УДК 512.57
ББК 22.144

О РЕШЕТКАХ КОНГРУЭНЦИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УНАРНЫХ АЛГЕБР

Попов Владимир Валентинович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
Волгоградского государственного университета
popov_v_v@rambler.ru, kiem@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Получено описание всех однопорожденных коммутативных унарных алгебр с конечным числом унарных операций, решетка конгруэнций которых дистрибутивна, а любой элемент цикличен по каждой из операций.

Ключевые слова: унарная операция, коммутативная унарная алгебра, решетка конгруэнций, дистрибутивная решетка, циклический элемент.

В работе изучается решетка конгруэнций унарных алгебр, то есть алгебр, сигнатура которых содержит только унарные операции. Алгебры с m унарными операциями рассматривались А.И. Мальцевым [4, с. 348] и были названы m-уноидами. Унар — это алгебра с одной унарной операцией. В работах [2; 3; 7] изучались унары, решетки конгруэнций которых принадлежат заданному классу решеток (полумодулярны, атомарны, дистрибутивны и т. д.). Коммутативные уноиды изучались, например, в [6]. В [5] получено описание всех связных 2-уноидов с коммутирующими унарными операциями и дистрибутивной решеткой конгруэнций. В данной работе рассматриваются унарные алгебры с конечным числом попарно коммутирующих операций. Все необходимые определения имеются в [1; 4].

Пусть $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ — унарная алгебра. Она называется коммутативной, если для всех $i, j \leq m$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ истинно тождество

$$f_i(f_j(x)) = f_j(f_i(x)).$$

Положим

$$O(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{f_1^{i_1} f_2^{i_2} \ldots f_m^{i_m}(x) : i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \in \mathbf{N}_0\},$$

где $\mathbf{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел. Если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна и $\varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, то φ коммутирует с любой операцией f_i. При этом всякая конгруэнция θ на $\mathbf{A}$ стабильна относительно операции φ (то есть из $x, y \in A$ и $x\,\theta\,y$ вытекает $\varphi(x)\,\theta\,\varphi(y)$). Отсюда легко заключить, что решетки конгруэнций алгебр $\mathbf{A}$ и $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m, \varphi \rangle$ изоморфны. Элемент $x \in A$ называется φ-циклическим, если найдется целое число $n \geq 1$, для которого $\varphi^n(x) = x$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *— связная коммутативная унарная алгебра,* $m \geq 1$*. Пусть* $n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 1$ *— целые числа и при каждом* $i \leq m$ *на* $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *выполнено тождество* $f_i^{n_i}(x) = x$*. Тогда эквивалентны следующие условия:*
(1) Решетка конгруэнций $\operatorname{Con} A$ *дистрибутивна.*
(2) Найдутся целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 1$ *и такая унарная операция* h *на* $\mathbf{A}$*, что при каждом* $i = 1, 2, \ldots, m$ *на* $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ *выполнено тождество* $f_i(x) = h^{k_i}(x)$*.*

Доказательство. Случай $m = 1$ рассмотрен в работе Д.П. Егоровой [3]. Случай $m = 2$ изучался в работе [5, лемма 17, с. 35]. Поэтому в дальнейшем считаем, что теорема верна при $m \leq 2$.

Пусть $m > 2$ и выполнено свойство (1). Предположим, что теорема верна для всех коммутативных унарных алгебр, сигнатура которых состоит менее чем из m унарных операций. При любом $i = 1, 2, \ldots, m$ из справедливости на $\mathbf{A}$ тождества $f_i^{n_i}(x) = x$ следует, что операция f_i обратима на $\mathbf{A}$. Отсюда легко заключить, что любая операция $\varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ обратима на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}$ порождается любым своим элементом. Пусть a — порождающий элемент алгебры $\mathbf{A}$. Положим

$$S = \{\varphi(a) : \varphi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})\}.$$

Далее возможны два случая.

