УДК 519.6
ББК 22.176

О ДЫРАХ И АНТИДЫРАХ ВО ВРАЩАЕМЫХ ГРАФАХ

В.В. Попов

Доказано, что если G — непустой и неполный вращаемый граф, количество вершин которого является простым числом, то G содержит дыру или антидыру длины не меньшей 5.

Ключевые слова: *вращаемый граф, цикл, дыра, антидыра, гипотеза Бержа.*

Известная гипотеза Бержа утверждает, что всякий несовершенный граф содержит порожденный подграф, являющийся дырой или антидырой нечетной длины ≥ 5 [6], [7] (см. также [3, с. 272]). Для некоторых классов графов эта гипотеза доказана (расцепленные и бирасцепленные графы, клетчатые графы и др. [1], [2]). Однако неизвестно — справедлива ли она в классе вращаемых графов (ВГ). Вращаемые графы интересны, в частности, по той причине, что наличие на них естественной алгебраической структуры позволяет строить различного рода контрпримеры в теории графов (см., например, [5]). В работе усиливаются полученные ранее результаты автора [4].

В заметке рассматриваются только неориентированные графы без кратных ребер и без петель. *Маршрут* в таком графе — это последовательность его вершин, в которой любые две соседние соединены ребром. *Цикл* — это маршрут, в котором первая вершина совпадает с последней. Если нет других совпадающих вершин, то цикл называется простым. *Хорда* в цикле — это ребро, соединяющее две несоседние вершины. *Дырой* в графе называется простой цикл без хорд; длина дыры — это число ее различных вершин (ребер). *Антидыра* — это порожденный подграф, являющийся дырой в дополнительном графе; длиной антидыры называется число ее различных вершин (но не ребер).

Через N обозначаем множество $\{1, 2, 3, ...\}$ натуральных чисел; Z — кольцо целых чисел. Для $n \in N$ Z_n — кольцо вычетов по модулю n. Множество $D \subset Z_n$ *симметрично*, если $x \in D \iff -x \in D \iff n - x \in D$. Для симметричного D, не содержащего нуля, *вращаемый граф* $(D)_n$ — это граф с множеством вершин Z_n, в котором вершины x и y соединены ребром в том и только том случае, когда $x - y \in D$.

Для $D \subset Z_n \setminus \{0\}$ через D' обозначаем множество $Z_n \setminus (D \cup \{0\})$. Ясно, что графы $(D)_n$ и $(D')_n$ являются взаимно дополнительными. Множество D' симметрично (при симметричном D), дизъюнктно с D и не содержит нуля.

Элемент x кольца Z_n — это класс всех натуральных чисел, дающих при делении на n один и тот же остаток $r_x \in N$, $0 \leq r_x < n$. Для $a, b \in Z_n$ будем писать $a < b$ и $a \vdots b$, если $r_a < r_b$ и, соответственно, $r_a \vdots r_b$ (ясно, что отношение «<» не согласовано с операциями сложения и умножения в Z_n). Очевидным образом интерпретируются фразы

«$a \in Z_n$ — наименьший элемент множества $B \subset Z_n$», «$a \in Z_n$ — простое число» (последнее, например, означает, что натуральное число r_a является простым). Если $A \subset Z_n$ и $\lambda \in Z_n$, то λA — это множество $\{\lambda x : x \in A\}$. Через $|A|$ обозначаем число элементов множества A.

Теорема 1. *Если $n \geq 5$ — простое число, то всякий вращаемый граф с n вершинами, не являющийся пустым или полным, содержит дыру или антидыру (четной или нечетной) длины ≥ 5.*

Для доказательства потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех таких графов, которые удовлетворяют условию теоремы и в которых всякая дыра и всякая антидыра имеет длину < 5. Наша цель — показать, что класс $\mathcal{L}$ пуст.

