УДК 517.98
ББК 22.162

ИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАЗИЭНДОМОРФИЗМАМИ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

В.Г. Шарапов

В статье введен класс измеримых разбиений ξ пространства Лебега M с условными мерами $\mu_\xi(C) > 0$, $C \in \xi$, но не обязательно $\mu_\xi(C) = 1$ как у В.А. Рохлина, однако если $M/\xi = [0,\ 1]$, $g(x) = \mu_\xi(C_x)$, то $\int\limits_0^1 g(x)dx = 1$.

Показано, что для каждого такого разбиения ξ существует квазиэндоморфизм T такой, что $T^{-1}\varepsilon = \xi$, где ε — разбиение на точки.

Ключевые слова: *измеримые разбиения, квазиэндоморфизмы.*

Введение

В.А. Рохлин в своей знаменитой работе [1] дал определение пространства Лебега и описал измеримые разбиения ξ пространства Лебега.

Измеримое разбиение ξ может быть представлено как разбиение на прообразы точек, то есть $\xi = T^{-1}\varepsilon$, где ε — разбиение на точки. При этом элемент $C_x = T^{-1}x$ имеет конечное или счетное число точек x_i с условной мерой $m_i(x) > 0$ и некоторое множество точек нулевой условной меры с общей условной мерой $l(x) \geqslant 0$, причем выполняется условие $\sum\limits_i m_i(x) + l(x) = 1$. Величины $m_i(x)$ и $l(x)$ легко устанавливаются для эндоморфизма, то есть для сохраняющего меру преобразования. Их можно рассматривать как функции на фактор-пространстве M/ξ, которое, как показано в [1], изоморфно отрезку [0, 1]. Например, для эндоморфизма отрезка [0, 1) $Tx = 2x(\mathrm{mod} 1)$ каждый элемент разбиения $\xi = T^{-1}\varepsilon$ состоит из двух точек условной меры $\frac{1}{2}$, то есть $m_1(x) = m_2(x) \equiv \frac{1}{2}$.

В данной работе рассматриваются измеримые разбиения с такими же функциями $m_i(x) \geqslant 0$ и $l(x) \geqslant 0$, у которых вместо свойства $\sum\limits_i m_i(x) + l(x) = 1$ выполняется условие $\int\limits_0^1 \left(\sum\limits_i m_i(x) + l(x)\right) dx = 1$.

Показывается, что для каждого такого разбиения ξ существует квазиэндоморфизм T, для которого $T^{-1}\varepsilon = \xi$.

Квазиэндоморфизмом называется всякое измеримое несингулярное (прообраз каждого множества меры 0 есть множество меры 0) преобразование пространства Лебега M.

Рассмотрим три случая:

1) разбиение ξ дискретное, то есть каждый элемент разбиения состоит из конечного или счетного числа точек положительных условных мер;

2) разбиение ξ непрерывное, то есть каждый элемент состоит из точек нулевой условной меры;

3) каждый элемент разбиения содержит как точки положительной условной меры, так и множество точек нулевой условной меры.

1. Дискретные разбиения

Рассмотрим следующий пример квазиэндоморфизма.

Пусть $M=(0,\ 1]$, $f-$ действительная функция, определенная на (0, 1] и удовлетворяющая условиям:

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;

2) $f(x)$ — непрерывна и строго возрастает;

3) $f(1)=K$, где K — натуральное число или $+\infty$.

Пусть $y=Tx=f(x)(\mathrm{mod}\ 1)$, $x\in(0,\ 1]$, $T1=1$.

Вследствие свойства 2 почти всюду существует производная $f'(x)$. Отрезок (0, 1] разбивается на конечное или счетное число отрезков Δ_i, $\Delta_i=(x_{i-1},x_i]$, таких что $x_0=0$ и $f(x_i)=1$, $i\geqslant 1$. Длина отрезка Δ_i равна $\int\limits_0^1 m_i(y)dy$. При этом $\forall\ x\in M$; $T^{-1}x=\{x_i'\}$, $\quad i=\overline{1,\ K}$, где $x_i'=x_{i-1}+\int\limits_0^x m_i(y)dy$, $m_i(y)=\frac{1}{f'(x)}$, $x\in\Delta_i$.

Пространство M изоморфно множеству, состоящему из отрезков $M_i=\{(x,y):0<x\leqslant 1,\ y=1+\frac{1}{i}\}$, $\quad i=\overline{1,K}$, с плотностью $m_i(x)$, соответствующих отрезкам Δ_i. Точки $\left(x,\ 1+\frac{1}{i}\right)$, $\ i=\overline{1,K}$, образуют элемент C_x разбиения $\xi=T^{-1}\varepsilon$. Каждая из этих точек имеет условную меру $m_i(x)$. В этом представлении пространства $M\quad T^{-1}\left(x,\ 1+\frac{1}{k}\right)=C_x$, где

$$x=\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_0^1 m_i(x)dx+\int\limits_0^x m_k(x)dx \quad \left(\sum_{i=1}^{0}\int\limits_0^1 m_i(x)dx=0\right). \tag{1}$$

Условная мера элемента $C_x\quad \mu(C_x)=\sum\limits_i m_i(x)=g(x)$, где $g(x)>0$, $\int\limits_0^1 g(x)dx=1$. Обратно, если взять любые функции $m_i(x)$ со свойствами $m_i(x)>0$, $g(x)=\sum\limits_i m_i(x)$, $\int\limits_0^1 g(x)dx=1$, то формула (1) определяет квазиэндоморфизм T пространства M такой, что $T^{-1}\varepsilon=\xi$, где разбиение ξ состоит из элементов C_x, представляющих собой K точек x_i с условными мерами $m_i(x)$.

