продолжение φ с $\partial\Omega$ на M . Пусть, как и ранее, $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — гладкое исчерпание M , $B'_k = B_k \setminus \Omega$.

В соответствии со следствием 1, в $M \setminus B'_k$ существует решение следующей задачи

$$\begin{cases} Lw_k = 0 \text{ в } M \setminus B'_k, \\ w_k|_{\partial B'_k} = \hat{f}|_{\partial B'_k}, \\ w_k \underset{M \setminus B'_k}{\simeq} 0, \end{cases}$$

причем такое, что

$$|w_k| \leq (1 + \max_{\partial B'_k} \hat{f})v_{M \setminus B'_k}. \tag{5}$$

Из (5) с учетом ограниченности функции \hat{f} следует равномерная ограниченность семейства функций $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ в Ω . Пусть $w(x)$ — предельная функция. Заметим, что $Lw = 0$, $w|_{\partial\Omega} = \varphi$ в силу того, что $w_k|_{\partial B'_k} = \hat{f}|_{\partial B'_k}$ и $\hat{f}|_{\partial\Omega} = \varphi$. Кроме этого, переходя в оценке (5) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$|w| \leq (1 + \max_{\partial\Omega} \hat{f})v_\Omega,$$

откуда следует, что $w \underset{\Omega}{\simeq} 0$.

Пусть теперь $f \in K_\Omega^*(\Omega) \neq 0$. Из последнего, в силу определения класса $K_\Omega^*(\Omega)$, следует существование такого компакта B и L -гармонической на $\Omega \setminus B$ функции g такой, что

$$|g - f| \leq Cv_\Omega \text{ на } \Omega \setminus B. \tag{6}$$

В силу теоремы 1 найдется такая константа C_1 и L -гармоническая на Ω функция v , что

$$|g - v| \leq C_1v_{M \setminus B} \text{ на } \Omega \setminus B. \tag{7}$$

Объединяя оценки (6), (7) и применяя лемму 2, получаем, что $v \underset{\Omega}{\simeq} f$ на $\Omega \setminus B$. С учетом замечания 3 и того, что $\varphi \underset{\Omega}{\simeq} f$ на $\partial\Omega$, заключаем, что $v \underset{\Omega}{\simeq} f$ и $v \underset{\Omega}{\simeq} \varphi$ на $\partial\Omega$.

По доказанному выше существует решение следующей задачи в Ω :

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ в } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} = \varphi - v|_{\partial\Omega}, \\ w \underset{\Omega}{\simeq} 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u \equiv w + v$ является искомой. Теорема 2 доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-97038-р_поволжье_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корольков, С. А. Гармонические функции на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 1319–1332.
2. Корольков, С. А. Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами / С. А. Корольков, А. Г. Лосев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2011. — № 14 (1). — С. 23–40.
3. Корольков, С. А. Краевые задачи для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий / С. А. Корольков, Е. С. Королькова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2013. — № 18 (1). — С. 45–58.
4. Лосев, А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида / А. Г. Лосев // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 12. — С. 15–24.
5. Лосев, А. Г. Об одном критерии гиперболичности некомпактных римановых многообразий специального вида / А. Г. Лосев // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 4. — С. 558–564.
6. Лосев, А. Г. Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях / А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 84–110.
7. Мазепа, Е. А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях / Е. А. Мазепа // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 591–599.
8. Anderson, M. T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature / M. T. Anderson // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 701–721.
9. Grigor'yan, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds / A. Grigor'yan // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36, № 2. — P. 135–249.
10. Korolkov, S. A. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends / S. A. Korolkov, A. G. Losev // Math. Z. — 2012. — Vol. 272, № 1–2. — P. 459–472.
11. Losev, A. G. Unbounded solutions of the Stationary Schrödinger equation on Riemannian manifolds / A. G. Losev, E. A. Mazepa, V. Y. Chebanenko // Computational Methods and Function Theory. — 2002. — Vol. 43, № 3. — P. 443–451.
12. Murata, M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds / M. Murata // Potential Theory. — 1992. — P. 251–259.
13. Sullivan, D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds / D. Sullivan // J. Diff. Geom. — 1983. — Vol. 18, № 4. — P. 723–732.

