



УДК 519.2(073)
ББК 22.17я73

ОПЦИОННЫЙ КАЛЬКУЛЯТОР ДЛЯ РАСЧЕТА СТОИМОСТИ АЗИАТСКИХ ОПЦИОНОВ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ

Васильева Татьяна Анатольевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
tatiana_vas@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Зеленый Денис Дмитриевич

Магистрант кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
den_green@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. Популярность опционов, вторичных финансовых инструментов, растет, стимулируя развитие математических методов решения задач по определению их стоимости. В настоящее время на рынке ценных бумаг работает большое количество видов опционов: европейские, американские, барьерные, экзотические и т. д. Данная статья посвящена оцениванию азиатских опционов. Математической моделью рассматриваемой задачи является модель Блэка – Шоулза [6], представляющая собой параболическое уравнение в частных производных относительно стоимости азиатского опциона. Применение неявных разностных схем к решению поставленной задачи позволяет получить устойчивое численное решение для различных значений волатильности, безрисковой ставки и времени исполнения опциона [1–3; 9].

Ключевые слова: модель Блэка – Шоулза, опционы, азиатский опцион, экзотические опционы, финансовая математика, вторичные ценные бумаги, неявные разностные схемы, опционный калькулятор.

1. Краткие сведения об опционах

Опцион – это контракт на продажу или покупку ценных бумаг по *договорной цене* E , покупаемых до или в момент *срока исполнения опциона* T [4; 7]. Обозначим стоимость базового актива через S , текущий момент времени через t ($t \in [0; T]$), а функцию стоимости опциона через $V(S, t)$.

Существует два основных типа опционов – *call* и *put*. *Put*-опцион – это опцион, который дает право держателю опциона продать актив по фиксированной цене E в момент времени T . *Call*-опцион – это опцион, который дает право купить актив по фиксированной цене E в момент

времени T . После установленного договором срока, то есть по истечении времени T ($t > T$), опцион обесценивается, и выплата такого опциона становится равной нулю.

Помимо типов, опционы подразделяются по стилям: *европейские*, *американские* и *экзотические*. Европейский опцион может быть исполнен только в момент времени исполнения опциона T , американский опцион при $t \leq T$.

Азиатский опцион – это опцион, цена исполнения которого определяется как средняя цена опциона за весь период его исполнения. Цена этого опциона определяется «траекторией» ценовых значений базового актива.

Обычно азиатские опционы заключаются на товары, биржевые индексы, валюту и ставку процента. Такие опционы широко применяются на валютном рынке, на рынке металлов и энергоресурсов.

Для определения цены азиатского опциона на момент времени t необходимо знать среднее значение цен S , при $t \leq T$. В данной работе использовалась следующая формула для вычисления среднего значения цены азиатского опциона:

$$A_t = \int_0^t f(S_\theta, \theta) d\theta.$$

2. Метод Блэка – Шоулза

Метод был разработан в 1973 г. учеными Фишером Блэком и Майроном Шоулзом [1]. Согласно модели Блэка – Шоулза цена базового актива на момент времени t рассчитывается по уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (1)$$

Здесь σ – волатильность; r – безрисковая процентная ставка. В модели предполагается отсутствие транзакционных издержек и возможности арбитража.

Через A обозначим усредненное значение всех имеющихся цен базовых активов S к моменту времени t . Следовательно, функция выплаты V азиатского опциона зависит от трех параметров – A , S , t , и уравнение Блэка – Шоулза принимает вид [8]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \quad (2)$$

В отличие от стандартной версии уравнения Блэка – Шоулза, выражение (2) содержит новое слагаемое $f(S, T) = \frac{\partial V}{\partial A}$.

Таким образом, имеем следующую **постановку задачи**, которая состоит в численном решении уравнения (2) относительно $V(S, t, A)$ – стоимости азиатского опциона при следующих заданных параметрах: r – процентной ставки; σ – коэффициента волатильности; T – времени исполнения опциона, E – цены исполнения опциона в момент времени T .

Решения уравнения (2) определены на области $S > 0$, $A > 0$, $0 \leq t \leq T$ в трехмерном пространстве (S, A, t) .

Поиск решения в пространстве переменных S , t и A приводит к вычислительным трудностям, поэтому переформулируем задачу (2) с целью уменьшения пространства решений посредством введения вспомогательной переменной

$$R_t = \frac{1}{S_t} \int_0^t S_\theta d\theta \quad (3)$$

и дополнительной функции

$$V(S, A, t) = S \cdot H(R, t). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим следующий вид уравнения Блэка – Шоулза:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0. \quad (5)$$

Начальным условием является функция выплат, определяемая величинами E , T и R_T :

$$H(R_T, T) = (1 - \frac{1}{T} R_T)^+. \quad (6)$$

Уравнение (5) предполагает проход по времени от $t = T$ до $t = 0$. Для учета этого необходимо изменить знак производных по времени в (5) и в левом граничном условии. Перепишем уравнение (5), начальное условие (6) и граничные условия в виде

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \text{ при } R \rightarrow 0, \quad H(R, t) = 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$H(R_T, T) = (1 - \frac{R_T}{T})^+. \quad (9)$$

