УДК 514.75
ББК 22.151

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

*А.И. Бодренко*

В работе изучаются свойства операторов эллиптического типа на гиперповерхностях в евклидовом пространстве.

***Ключевые слова:*** *деформация поверхности, средняя кривизна.*

## Введение

Пусть $E^{n+1}$ — $(n+1)$-мерное $(n>1)$ евклидово пространство. Для заданного числа $n$ рассмотрим евклидовы пространства $E^{n+1}$ и $E^n$. Введем в $E^{n+1}$ декартову прямоугольную систему координат $(y^1,...,y^{n+1})$, в $E^n$ — декартову прямоугольную систему координат $(x^1,...,x^n)$. Обозначим через $K_r$ открытый шар радиуса $r>0$ в $E^n$.

Пусть $\Phi$ — односвязная ориентируемая гиперповерхность с краем $\partial\Phi$ в $E^{n+1}$. Пусть

1) $h:\Phi\to K_r$ — гомеоморфизм $\Phi$ на $K_r$;

2) обратное отображение $h^{-1}(x)\equiv(f^1(x),...,f^{n+1}(x))$, где $x=(x^1,...,x^n)\in K_r$, удовлетворяет условию: $f^\alpha\in C^{3,s}(\overline{K_r})$, $s\in(0,1)$, $\alpha=\overline{1,n+1}$.

Тогда $\Phi$ можно задать системой уравнений

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,...,x^n),\quad (x^1,...,x^n)\in K_r,\quad \alpha=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

где $f^\alpha\in C^{3,s}(\overline{K_r})$.

Пусть $\Phi$ не имеет действительных асимптотических направлений, то есть все главные кривизны $\Phi$ имеют в каждой точке одинаковый знак. Не ограничивая общности, ориентируем $\Phi$ единичным вектором нормали так, чтобы средняя кривизна гиперповерхности $\Phi$ была положительной в каждой точке. Пусть все главные кривизны гиперповерхности $\Phi$ строго положительны на $\Phi$. Пусть $(n^\alpha)$ — координаты единичного вектора нормали гиперповерхности $\Phi$ в точке $(y^\alpha)\in\Phi, H=nh_1/2$, где $h_1$ — средняя кривизна гиперповерхности $\Phi$ в точке $(y^\alpha)$. Векторы $\{y^\alpha_{,i}\}_{i=1}^n$ образуют базис касательного пространства к $\Phi$ в точке $(y^\alpha)$, где символ «$,i$» означает ковариантную производную в метрике гиперповерхности $\Phi$. Пусть $g_{ij}=\delta_{\alpha\beta}y^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}$ — метрический тензор гиперповерхности $\Phi$, где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Пусть $g^{kl}$ — тензор, обратный к $g_{ij}$, $g=\det||g_{ij}||, b_{ij}$ — тензор второй квадратичной формы гиперповерхности $\Phi$. Так как все главные кривизны гиперповерхности $\Phi$ положительны, то вторая квадратичная форма $b_{ij}dx^idx^j$ гиперповерхности положительно определена, и следовательно, $\det||b_{ij}||>0$. Обозначим через $b^{*ij}$ — тензор, обратный к тензору $b_{ij}$: $b^{*ij}b_{ik}=\delta^j_k$ , где $\delta^j_k$ — символ Кронекера.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L$, записываемый в координатной форме на $\Phi$ в виде:

$$L = -\frac{1}{2H\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}b^{*ik}\partial_i) + 1. \qquad (2)$$

Сформулируем задачу А: Требуется найти на $\Phi$ решение $f$ класса $C^{2,s}(\Phi)$ уравнения

$$Lf = \mu f + \gamma,$$

при условии:

$$\frac{\partial f}{\partial N} \equiv b^{*ik}\partial_i(f)\cos(\bar{n}, x_k)_{|\partial\Phi} = \psi,$$

где $\mu$ — действительное число; $n^k \equiv \cos(\bar{n}, x^k)$ — координаты вектора внешней нормали к поверхности $\partial K_r$ в соответствующей точке; $\cos(\bar{n}, x_k)$ — направляющие косинусы вектора внешней конормали: $\cos(\bar{n}, x_k) = g_{ik}n^i$ к поверхности $\partial K_r$ в соответствующей точке; $\gamma \in C^{0,s}(\Phi)$, $\psi \in C^{1,s}(\partial\Phi)$. Не ограничивая общности, можем считать, что функция $\psi$ удовлетворяет условиям: $\psi \in C^{1,s}(\Phi)$ и $\psi \in C^{1,s}(\partial\Phi)$.