2. Непрерывные разбиения

Пусть M есть криволинейная трапеция $\{(x,y):0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant l(x)\}$, где $l(x)>0$ и $\int\limits_0^1 l(x)dx=1$. ξ — разбиение на элементы $C_x=\{(x,y):\ x$ фиксировано, $0<y\leqslant l(x)\}$.

Так же как в [1] показывается, что пространство Лебега M изоморфно квадрату $[0,\ 1)\times[0,\ 1)$, можно доказать, что M изоморфно криволинейной трапеции площади 1.

Пусть Λ — последовательность положительных чисел $\alpha_i,\ i=\overline{1,K}$, K — натуральное число или $+\infty$, такая, что $\sum\limits_i \alpha_i = 1$.

Определим квазиэндоморфизм T_Λ, задавая для каждой точки $(x,y)\in M$ ее прообраз $T_\Lambda^{-1}(x,y)$.

Положим $\beta_i=\sum\limits_{s=1}^{i}\alpha_s,\quad \alpha_s\in\Lambda,\quad i=\overline{1,\ K},\quad \beta_0=0$, и $y_{i_1}(x)=\beta_{i_1}l(x)$, $i_1=\overline{1,\ K}$.

Пусть $L_{i_1}=\{(x,y):\ y_{i_1-1}(x)<y\leqslant y_{i_1}(x),\ 0<x\leqslant 1\},\quad i_1=\overline{1,\ K}$. Положим $L_{i_1}^{j_1}=\{(x,y):\ (x,y)\in L_{i_1},\beta_{j_1-1}<x\leqslant\beta_{j_1}\}=\{(x,y):\ \beta_{j_1-1}<x\leqslant\beta_{j_1},$ $y_{i_1-1}(x)<y\leqslant y_{i_1}(x)\}$.

Прообразами множеств L_{i_1}, $i_1=\overline{1,\ K}$, берем ξ-множества $T_\Lambda^{-1}(L_{i_1}) = \{(x,y):\beta_{i_1-1}<x\leqslant\beta_{i_1},\quad 0<y\leqslant l(x)\}$.

Обозначим $\beta_{i_1i_2}:=\beta_{i_1}+\alpha_{i_1+1}\cdot\beta_{i_2},\quad 0\leqslant i_1<K,\quad 1\leqslant i_2<K,\ \beta_{i_1K}=\beta_{i_1+1}$; $\beta_{i_1\ldots i_{n+1}}=\beta_{i_1}+\alpha_{i_1+1}\cdot\beta_{i_2\ldots i_{n+1}}$; $y_{i_1\ldots i_n}(x)=\beta_{i_1\ldots i_n}\cdot l(x)$.

Предположим, что

$$L_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}=\{(x,y):\ \beta_{(j_1-1)(j_2-1)\ldots(j_k-1)}<x\leqslant\beta_{(j_1-1)\ldots(j_{k-1}-1)j_k},y_{(i_1-1)\ldots(i_{k-1}-1)(i_k-1)}(x)<y\leqslant$$
$$\leqslant y_{(i_1-1)\ldots(i_{k-1}-1)i_k}(x)\}.$$

Положим $L_{i_1\ldots i_ki_{k+1}}^{j_1\ldots j_k}=\{(x,y):\ (x,y)\in L_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k},y_{(i_1-1)\ldots(i_k-1)(i_{k+1}-1)}(x)<y\leqslant y_{(i_1-1)\ldots(i_k-1)i_{k+1}}(x)\}$, то есть

$$L_{i_1\ldots i_{k+1}}^{j_1\ldots j_k}=\{(x,y):\ \beta_{(j_1-1)\ldots(j_{k+1}-1)}<x\leqslant\beta_{(j_1-1)\ldots(j_k-1)j_{k+1}},$$
$$y_{(i_1-1)\ldots(i_k-1)}(x)<y\leqslant y_{(i_1-1)\ldots(i_{k-1}-1)i_k}(x)\}.$$

Далее положим $L_{i_1\ldots i_{k+1}}^{j_1\ldots j_{k+1}}=\{(x,y):\ (x,y)\in L_{i_1\ldots i_{k+1}}^{j_1\ldots j_k},\ \beta_{(j_1-1)\ldots(j_{k+1}-1)}<x\leqslant\beta_{(j_1-1)\ldots(j_k-1)j_{k+1}}\}$, то есть $L_{i_1\ldots i_{k+1}}^{j_1\ldots j_{k+1}}=\{(x,y):\ \beta_{j_1\ldots j_{k+1}-1}<x\leqslant\beta_{j_1\ldots j_{k+1}},y_{i_1\ldots i_k-1}(x)<y\leqslant y_{i_1\ldots i_k}(x)\}$.