Лемма 1. *Пусть $a, b, c \in D$, $a+b, b+c, c+a \in D'$ и $a+b+c \in D'$. Тогда граф $(D)_n$ содержит дыру длины ≥ 5 (и потому $(D)_n \notin \mathcal{L}$).*

Доказательство. Определим вершины v_i графа $(D)_n$ следующим образом: $v_0 = 0 \in Z_n$ и $v_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} x_j$, где $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, а $x_{3t} = a$, $x_{3t+1} = b$ и $x_{3t+2} = c$ при $t = 0, 1, 2, \cdots$. Ясно, что $P = v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ — маршрут в графе $(D)_n$. Так как число вершин, через которые он проходит, больше числа вершин графа $(D)_n$, среди вершин v_i найдутся совпадающие. Поэтому можно выбрать такие i и j, что $i < j$ и вершины v_i, v_j или совпадают или соединены ребром в $(D)_n$. Среди всех таких пар i, j найдем пару i_0, j_0, для которой разность $(j - i)$ минимальна. Из условия леммы вытекает, что $j_0 - i_0 > 4$. Нетрудно убедиться, что вершины v_{i_0}, v_{i_0+1}, $\cdots$, v_{j_0-1}, v_{j_0} определяют дыру в графе $(D)_n$ и длина ее ≥ 5. Лемма доказана.

Рассуждая аналогичным образом и рассматривая суммы $v_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} x_j$, где $x_{2t} = a$ и $x_{2t+1} = b$ при $t = 0, 1, 2, \cdots$, получим:

Лемма 2. *Пусть $a, b \in D$ и $a+b, 2a+b, a+2b \in D'$. Тогда $(D)_n$ содержит дыру длины ≥ 5 (и потому $(D)_n \notin \mathcal{L}$).*

Заменяя в лемме 2 D на D' и учитывая, что дыры в графе $(D)_n$ — это в точности антидыры в дополнительном графе $(D')_n$, мы получим:

Следствие 1. *Пусть $a, b \in D'$ и $a+b, 2a+b, a+2b \in D$. Тогда $(D)_n \notin \mathcal{L}$.*

Из следствия 1 (при $a = x + 2d$ и $b = -x - d$) вытекает следствие 2.

Следствие 2. *Пусть $x, d, x+3d \in D$ и $x+d, x+2d \in D'$. Тогда $(D)_n \notin \mathcal{L}$.*

Нижеприведенную лемму любезно сообщили автору В.А. Гурвич и Е. Борос (E. Boros).

Лемма 3. *Пусть $\lambda \in Z_n$, $\lambda \neq 0$ и число n просто. Тогда отображение $\varphi : (D)_n \to (\lambda D)_n$ графа $(D)_n$ на граф $(\lambda D)_n$, определенное формулой $\varphi(x) = \lambda x$, является графовым изоморфизмом (здесь $\lambda D = \{\lambda x : x \in D\}$).*

Следствие 3. *Пусть $(D)_n$ — непустой и неполный вращаемый граф, где n — простое число. Тогда: (a) граф $(D)_n$ изоморфен такому графу $(D_1)_n$, что $1 \in D_1$ и $|D| = |D_1|$; (b) если $a, b \in D$, $a \in D$ и $ab \in D'$, то граф $(D)_n$ изоморфен такому графу $(D_1)_n$, что $1 \in D_1$ и $b \notin D_1$.*

При проверке следует использовать отображение φ леммы 3 при $\lambda = a^{-1}$ (в случае (a) в качестве a выбираем произвольный элемент множества D). Напомним, что при простом n кольцо вычетов Z_n будет полем.

Лемма 4. *Пусть $(D)_n \in \mathcal{L}$, $1 \in D$, $2 \notin D$ и n — простое число. Тогда:*

(a) $|D| > k$, где $k = \frac{n-1}{2}$;

(b) множество D' представимо в виде объединения смежных классов мультипликативной группы поля Z_n по подгруппе $H = \{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots\}$, состоящей из всех степеней элемента 2 в Z_n.

Доказательство. (a) Допустим, что множество D' содержит два подряд стоящих числа x и $x+1$. Так как $1 \in D$, считаем, не теряя общности, что $x-1 \in D$. Но тогда по лемме 1 (при $a = x-1$ и $b = c = 1$) граф $(D)_n$ содержит дыру длины ≥ 5, что невозможно. Противоречие показывает, что выполнено свойство

$$\text{Если } x \in D', \text{ то } x+1 \in D. \qquad (*)$$

Так как элементы k и $k+1$ взаимно противоположны в поле Z_n, а множество D симметрично, получаем, что они либо одновременно принадлежат, либо не принадлежат множеству D; с учетом (*) заключаем, что $k \in D$. Теперь из свойства (*) легко вытекает свойство (a) доказываемой леммы.