Таким образом, постановка данной задачи представлена уравнениями (7–9) относительно $H(R, t)$, которые решались неявной разностной схемой [5] относительно H_n^i

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} - \frac{(1 - rR_i)}{2h} \right) H_{i-1}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\tau} - \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} \right) H_i^{n+1} + \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 R_i^2}{h^2} + \frac{(1 - rR_i)}{2h} \right) H_{i+1}^{n+1} = -\frac{1}{\tau} H_i^n$$

с начальным условием (9) и граничными условиями при $i = 0$ и $i = N$

$$\frac{H_0^1 - H_0^0}{\tau} - \frac{H_1^0 - H_0^0}{h} = 0 \text{ при } i = 0,$$

$$\frac{H_N^1 - H_N^0}{\tau} - \frac{H_N^0 - H_{N-1}^0}{h} = 0 \text{ при } i = N.$$

После вычисления дискретных значений функции $H(R, t)$ цена азиатского опциона $V(S, t)$ рассчитывается по формуле (4).

3. Результаты численных расчетов

Для численного решения задачи был разработан алгоритм, реализованный в виде программы *Asia_option* на языке программирования C++. Данные расчетов для анализа полученных результатов сформированы в виде таблиц и графиков в формате электронных таблиц и диаграмм Excel.

Рассмотрим работу программы на примере азиатского *put*-опциона. Определим следующие значения входных параметров: $r = 0,05$; $\sigma = 0,25$; $E = 10$; $T = 1$. Для простоты наблюдений выберем небольшое количество разбиений по времени, то есть зададим $n = 10$.

На графике (рис. 1) представлена поверхность выплаты азиатского *put*-опциона при следующих значениях параметров $T = 1$; $r = 0,05$; $S_0 = 10$, $\sigma = 0,1$. Цена азиатского опциона в момент времени t находится в точке пересечения текущего значения цены актива S и полученной поверхности $V(S, t)$.

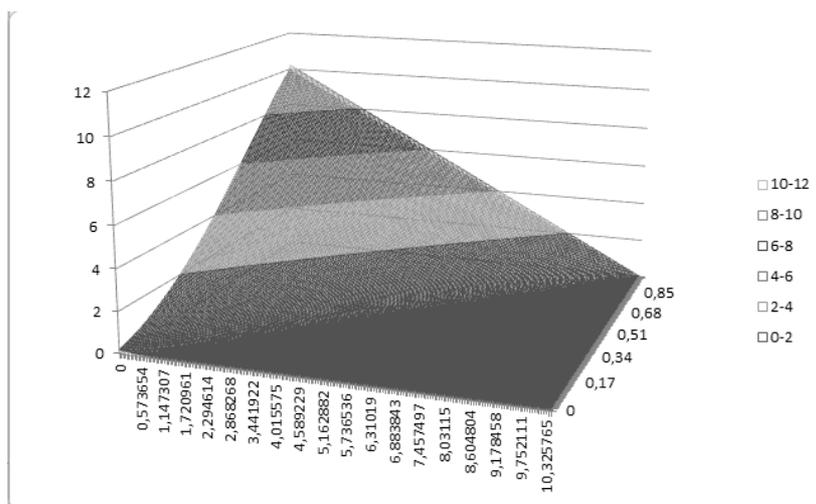


Рис. 1

Программа *Asia_option* представляет собой опционный калькулятор, предназначенный для вычисления стоимости азиатского опциона на основе разработанной методики численного решения уравнений Блэка – Шоулза. В меню программы (рис. 2) задаются входные данные для проведения численных расчетов: T – срок исполнения опциона; r – безрисковая процентная ставка, σ – волатильность; S_0 – начальная цена актива.

ВВЕДИТЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Период опциона : T

Процентная ставка : r

Волатильность : σ

Начальная стоимость активов : S_0

Рис. 2

Значение каждого параметра заносится в соответствующее поле ввода меню. С помощью компьютерной мыши выбирается поле ввода, в которое вносится необходимое значение параметра и нажимается клавиша *Tab*. После введения всех параметров необходимо нажать *Start* для начала обработки и вывода результатов расчетов на экран монитора.

Опционные калькуляторы широко используются при анализе биржевых сводок, позволяя предсказать поведение стоимости опционов при изменении различных параметров, таких как волатильность, процентная ставка, стоимость базовых активов, период исполнения опциона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева, Т. А. Application Mellin transforms to the Black – Scholes equations / Т. А. Васильева, О. Е. Васильева // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2009. – № 12. – С. 55–63.
2. Васильева, Т. Численные методы оценивания финансовых опционов / Т. Васильева // Математика. Экономика. Образование : сб. материалов XXI Междунар. конф. – Новороссийск, 2012. – С. 18–19.