## 1. Исследование разрешимости краевой задачи (А)

**Теорема 1.** *Существует не более чем счетное множество действительных чисел $\mu_s$ $(s = 1, 2, ...) : 1 = \mu_1 < \mu_2 < ...$, не имеющее конечных предельных точек и такое, что задача (А) для $\mu \neq \mu_s (s = 1, 2, ...)$ имеет единственное решение $f$ класса $C^{2,s}(\Phi)$.*

***Доказательство теоремы 1.*** Докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Пусть функция $f$ является решением класса $C^{2,s}(\Phi)$ задачи А. Тогда имеет место неравенство*

$$|f|_{(\Phi)2,s} \leq M(|\gamma|_{(\Phi)0,s} + |\psi|_{(\partial\Phi)1,s}),$$

*где постоянная $M$ зависит от $s, n, \mu$, поверхности $\Phi$.*

***Доказательство леммы 1.*** Из [2] известно неравенство:

$$|f|_{K_\rho 2,s} \leq M_8(|\gamma|_{K_\rho 0,s} + \max_{K_\rho}|f| + |\psi|_{\partial K_\rho 1,s}).$$

Используя [1], получим доказательство леммы 1.

Рассмотрим на $\Phi$ пространство $L_2$, считая $f \in L_2$, если

$$\int_\Phi 2H(x)f(x)\overline{f(x)}d\sigma < \infty,$$

где $H(x) \geq M > 0, x \in \Phi$. Пространство $L_2$ является банаховым пространством с нормой:

$$||f||_{L_2} = (\int_\Phi 2H(x)f(x)\overline{f(x)}d\sigma)^{1/2}.$$

Превратим его в гильбертово, определив на нем скалярное произведение по формуле:

$$(f, q)_{L_2} = \int_\Phi 2H(x)f(x)\overline{q(x)}d\sigma, \forall f, q \in L_2.$$

Рассмотрим пространство $L_2^*$ — подпространство пространства $L_2$, плотным множеством в котором является множество бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty$, удовлетворяющих условию: $\frac{\partial f}{\partial N}_{|\partial\Phi} = 0$.

Будем рассматривать на $\Phi$ оператор $L$, определенный формулой (2). Отнесем к области определения $M_L$ оператора $L$ все функции $f \in C^2(\bar{\Phi})$ такие, что $Lf \in L_2$ и $\frac{\partial f}{\partial N}_{|\partial\Phi} = 0$.

Покажем, что оператор $L$ на $M_L$ является эрмитовым. Для этого следует убедиться, что $M_L$ плотно в $L_2^*$ и $(Lf, q) = (f, Lq), \forall f$ и $q \in M_L$.

Так как множество бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty$, удовлетворяющих условию: $\frac{\partial f}{\partial N}_{|\partial\Phi} = 0$, содержится в $M_L$, то по определению пространства $L_2^*$ следует, что $M_L$ плотно в $L_2^*$.

Подсчитаем разность

$$(Lf, q)_{L_2} - (f, Lq)_{L_2}, \forall f, q \in M_L.$$

Получим:

$$(Lf, q)_{L_2} - (f, Lq)_{L_2} = \int_U 2H(Lf\bar{q} - fL\bar{q})d\sigma =$$

$$= -\int_{h(U)} (\bar{q} \circ h^{-1}\partial_k(\sqrt{g}b^{*kl}\partial_l(f \circ h^{-1})) - f \circ h^{-1}\partial_k(\sqrt{g}b^{*kl}\partial_l(\bar{q} \circ h^{-1})))dx^1...dx^n =$$

$$= -\int_{h(U)} (\partial_k(\sqrt{g}b^{*kl}\partial_l(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1}) - f \circ h^{-1}\sqrt{g}b^{*kl}\partial_l(\bar{q} \circ h^{-1}))dx^1...dx^n +$$

$$+ \int_{h(U)} (\sqrt{g}b^{*kl}(\partial_l(f \circ h^{-1})\partial_l(\bar{q} \circ h^{-1})) - \partial_l(\bar{q} \circ h^{-1})\partial_k(f \circ h^{-1}))dx^1...dx^n.$$