Случай 1. Найдется элемент $b \in S \cap f_m(S)$. Тогда $b = \varphi(a)$ и $b = f_m(\psi(a))$ для некоторых операций $\varphi, \psi \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})$. Поэтому $\varphi(a) = f_m(\psi(a))$, откуда $f_m(a) = \psi^{-1}\varphi(a)$, что влечет $f_m \in O(f_1, f_2, \ldots, f_{m-1})$, и потому решетки конгруэнций унарных алгебр $\mathbf{A}$ и $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$ изоморфны. Следовательно, заключение доказываемой теоремы вытекает из индуктивного предположения.

Случай 2. $S \cap f_m(S) = \emptyset$. Положим $S_0 = S$ и $S_i = f_m^i(S)$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Так как на $\mathbf{A}$ выполнено тождество $f_m^{n_m}(x) = x$, найдется целое $k \leq n_m$, для которого $S \cap S_k \neq$. Не теряя общности, считаем, что k — наименьшее положительное число с таким свойством. Ввиду обратимости на $\mathbf{A}$ операции f_m легко проверить, что множества $S_0 = S$, S_1, …, S_{k-1} попарно дизъюнктны и $S_k = S_0 = S$. Положим $T = S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{k-1}$. Ясно, что T — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$, порожденная элементом a. Так как $\mathbf{A}$ порождается любым своим элементом, получаем $T = A$.

Пусть θ — некоторая конгруэнция на алгебре $\mathbf{S} = \langle S, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$. Определим конгруэнцию $\widetilde{\theta}$ на алгебре $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m\rangle$ следующим образом:

(a) Если $x, x' \in S_0$, то $x\widetilde{\theta}x' \iff x\theta x'$.

(b) Если $x, x' \in S_i$, где $0 < i \leq k$, то $x\widetilde{\theta}x' \iff$ найдутся элементы $t, t' \in S$, для которых $t\theta t'$, $f_m^i(t) = x$ и $f_m^i(t') = x'$.

Нетрудно проверить, что ограничение конгруэнции $\widetilde{\theta}$ на множество $S_k = S_0$ совпадает с θ.

Допустим, что решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{S} = \langle S, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}\rangle$ не дистрибутивна. Тогда найдутся три конгруэнции σ, γ, δ на $\mathbf{S}$ и различные элементы $x, x' \in S$, такие, что $x\sigma x'$, существует γ, δ-путь Π из x в x', но не существует γ, δ-пути из x в x', все элементы которого лежат в одном σ-классе с элементами x и x' (см.: [5, лемма 1, с. 23]). Рассмотрим конгруэнции $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$ на алгебре $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ и те же элементы $x, x' \in S$. Ясно, что $x\widetilde{\sigma}x'$, Π является $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$-путем из x в x', но не существует $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$-пути из x в x', все элементы которого лежат в одном $\widetilde{\sigma}$-классе с элементами x и x'. Поэтому решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ не дистрибутивна. Противоречие с условием доказываемой теоремы показывает, что решетка $\mathrm{Con}\mathbf{S}$ дистрибутивна.

Так как сигнатура алгебры $\mathbf{S}$ содержит $m-1$ унарную операцию, по индуктивному предположению найдутся целые числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} \geq 1$ и такая унарная операция h_0 на $\mathbf{S}$, что при каждом $i = 1, 2, \ldots, m-1$ на $\mathbf{S}$ выполнено тождество $f_i(x) = h_0^{k_i}(x)$. Операцию h_0 на S можно продолжить до операции на A: если $x \in S_i$, где $0 < i \leq k$, то существует и единственен элемент $t \in S = S_0$, для которого $f_m^i(t) = x$. Полагаем $h_0(x) = f_m^i(h_0(t))$. Теперь ясно, что решетка конгруэнций алгебры $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ изоморфна решетке конгруэнций алгебры $\langle A, h_0, f_m \rangle$. Используя теперь доказываемую теорему для алгебры $\langle A, h_0, f_m \rangle$, фиксируем такую унарную операцию h на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$, что для некоторых целых $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ выполнены тождества $h_0(x) = h^{\alpha}(x)$ и $f_m(x) = h^{\beta}(x)$. Тогда h — искомая операция на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$, поскольку при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ на $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ выполнено тождество $f_i(x) = h_0^{k_i}(x) = h^{k_i \cdot \alpha}(x)$ и $f_m(x) = h^{\beta}(x)$.