3. Зеленый, Д. Д. Оценивание стоимости азиатских опционов неявной разностной схемой / Д. Д. Зеленый, Т. А. Васильева // Математическое моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : сб. материалов Междунар. молодеж. науч.-практ. конф., 5–8 нояб. 2013 г. – Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. – С. 67–72.
4. Саймон, В. Опционы. Полный курс для профессионалов / В. Саймон. – М. : Альпина Паблишер, 2003. – 416 с.
5. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, В. Я. Гулин. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
6. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Sholes // Journal of Political Economy. – 1973. – № 81 (May/June). – P. 637–659.
7. Desmond, J. H. An introduction to Financial Option valuation. Mathematics, Stochastic and Computation / J. H. Desmond. – Cambridge Univ. Press, 2005. – 291 p.
8. Seydel, R. Tools for Computational Finance / R. Seydel. – Berlin : Springer, 2009. – 357 p.
9. Vasilyeva, T. Numerical methods for evaluating financial options / T. Vasilyeva // Workshop on Stochastic and PDE methods in financial mathematics 7–12 Sept. – Yerevan, 2012. – P. 27–28.

REFERENCES

1. Vasilyeva T.A., Vasilyeva O.E. Application Mellin transforms to the Black – Scholes equations. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta, Seriya 1, Matematika, Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2009. no. 12, pp. 55-63.
2. Vasilyeva T. Chislennyye metody otsenivaniya finansovykh opsionov [The Quantitative Methods of Assessing the Financial Options]. *Matematika. Ekonomika. Obrazovanie: sb. materialov XXI Mezhdunar. konf.* [Mathematics. Economics. Education: Proceedings of 21st International Conference]. Novorossiysk, 2012, pp. 18-19.
3. Zelenyy D.D., Vasilyeva T.A. Otsenivanie stoimosti aziatskikh opsionov neyavnoy raznostnoy skhemoi [Estimation of Asian Options by the Implicit Differential Scheme]. *Matematicheskoe modelirovanie v ekonomike, strakhovanii i upravlenii riskami : sbornik materialov mezhd. molodozh. nauch.-prakt. konf., 5-8 noyab. 2013 g.* [Mathematical Modelling in Economics, Insurance and Risk Management: Proceedings of the International Youth Scientific and Practical Conference, November 5-8, 2013]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2013, pp. 67-72.
4. Saymon V. Opsiony. Polnyy kurs dlya professionalov [Options. Full-Time Course for Professionals]. Moscow, Alpina Publisher, 2003. 416 p.
5. Samarskiy A.A., Gulin V.Ya. Chislennyye metody [Numerical Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 432 p.
6. Black F., Sholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, no. 81 (May/June), pp. 637-659.
7. Desmond J.H. An introduction to Financial Option valuation. Mathematics, Stochastic and Computation. Cambridge Univ. Press, 2005. 291 p.
8. Seydel R. Tools for Computational Finance. Berlin, Springer, 2009. 357 p.
9. Vasilyeva T. Numerical methods for evaluating financial options. *Workshop on Stochastic and PDE methods in financial mathematics 7-12 Sept.*, Yerevan, 2012, pp. 27-28.

OPTION CALCULATOR FOR ASIA OPTIONS CALCULATION BY IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME

Vasilyeva Tatyana Anatolyevna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
tatiana_vas@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetskiy, 100, 400062, Volgograd, Russian Federation

Zelenyy Denis Dmitrievich

Master Student, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
 Volgograd State University
 den_green@mail.ru, fiou@volsu.ru
 Prosp. Universitetsky, 100, 400062, Volgograd, Russian Federation

Abstract. The popularity of options as secondary financial instruments is increasing and it stimulates the development of mathematical methods of their evaluation. Currently, the stock market has numerous types of options: European, American, barrier, Exotic, etc. This article focuses on evaluating the Asian option. The mathematical model of considered problem is represented by the Black – Scholes model [6], which is a parabolic partial differential equation in relation to the price of Asian option. The use of implicit difference schemes for solving the problem can produce a stable numerical solution for different values of volatility, risk – free rate and the time of option exercise [1–3; 9]. For numerical solution algorithm was developed, implemented as a program Asia_option programming language C++. These calculations for the analysis of the results are generated in the form of tables and graphs in spread sheet format and Excelcharts.

Consider the example of the program of Asian put option. Define the following input parameters: $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $E = 10$, $T = 1$. For simplicity, we choose a small time step and define $n = 10$. The graph (Figure 1) shows the surface of payments Asian put option for the following parameters $T = 1$, $r = 0.05$, $S_0 = 10$, $\sigma = 0.1$. Asian option price at time t is at the intersection of the current value of the asset price S and the resulting surface $V(S, t)$.

The program Asia_option is optional calculator, designed to calculate the value of Asian option based on the numerical solution of the Black-Scholes. In the program menu (Figure 2) are given by the input data for numerical calculations: T – expiry date of the option, r – the risk-free interest rate, σ – volatility, S_0 – initial price of the asset.

Value of each parameter is entered in the appropriate input box menu. Input field is selected by a computer mouse, which is entered in the necessary parameter key and press Tab. To begin the process necessary to press **Start** button and the results of calculations will be on the screen. Optional calculators are widely used in the analysis of the stock ticker, allow to predict the behavior of the value of options when changing various parameters such as volatility, interest rate, the price of the underlying assets, the period of the Strike.

Key words: Black-Scholes model, options, Asia option, Exotic options, financial mathematics, derivatives, implicit difference schemes, option calculator.