Заметим, что имеет место равенство:

$$\int_{h(U)} (\sqrt{g}b^{*kl}(\partial_l(f \circ h^{-1})\partial_l(\bar{q} \circ h^{-1}) - \partial_l(\bar{q} \circ h^{-1})\partial_k(f \circ h^{-1})))dx^1...dx^n =$$

$$= \int_\Phi (\Phi^*(\partial f, \partial\bar{q}) - \Phi^*(\partial\bar{q}, \partial f))d\sigma,$$

где $\xi_i$ и $\zeta_j$ — одновалентные, отличные от нуля тензоры на $\Phi$, $\Phi^*(\xi, \zeta) = b^{*ij}\xi_i\zeta_j$. Так как гиперповерхность $\Phi$ имеет положительные главные кривизны и $\bar{\Phi}$ является компактом, то форма $\Phi^*$ является симметрической, положительно определенной билинейной формой: $\Phi^*(\xi, \zeta) = \Phi^*(\zeta, \xi), \forall \xi, \zeta, \Phi^*(\xi, \xi) > 0$ при $\xi \not\equiv 0$.

Введем в рассмотрение на $\Phi$ внешнюю $(n-1)$ форму $\omega$, положив

$$\omega = \sum_j (-1)^{j-1}\nu^j dx^1 \wedge ... \wedge \overset{\wedge}{dx^j} \wedge ... \wedge dx^n,$$

где $\nu^j = \sqrt{g}b^{*ij}((\partial_i f)\bar{q} - f(\partial_i\bar{q}))$.

Мы имеем

$$d\omega = \sum_j \partial_j\nu^j dx^1 \wedge ... \wedge dx^n,$$

и потому

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\Phi} \sum_j \partial_j \nu^j dx^1 \wedge ... \wedge dx^n =$$

$$= \int_{\Phi} (\partial_k(\sqrt{g} b^{*kl} \partial_l(f)\bar{q}) - f\sqrt{g} b^{*kl} \partial_l(\bar{q}))dx^1 \wedge ... \wedge dx^n =$$

$$= \int_{h(U)} (\partial_k(\sqrt{g} b^{*kl} \partial_l(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1} - f \circ h^{-1} \sqrt{g} b^{*kl} \partial_l(\bar{q} \circ h^{-1})))dx^1 ... dx^n =$$

$$= \int_{\partial h(U)} \sqrt{g} b^{*kl} (\partial_l(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1} - f \circ h^{-1} \partial_l(\bar{q} \circ h^{-1}))cos(n, x_k)dS = 0.$$

Следовательно, получим

$$(Lf, q)_{L_2} - (f, Lq)_{L_2} =$$

$$= \int_{\Phi} (\Phi^*(\partial f, \partial \bar{q}) - \Phi^*(\partial \bar{q}, \partial f))d\sigma - \int_{\Phi} d\omega = -\int_{\Phi} d\omega = 0.$$

Таким образом, оператор $L$ на $M_L$ является эрмитовым.

Покажем, что оператор $L$ является положительным. Для этого подсчитаем $(Lf, f)_{L_2}$ $\forall f \in M_L$. Имеем

$$(Lf, f)_{L_2} = \int_{\Phi} 2HLf\bar{f}d\sigma =$$

$$= \int_{\Phi} (\Phi^*(\partial f, \partial \bar{f}) + 2Hf\bar{f})d\sigma - \int_{\Phi} d\omega_1,$$

где

$$d\omega_1 = \partial_j(\sqrt{g} b^{*ij} \partial_i f\bar{f})dx^1 \wedge ... \wedge dx^n.$$

Так как $\int_{\partial\Phi} \omega_1 = 0$, то $(Lf, f)_{L_2} \geq 0$.

Это означает, что оператор $L$ является положительным на области определения $M_L$. Известно, что эрмитов положительный оператор имеет не более чем счетное множество неотрицательных собственных чисел, не имеющее предельных точек на конечном расстоянии. Каждое собственное число оператора $L$ действительно и имеет конечную кратность. Покажем, что это множество бесконечно, и наименьшее собственное число есть 1.

Исследуем разрешимость задачи A.