(b) Допустим, что (b) не выполнено. Тогда найдется элемент $a \in D'$, для которого $2a \notin D'$. По следствию 3 найдется такое множество $D_1' \subset Z_n$, что $1 \in D_1'$, $2 \notin D_1'$, а графы $(D_1')_n$ и $c(D')_n$ изоморфны. Из $(D)_n \in \mathcal{L}$, очевидно, следует $(D')_n \in \mathcal{L}$. Применяя свойство (a) доказываемой леммы к графу $(D_1')_n$, получаем $|D_1'| > k$, что вместе с $|D_1'| = |D'|$ и $|D| > k$ дает $n = |Z_n| = |D \cup D' \cup \{0\}| > k + k + 1 = n$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 5. *Пусть $1 \in D$ и $2 \notin D$ и n — простое число. Тогда $(D)_n \notin \mathcal{L}$.*

Доказательство. Допустим, что $(D)_n \in \mathcal{L}$. Учитывая, что множества D и D' являются дополнительными в $Z_n \setminus \{0\}$, из свойства (b) леммы 5 заключаем, что D' представимо в виде объединения смежных классов группы $(Z_n \setminus \{0\}, \cdot)$ по подгруппе $H = \{1, 2, 2^2, 2^3, \cdots\}$. Поэтому из $1 \in D$ вытекает $2 \in D$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 6.

Из леммы 5 и следствия 3 получаем следующее следствие.

Следствие 4. *Пусть $(D)_n \in \mathcal{L}$ и n — простое число. Тогда из $a \in D$ следует $2a \in D$.*

Лемма 6. *Пусть n — простое число, $1, 2 \in D$ и $3 \notin D$. Тогда $(D)_n \notin \mathcal{L}$.*

Доказательство. Допустим, что при некотором $a \in D$, $1 < a < n-3$ верно $a+1$, $a+2 \in D'$. Тогда $(D)_n \notin \mathcal{L}$: для проверки следует использовать лемму 1 (при $b = 1$, $c = 2$), если $a+3 \notin D$ или следствие 2 (при $x = a$ и $d = 1$) в противном случае. Поэтому из $(D)_n \in \mathcal{L}$ вытекает, что если $x \in D'$, то $x+1 \in D$, то есть выполнено условие (*) леммы 5. Теперь следует повторить (с незначительными изменениями) рассуждения, проведенные при доказательстве упомянутой леммы (используя при этом следствие 4). В качестве H надо взять $\{1, 3, 3^2, 3^3, \cdots\}$.

Доказательство теоремы 1 разбивается на ряд отдельных пунктов. Предположим, что существует граф $(D)_n$, в котором все дыры и все антидыры имеют длину ≤ 4 (то есть $(D)_n \in \mathcal{L}$). Не теряя общности, считаем, что $1 \in D$ (следствие 3,(a)).

Рассмотрим множество $A = \{\lambda \in Z_n : \lambda D \subset D\}$. Из $1 \in D$ и лемм 6, 7 вытекает $1, 2, 3 \in A$. Если $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ и $x \in D$, то $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x) \in \lambda_1 D \subset D$, откуда $\lambda_1\lambda_2 \in A$. Поскольку $(Z_n \setminus \{0\}, \cdot)$ — конечная группа, получаем:

(1) $(A, \cdot)$ — подгруппа мультипликативной группы $(Z_n \setminus \{0\}, \cdot)$ поля Z_n.

Так как $\lambda x \neq \lambda y$ при $\lambda \in Z_n$, $\lambda \neq 0$ и различных $x, y \in Z_n$, а Z_n конечно, получаем:

(2) Если $\lambda \in A$, то $\lambda D = D$ и $\lambda D' = D'$. При этом $\lambda x \in D \iff x \in D$ и $\lambda x \in D' \iff x \in D'$ для любого $x \in Z_n$.

Если $\lambda \in D$, то из $1 \in D$ получаем $\lambda = \lambda \cdot 1 \in \lambda D \subset D$, а потому $A \subset D$. По условию граф $(D)_n$ не является полным, поэтому множество $D' = Z_n \setminus (D \cup \{0\})$ непусто, а потому существует $p \in D'$ — его наименьший элемент (в Z_n). Если допустить, что $p = a \cdot b$, где $1 < a \leq b < p$, то из определения p вытекает $a, b \in A$, а тогда по свойству (1) $p = a \cdot b \in A$. Противоречие показывает, что p — простое число. Отметим, что из определения p, а также лемм 6 и 7 вытекает свойство:

(3) $1, 2, 3, ..., p - 1 \in A$ и $p > 3$.