Пусть теперь выполнено свойство (2). Тогда решетка конгруэнций алгебры $\mathbf{A}\rangle$ изоморфна решетке конгруэнций унара $\langle A, h \rangle$, а эта решетка дистрибутивна, поскольку унар $\langle A, h \rangle$ является циклом [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонов, В. А. Общая алгебра / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков. — М. : Наука, 1991. — Т. II. — 480 с.

2. Бощенко, А. П. Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Алгебраические системы : межвуз. сб. науч. работ. — Волгоград, 1989. — С. 23–26.

3. Егорова, Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки : Межвуз. науч. сб. — Саратов, 1978. — № 5. — С. 11–44.

4. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970. — 392 с.

5. Попов, В. В. О коллективной нормальности, о вращаемых графах и конгруэнциях уноидов / В. В. Попов. — Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 64 с.

6. Усольцев, В. Л. Минимальные унарные алгебры с двумя коммутирующими операциями : деп. в ВИНИТИ, № 3857-D96 / В. Л. Усольцев. — М., 1996. — 20 с.

7. Berman, J. On the congruence lattices of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36, № 1. — P. 34–38.

REFERENCES

1. Artamonov V.A., Saliy V.N., Skornyakov L.A. *Obschaya algebra* [General Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1991, vol. II. 480 p.

2. Boschenko A.P. Psevdodopolneniya v reshetke kongruentsiy unarov [Pseudocomplementation in the congruence lattice of a unary]. *Algebraicheskie sistemy : mezhvuz. sb. nauch. rabot* [Algebraic systems]. Volgograd, 1989, pp. 23–26.

3. Egorova D.P. Struktura kongruentsiy unarnoy algebry [Congruence structure of unary algebra]. *Uporyadochennye mnozhestva i reshetki : Mezhvuz. nauch. sb.* [Ordered sets and lattices]. Saratov, 1978, no. 5, pp. 11–44.

4. Maltsev A.I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 392 p.

5. Popov V.V. *O kollektivnoy normalnosti, o vraschaemykh grafakh i kongruentsiyakh unoidov* [On collective normality, rotatable graphs, and congruences of unoids]. Saarbrucken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 64 p.

6. Usoltsev V.L. *Minimalnye unarnye algebry s dvumya kommutiruyuschimi operatsiyami : dep. v VINITI, № 3857-D96* [Minimal unary algebras with two commuting operations : Deposit at All-Union Institute of Scientific and Technical Information, no. 3857-D96]. Moscow, 1996. 20 p.

7. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 34–38.

ON THE CONGRUENCE LATTICES OF PERIODIC UNARY ALGEBRAS

Popov Vladimir Valentinovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Computer Science and Experimental Mathematics
Volgograd State University
popov_v_v@rambler.ru, kiem@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The author describes all commutative unary algebras with finite number of unary operations which have distributive lattice of congruences and cyclic elements in every operation. It proves the following result:

Теорема 2. *Let* $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ *is a connected commutative unary algebra,* $m \geq 1$ *and* $n_1, n_2, \ldots, n_m \geq 1$ *— such a natural numbers, that* $f_i^{n_i}(x) = x$ *for every* $i \leq m$ *and every* $x \in A$*. Then the following condition are equivalent:*

(1) The lattice of congruence on $\mathbf{A}$ *has a distributive property.*

(2) One can find natural numbers $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 1$ *and such an unary operation* h *on* $\mathbf{A}$*, that for every* $i = 1, 2, \ldots, m$ *and every* $x \in A$ *it holds* $f_i(x) = h^{k_i}(x)$.

Key words: unary operation, commutative unary algebra, lattice of congruence, distributive property, cyclic element.