Рассмотрим на $\Phi$ пространство функций $W_2^1$, элементы которого вместе со своими производными первого порядка принадлежат классу $L_2$. Класс $W_2^1$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, q)_{W_2^1} = \int_{\Phi} (\Phi^*(\partial f, \partial \bar{q}) + 2Hf\bar{q})d\sigma.$$

**Определение 1.** *Для любой функции $u \in W_2^1(K_r)$ ее представителем называется функция*

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho \to 0} \text{mes}^{-1}(K_{\rho(x)} \cap K_r) \int_{K_{\rho(x)} \cap K_r} u(y)dy, \forall x \in \overline{K}_r.$$

Известны следующие свойства представителей:

1) $\tilde{u}(x)$ определен для почти всех $x \in \overline{K}_r$;

2) $\tilde{u}(x) - u(x)$ равен нулю почти всюду в $K_r$;

3) производная функции $\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x^i}$ существует почти всюду и совпадает почти всюду с обобщенной производной $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ так, что $\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i} \in L_2(K_r)$;

4) в строго липшицевых областях представитель $\tilde{u}(x)$ функции $u \in W_2^1(K_r)$ однозначно доопределяется по непрерывности для почти всех точек границы области: $\tilde{u}(x) \in L_2(\partial K_r)$ и имеет место оценка:

$$||\tilde{u}||_{\partial K_r, L_2} \leq M_9 ||u||_{K_r, W_2^1}.$$

**Определение 2.** *Функция $f$ называется обобщенным решением задачи (A), если для любой $q \in W_2^1$ выполнено равенство*

$$\int_\Phi \Phi^*(\partial f, \partial \bar{q}) + 2Hf\bar{q}d\sigma = \mu \int_\Phi (2Hf\bar{q} + 2H\gamma\bar{q})d\sigma + \int_{\partial\Phi} -\psi\bar{\bar{q}}dS. \qquad (3)$$

Покажем, что данное нами определение обобщенного решения действительно является расширением классического понятия решения задачи A. Для этого рассмотрим выражение

$$\int_\Phi 2H(Lf\bar{q} - \mu f\bar{q} - \gamma\bar{q})d\sigma =$$

$$= \int_\Phi 2H(-\frac{1}{2H\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f)) + f - \mu f - \gamma)\bar{q}d\sigma =$$

$$= \int_\Phi -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f))\bar{q}d\sigma + (1-\mu)(f,q)_{L_2} - (\gamma, q)_{L_2} =$$

$$= \int_\Phi -\partial_k(\sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1})dx^1...dx^n + (1-\mu)(f,q)_{L_2} - (\gamma, q)_{L_2} =$$

$$= \int_\Phi (-\partial_k(\sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1}) + \sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f \circ h^{-1})\partial_k(\bar{q} \circ h^{-1}))dx^1...dx^n +$$

$$+ (1-\mu)(f,q)_{L_2} - (\gamma, q)_{L_2} =$$

$$= \int_\Phi \Phi^*(\partial f, \partial\bar{q})d\sigma - \int_{\partial h(U)} \sqrt{g}b^{*ik}\partial_i(f \circ h^{-1})\bar{q} \circ h^{-1} cos(n, x_k)dS +$$

$$+ (1-\mu)(f,q)_{L_2} - (\gamma, q)_{L_2}.$$

Действительно, если бы все входящие в уравнение (3) функции были достаточно гладкими, то мы пришли бы к тождеству

$$\int_\Phi 2H(Lf\bar{q} - \mu f\bar{q} - \gamma\bar{q})d\sigma + \int_{\partial\Phi}(\frac{\partial f}{\partial N} - \psi)\bar{\bar{q}}dS = 0.$$

Уравнение (3) можно переписать в виде

$$(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2} + (\gamma, q)_{L_2} + \int_{\partial\Phi} -\psi\bar{\bar{q}}dS.$$

Заметим, что уравнение

$$(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2} + (\gamma,q)_{L_2}$$

соответствует задаче $A_0$: $Lf = \mu f + \gamma$ на $\Phi$, $\frac{\partial f}{\partial N}_{|\partial\Phi} = 0$.
Исследуем сначала ее разрешимость.