REFERENCES

1. Korolkov S.A. Garmonicheskie funktsii na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Harmonic functions on Riemannian manifolds with ends]. *Sib. mat. zhurn.* [Sib. Math. J.], 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1319–1332.
2. Korolkov S.A., Losev A.G. Resheniya ellipticheskikh uravneniy na rimanovykh mnogoobraziyakh s kontsami [Solutions of elliptic partial differential equations on Riemannian manifolds with ends]. *Vestnik Volgogradskogo gosudartvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics], 2011, no. 14 (1), pp. 23–40.
3. Korolkov S.A., Korolkova E.S. Kraevye zadachi dlya garmonicheskikh funktsiy v neogranichennykh oblastiakh rimanovykh mnogoobraziy [Boundary problems for harmonic functions on unbounded open sets of Riemannian manifolds]. *Vestnik Volgogradskogo gosudartvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of VolSU. Mathematics. Physics], 2013, no. 18 (1), pp. 45–58.
4. Losev A.G. Nekotorye liuvillevy teoremy na rimanovykh mnogoobraziyakh spetsialnogo vida [Some Liouville theorems on Riemannian manifolds of special type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1991, no. 12, pp. 15–24.
5. Losev A.G. Ob odnom kriterii giperbolichnosti nekompaktnykh rimanovykh mnogoobraziy spetsialnogo vida [On the hyperbolicity criterion for noncompact Riemannian manifolds of special type]. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 1996, vol. 59, no. 4, pp. 558–564.
6. Losev A.G., Mazepa E.A. Ogranichennye resheniya uravneniya Shredingera na rimanovykh proizvedeniyakh [Bounded solutions for Schrödinger equation on Riemannian products]. *Algebra i analiz* [St. Petersburg Mathematical Journal], 2001, vol. 13, no. 1, pp. 84–110.
7. Mazepa E.A. Kraevye zadachi dlya statsionarnogo uravneniya Shredingera na rimanovykh mnogoobraziyakh [Boundary value problems for the stationary Schrödinger equation on Riemannian manifolds]. *Sib. mat. zhurn.* [Sib. Math. J.], 2002, vol. 43, no. 3, pp. 591–599.
8. Anderson M.T. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 701–721.
9. Grigor'yan A. Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, no. 2, pp. 135–249.
10. Korolkov S.A., Losev A.G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends. *Math. Z.*, 2012, vol. 272, no. 1–2, pp. 459–472.
11. Losev A.G., Mazepa E.A., Chebanenko V.Y. Unbounded solutions of the Stationary Schrödinger equation on Riemannian manifolds. *Computational Methods and Function Theory*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 443–451.
12. Murata M. Positive harmonic functions on rotationary symmetric Riemannian manifolds. *Potential Theory*, 1992, pp. 251–259.
13. Sullivan D. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds. *J. Diff. Geom.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 723–732.

**ON INTERRELATION BETWEEN RESOLVABILITIES OF SOME
BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR L -HARMONIC FUNCTIONS
ON UNBOUNDED OPEN SUBSETS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS**

Korolkov Sergey Alekseevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Function Theory
Volgograd State University
sergei.a.korolkov@gmail.com, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. We study L -harmonic functions, i.e. solutions of the stationary Shrodinger equation

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0$$

on unbounded open set of Riemannian manifold and establish some existence results.

Let M be a smooth connected noncompact Riemannian manifold without boundary and Ω be a simply connected unbounded open set of M with C^1 -smooth boundary $\partial\Omega$. Let $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ be a smooth exhaustion of M , i.e. sequence of precompact open subsets of M with C^1 -smooth boundaries ∂B_k such that $M = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$ for all k . In what follows we assume $B_k \cap \Omega \neq \emptyset$, sets $B_k \cap \Omega$ are simply connected, ∂B_k and $\partial\Omega$ are transversal for all k .

Let $B'_k = B_k \setminus \Omega$ and $v_{M \setminus B'_k}$ be a L -potential of B'_k relative to M (see, for example, [10; 11]). By the maximum principle, the sequence $\{v_{M \setminus B'_k}\}_{k=1}^\infty$ is pointwise increasing and converges to an L -harmonic in Ω function $v_\Omega = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{M \setminus B'_k}$. It is easy to see that $0 \leq v_\Omega \leq 1$, $v_\Omega|_{\partial\Omega} = 1$. The function v_Ω is called the L -potential of the Ω .

Two continuous in Ω (in $\partial\Omega$, resp.) functions f_1 and f_2 are called *weak equivalent* in Ω (in $\partial\Omega$, resp.) *relative to v_Ω* ($f_1 \stackrel{\Omega}{\simeq} f_2$, $f_1 \stackrel{\partial\Omega}{\simeq} f_2$, resp.) if there exists some constant C , such that $|f_1 - f_2| \leq C v_\Omega$ in Ω ($|f_1 - f_2| \leq C v_\Omega$ in $\partial\Omega$, resp.).

A continuous function f in Ω is called *weak admissible* relative to Ω ($f \in K_\Omega^*(\Omega)$) if there is a compact B and L -harmonic function u in $\Omega \setminus B$ such that $u \stackrel{\Omega}{\simeq} f$ in $\Omega \setminus B$.

We have the following results.

Theorem 1. Let B be a compact, $v_{M \setminus B}$ be a L -potential of B relative to M and $u(x)$ be an L -harmonic in $\Omega \setminus B$ function. Then there exists a constant C and L -harmonic in Ω function f such that $|f - u| \leq C v_{M \setminus B}$ in $\Omega \setminus B$.

Theorem 2. Let $f \in K_\Omega^*(\Omega)$. Then for any continuous in $\partial\Omega$ function φ such that $\varphi \stackrel{\Omega}{\simeq} f$ in $\partial\Omega$, there exists solution of the following problem in Ω

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \stackrel{\Omega}{\simeq} f. \end{cases}$$

Key words: boundary problems, L -harmonic functions, Riemannian manifolds, solutions of the stationary Shrodinger equation, equivalent functions.