Можно также считать, что выполнено свойство:

(4) $p \in D'$.

В самом деле, из определения p следует, что $pa \notin D$ при некотором $a \in D$. Положим $D_1 = a^{-1}D$ и $A_1 = \{\lambda \in Z_n : \lambda D_1 \subset D_1\}$. Тогда $1 = a^{-1}a \in D_1$. Если $\lambda \in A$, то $\lambda D_1 = \lambda(a^{-1}D) = a^{-1}(\lambda D) \subset a^{-1}D = D_1$, откуда $\lambda \in A_1$. Поэтому $\{1, 2, 3, \cdots, p - 1\} \subset A \subset A_1$. Кроме того, из $pa \notin D$ вытекает $p \notin D_1$. По лемме 3 графы $(D)_n$ и $(D_1)_n$ изоморфны, поэтому $(D_1)_n \in \mathcal{L}$. Для завершения доказательства свойства (4) остается D заменить на D_1.

Можно считать, что выполнено свойство:

(5) $|D| \leq k$.

Если $|D| > k$, то вместо графа $(D)_n$ следует рассмотреть граф $(D')_n$ — для него верно $(D')_n \in \mathcal{L}$, число p — то же самое, что и для $(D)_n$, а $|D'| = |Z_n| - 1 - |D| = (n - 1) - |D| < (2k + 1 - 1) - k = k$.

Из свойств (3),(5) и неравенства $p > 3$ вытекает:

(6) Найдется элемент $x \in D'$, для которого $x \leq k$ и $x \not\vdots\, p$.

Пусть q — наименьший (в Z_n) элемент множества D', не делящийся на p. Из определения q и симметричности множества D вытекает:

(7) Пусть $x \in Z_n$ и $0 < x < q$. Тогда, если $x \in D'$, то $x \vdots\, p$.

Принципиальное значение для дальнейшего имеет свойство:

(8) $q < 2p$.

Предположим, напротив, что $q \geq 2p$. Тогда из $q \not\vdots\, p$ получаем $2p < q$. Пусть $a = q$, $b = -2p$, $c_1 = a + b$, $c_2 = a + 2b$ и $c_3 = 2a + b$. Тогда $a \in D'$, а из $2 \in A$, $p \notin D$ и свойства (2) вытекает $b \in D'$. Кроме того, из $0 < c_1 < q$ и $c_1 \not\vdots\, p$ и свойства (7) следует $c_1 \in D$. Аналогично из $0 < q - p < q$ вытекает $q - p \in D$, что вместе с $2 \in A$ дает $c_3 = 2(q - p) \in D$. Проверим, что $c_2 \in D$. Ясно, что $c_2 \not\vdots\, p$. Если $q > 4p$, то $0 < c_2 < q$ и соотношение $c_2 \in D$ вытекает из определения q. Равенство $q = 4p$ невозможно, поскольку $q \not\vdots\, p$. Пусть теперь $q < 4p$. Тогда из $q > 2p$ следует $0 < -c_2 < 2p < q$, а потому снова из определения числа q выводим $-c_2 \in D$, откуда

$c_2 \in D$ ввиду симметричности множества D. Итак $c_1, c_2, c_3 \in D$. Теперь по следствию 1 верно $(D)_n \notin \mathcal{L}$. Противоречие с предположением $(D)_n \in \mathcal{L}$ завершает доказательство свойства (8).

Допустим, что $q = xy$, где $2 \leq x \leq y < q$. Из $q < 2p$ получаем $x, y < p$, а тогда $x, y \in D$ (свойство (3)) и потому $q = xy \in A \subset D$. Противоречие с $q \in D'$ показывает, что верно свойство:

(9) q — простое число.

Из (7) и (8) получаем:

(10) Если $p < x < q$, то $x \in D$.

(11) Пусть $x \in D'$ и $0 < x < 3p$. Тогда $x \not\vdots 3$.

Пусть, напротив, $x = 3b$, где $b \in N$. Тогда $1 < b < p$, поэтому $b \in A \subset D$ (свойство (3)). Так как $3 \in A$, получаем $x \in D$, откуда $x \notin D'$ — противоречие.