**Определение 3.** *Функция $f \in W_2^1, f \not\equiv 0$ называется обобщенной собственной функцией оператора $L$, если существует число $\mu$ такое, что функция $f$ при всех $q \in W_2^1$ удовлетворяет равенству $(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2}$. Число $\mu$ называется собственным значением, соответствующим обобщенной собственной функции $f$. Будем считать, что $||f||_{L_2} = 1$.*

Покажем, что существует линейный ограниченный оператор $A$ из $L_2$ в $W_2^1$ с областью определения $L_2$, для которого $\forall q \in W_2^1$ имеет место равенство: $(f,q)_{L_2} = (Af,q)_{W_2^1}$. При этом оператор $A$ имеет обратный $A^{-1}$, и оператор $A$, если его рассматривать из $W_2^1$ в $W_2^1$, является самосопряженным положительным и вполне непрерывным. Для доказательства этого утверждения рассмотрим линейный функционал из $W_2^1$, задаваемый формулой: $l(q) = (f,q)_{L_2}$, где $f$ — фиксированная функция из $L_2$, $\forall q \in W_2^1$.

Так как

$$|l(q)| \le M||f||_{L_2}||q||_{W_2^1},$$

то этот функционал ограничен. Поэтому, по теореме Рисса, существует единственная функция $U \in W_2^1$ такая, что $l(q) = (U,q)_{W_2^1}$, $\forall q \in W_2^1$, при этом $||U||_{W_2^1} = ||l|| \le \le M||f||_{L_2}$. Это означает, что на $L_2$ задан линейный оператор $Af = U$, для которого имеет место равенство: $(f,q)_{L_2} = (Af,q)_{W_2^1}$.

Так как

$$||Af||_{W_2^1} = ||U||_{W_2^1} \le M||f||_{L_2},$$

то оператор $A$ из $L_2$ в $W_2^1$ ограничен. Пусть при некотором $f \in L_2$ имеем $Af \equiv 0$. Тогда $U \equiv 0$ и $(f,q)_{L_2} = 0, \forall q \in W_2^1$. Отсюда следует, что $f \equiv 0$, то есть уравнение $Af = 0$ имеет только нулевое решение, и потому существует оператор $A^{-1}$.

Так как

$$(Af,q)_{W_2^1} = (f,q)_{L_2} = \overline{(q,f)_{L_2}} = \overline{(Aq,f)_{W_2^1}} = (f,Aq)_{W_2^1},$$

то оператор $A$ является самосопряженным. Кроме того, оператор $A$ положительный, так как $(Af,f)_{W_2^1} = (f,f)_{L_2} \ge 0$, где равенство нулю возможно только при $f \equiv 0$.

Покажем, что оператор $A$ из $W_2^1$ в $W_2^1$ является вполне непрерывным. Для этого возьмем произвольное ограниченное множество функций в $W_2^1$. Это множество компактно в $L_2$, то есть из любого его бесконечного подмножества в $L_2$ можно выбрать фундаментальную последовательность $f_s, s = 1,2,\ldots$. Так как оператор $A$ из $L_2$ в $W_2^1$ ограничен, то он непрерывен, и потому функции $Af_s, s = 1,2,\ldots$ образуют фундаментальную последовательность в $W_2^1$. Это означает, что оператор $A$ вполне непрерывен из $W_2^1$ в $W_2^1$.

Перепишем уравнение $(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2}$ в виде: $(f,q)_{W_2^1} = \mu(Af,q)_{W_2^1}$, что эквивалентно операторному уравнению в пространстве $W_2^1$: $\mu Af = f, f \in W_2^1$. Таким образом, число $\mu$ является собственным значением оператора $L$, и $f$ — соответствующей ему обобщенной собственной функцией тогда и только тогда, когда $1/\mu$ есть характеристическое число оператора $A$ из $W_2^1$ в $W_2^1$ и $f$ — соответствующий ему собственный элемент. Так как оператор $A$ является самосопряженным положительным вполне непрерывным, то существует не более чем счетное множество характеристических чисел $\{\mu\}$ уравнения $(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2}$ в пространстве $W_2^1$. Это множество не имеет конечных предельных точек, все собственные значения вещественны, каждому собственному значению соответствует конечное число взаимно ортогональных в $W_2^1$ собственных функций; собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны в $W_2^1$.