(12) Пусть $r = 2q - p$. Тогда $r \not\vdots 3$.

Доказательство. Пусть $a = q$, $b = -p$, $c_1 = a + b = q - p$, $c_2 = a + 2b = q - 2p$ и $c_3 = 2a + b = 2q - p$. Тогда $0 < c_1 < q$ и $c_1 \not\vdots p$, поэтому $c_1 \in D$ по свойству (7). Кроме того, из $p < q < 2p$ вытекает $0 < -c_2 < p$, поэтому (3) дает $-c_2 \in D$, откуда $c_2 \in D$. Теперь из условия $(D)_n \in \mathcal{L}$ и следствия 1 получаем $c_3 \in D'$. При этом $0 < c_3 = 2q - p < 2(2p) - p = 3p$. Теперь свойство (12) вытекает из (11) и равенства $r = c_3$.

(13) Пусть $r' = 4p - q$. Тогда $r' \not\vdots 3$.

Доказательство. Пусть $a = 2p$, $b = -q$, $c_1 = a + b = 2p - q$, $c_2 = a + 2b = 2(p - q)$ и $c_3 = 2a + b = 4p - q$. Тогда $0 < c_1 < p$, $0 < q - p < q$ и $0 < c_3 < 3p$ (поскольку $p < q < 2p$). По свойству (3) $c_1 \in D$ и $q - p \in D$, что вместе с $2 \in A$ дает $c_2 = -2(q - p) \in D$. Теперь условие $(D)_n \in \mathcal{L}$ и следствие 1 показывают, что $c_3 \in D'$. Осталось использовать свойство (11) и заметить, что $r' = c_3$.

(14) Хотя бы одно из чисел r, r' делится на 3.

Это свойство вытекает из того, что простые числа p и q (большие 3) могут давать при делении на 3 только остатки 1 и 2.

Очевидно, свойства (12), (13) и (14) не могут выполняться одновременно. Итак, сделанное в начале доказательства теоремы предположение о существовании вращаемого графа $(D_n) \in \mathcal{L}$ привело к противоречию. Следовательно, класс $\mathcal{L}$ пуст. Теорема 1 доказана.

Вопрос 1. Можно ли усилить формулировку теоремы 1 таким образом, чтобы было гарантировано существование дыры или антидыры нечетной длины ≥ 5?

Вопрос 2. Справедливо ли заключение теоремы 1 в случае, когда число n вершин графа является составным?

Автор глубоко признателен В.А. Гурвичу, В.Н. Лебедеву и Е. Боросу (E. Boros) за постановку и уточнение ряда вопросов, а также за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурвич, В. А. Вращаемые графы без нечетных дыр и антидыр / В. А. Гурвич, М. А. Темкин, В. М. Удалов, А. В. Шаповалов // Докл. РАН. — 1993. — Т. 329, № 4. — С. 411–415.

2. Гурвич, В. А. Обобщенная гипотеза Бержа верна для вращаемых графов / В. А. Гурвич, М. А. Темкин // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 2. — С. 144–148.

3. Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М. : Наука, 1990. — 384 с.

4. Попов, В. В. О нечетных дырах во вращаемых графах / В. В. Попов // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 1998. — Вып. 3. — С. 49–52.

5. Apartsin, A. A circular graph — counterexample to the Duchet kernel conjecture / A. Apartsin, E. Ferapontova, A. Gurvich // Discrete Mathematics. — 1998. — V. 178. — P. 229–231.

6. Berge, C. Graphs and hypergraphs / C. Berge. — Amsterdam : North Holland, 1973. — 546 p.

7. Berge, C. Sur une conjecture relative au probleme des codes optimaux de Shannon / C. Berge // Communications presented at the Fourteenth General Assembly of the International Scientific Radio Union [URSI]. — Tokyo, 1963 : summary published in Progress in Radio Science 1960–1963. — Vol. VI: Radio Waves and Circuits / ed. F.L.H.M. Stumpers. — Amsterdam : Elsevier, 1966. — P. 189–190.

ON THE HOLLS AND ANTYHOLLS IN ROTATABLE GRAPHS

V.V. Popov

It proves, that if G is a non-empty and non-complete rotatable graph and the number n of his vertices is prime, then G contains a hole or antyhole of the lenght ≥ 5.

Key words: *spanning graphs, cycle, hole, antihole, Berge's conjecture.*