Пусть $\mu_s(s = 1, 2, ...)$ — последовательность, содержащая все характеристические числа оператора $L$ и $f_s(s = 1, 2, ...)$ — система взаимно ортогональных в $W_2^1$ собственных функций таких, что $||f_s||_{L_2} = 1$ и

$$\mu_s A f_s = f_s, s = 1, 2, ... \tag{4}$$

Умножим (4) скалярно в $W_2^1$ на $f_s$, получим:

$$(f_s, f_s)_{W_2^1} = \mu_s(Af_s, f_s)_{W_2^1} = \mu_s(f_s, f_s)_{L_2}.$$

Это соотношение можно переписать в виде:

$$\int_\Phi (\Phi^*(\partial f_s, \partial \bar{f}_s) + 2Hf_s\bar{f}_s - 2\mu_s Hf_s\bar{f}_s)d\sigma = 0.$$

Из полученного равенства следует, что $\mu_s \geq 1, s = 1, 2, ....$ Если $\mu_1 = 1$, то $f_1 = \text{const} = 1/(\int_\Phi 2Hd\sigma)$ на $\Phi$. Это означает, что $\mu_1 = 1$ является первым характеристическим числом кратности один. Из соотношения (4) вытекает, что система функций $f_1/\sqrt{\mu_1}, f_2/\sqrt{\mu_2}, ...$ является ортонормированной в $W_2^1$ системой, и потому она является ортонормированным базисом в $W_2^1$.

Так как пространство функций $W_2^1$ бесконечномерно, то множество $f_s, s = 1, 2, ...$ является бесконечным. Поэтому $\mu_s \to \infty$ при $s \to \infty$.

Согласно теоремам Фредгольма, уравнение $\mu Af = f + A\gamma$ однозначно разрешимо $\forall\gamma \in L_2$, если $\mu \neq \mu_s(s = 1, 2, ...)$.

Рассмотрим уравнение

$$(f,q)_{W_2^1} = \mu(f,q)_{L_2} + (\gamma, q)_{L_2} + \int_{\partial\Phi} -\psi\bar{\bar{q}}dS. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(q) = \int_{\partial\Phi} -\psi\bar{\bar{q}}dS$$

при фиксированной функции $\psi$. Покажем, что $I(q)$ определяет линейный функционал в пространстве $W_2^1$.

Так как функция $\psi \in L_2(\partial\Phi)$, то выполнена оценка:

$$|I(q)| = |\int_{\partial\Phi} \psi\bar{\bar{q}}dS| \leq M(\psi)||q||_{W_2^1}.$$

В силу теоремы Рисса о линейных функционалах, функционал $I(q)$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде: $I(q) = (B\psi, q)_{W_2^1}$, где $B\psi$ — элемент из $W_2^1$, $\psi$ — функция класса $W_2^1$.

Это равенство определяет оператор $B$ на любом элементе из $W_2^1$. Он является ограниченным, так как

$$||B\psi||^2_{W_2^1} = (B\psi, B\psi)_{W_2^1} = I(B\psi) \leq M||\psi||_{W_2^1}||B\psi||_{W_2^1}.$$

Откуда

$$||B\psi||_{W_2^1} \leq M||\psi||_{W_2^1}.$$

Тогда уравнение (5) примет вид: $f = \mu Af + A\gamma + B\psi$ в $W_2^1$. Оно однозначно разрешимо, если $\mu \neq \mu_s,\ s = 1, 2, ...,\ \forall\gamma \in L_2,\ \forall\psi \in W_2^1$. Это означает, что задача (A) для $\mu \neq \mu_s,\ s = 1, 2, \ldots$ имеет единственное решение класса $W_2^1$. Так как $H, b^{*ij} \in C^{0,s}(\Phi),\ \gamma \in C^{0,s}(\Phi),\ \psi \in C^{1,s}(\partial\Phi)$, то решение $f$, согласно теореме о регулярности решений эллиптических уравнений, является функцией класса $C^{2,s}(\Phi)$([2]).

Теорема 1 доказана.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Бодренко, А. И. Аналог неравенства Шаудера для замкнутых поверхностей в евклидовых пространствах / А. И. Бодренко // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — Вып. 11. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007—2008. — С. 6–12.

2. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 578 с.

## SOME PROPERTIES OF ELLIPTIC OPERATORS

*A.I. Bodrenko*

The properties of the elliptic operators on hypersurfaces in Euclidean spaces are studied in this article.

***Key words:*** *deformation of surface, mean curvature.*