Прообразы введенных множеств определяем формулами:

$$T_\Lambda^{-1}L_{i_1}=\{(x,y):\beta_{i_1-1}<x\leqslant\beta_{i_1},\ 0<y\leqslant l(x)\},$$

$$T_\Lambda^{-1}L_{i_1}^{j_1}=\{(x,y):\beta_{i_1-1}+\alpha_{i_1}\cdot\beta_{j-1}<x\leqslant\beta_{i_1-1}+\alpha_{i_1}\cdot\beta_j,\ 0<y\leqslant l(x)\}=$$

$$=\{(x,y):\beta_{(i_1-1)(j_1-1)}<x\leqslant\beta_{(i_1-1)j_1},\ 0<y\leqslant l(x)\}.$$

$$T_\Lambda^{-1}L_{i_1i_2}^{j_1}=\{(x,y):\beta_{(i_1-1)(j_1-1)(i_2-1)}<x\leqslant\beta_{(i_1-1)(j_1-1)i_2},\ 0<y\leqslant l(x)\}.$$

Аналогично получаем

$$T_\Lambda^{-1}L_{i_1i_2}^{j_1j_2}=\{(x,y):\beta_{(i_1-1)(j_1-1)(i_2-1)(j_2-1)}<x\leqslant\beta_{(i_1-1)(j_1-1)(i_2-1)j_2},\ 0<y\leqslant l(x)\}.$$

В результате получаем общую формулу

$$T_\Lambda^{-1} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n} = \{(x,y) : \beta_{(i_1-1)(j_1-1)\dots(i_{n-1}-1)(j_n-1)} < x \leqslant \beta_{(i_1-1)(j_1-1)\dots(i_{n-1}-1)j_n},\ 0 < y \leqslant l(x)\}.$$

Для всякой точки $(x,y) \in M$ существует единственная последовательность множеств $L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$, $n = \overline{1,\infty}$, такая, что $(x,y) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$. Пересечение соответствующей последовательности $T_\Lambda^{-1} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$, $n = \overline{1,\infty}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} T_\Lambda^{-1} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$ есть некоторый элемент C разбиения ξ. Поэтому полагаем $T_\Lambda^{-1}(x,y) = \bigcap\limits_n T_\Lambda^{-1} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$.

Множества $T_\Lambda^{-1} L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$ и $L_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_n}$ имеют равные меры только в случае $l(x) \equiv 1$. В противном случае T есть квазиэндоморфизм.

3. Смешанные разбиения

Пусть теперь разбиение ξ такое, что каждый элемент $C_x \in \xi$ состоит из K точек положительной условной меры $m_i(x)$, $i = \overline{1, K}$ и точек нулевой условной меры с общей условной мерой $l(x)$, где функция плотности $g(x) = \sum\limits_i m_i(x) + l(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^1 g(x)dx = 1$.

Пространство M можно считать состоящим из криволинейной трапеции $L = \{(x,y) : 0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant l(x)\}$ и отрезков $M_i = \{(x,y) : 0 < x \leqslant 1,\ y = 1 + \frac{1}{i}\}$, $i = \overline{1,K}$, K — натуральное число или $+\infty$, с плотностью условной меры $m_i(x)$. Элементы $C_x \in \xi$ есть множества $C_x = \{(x,y) \in M :\ x \text{ фиксировано}\}$.

Удобнее определить квазиэндоморфизм T, для которого $T^{-1}\varepsilon = \xi$, задавая для каждой точки $(x,y) \in M$ ее прообраз $T^{-1}(x,y)$. Для $\left(x,\ \frac{1}{k}\right) \in M_k$ положим $T^{-1}\left(x, \frac{1}{k}\right) = C_x$, где

$$x = \int\limits_0^1 l(x)dx + \sum_{i=1}^{k-1} \int\limits_0^1 m_i(x)dx + \int\limits_0^x m_k(x)dx \quad \left(\sum_{i=1}^{0} \int\limits_0^1 m_i(x)dx = 0 \right).$$

Обозначим $\Delta_L = \int\limits_0^1 l(x)dx$ и положим $T^{-1}L = [0, \Delta_L]$. Аналогично, как выше в случае $\mu(L) = 1$, с умножением координат по оси x на Δ_L получаем

$$L_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k} = \{(x,y) :\ \Delta_L \cdot \beta_{(i_1-1)\dots(i_k-1)}, < x \leqslant \Delta_L \cdot \beta_{(i_1-1)\dots(i_{k-1}-1)i_k},$$
$$y_{(i_1-1)\dots(i_k-1)}(x) < y \leqslant y_{(i_1-1)\dots(i_{k-1}-1)i_k}(x)\}.$$

Прообразом этого множества полагаем

$$T^{-1} L_{i_1\dots i_k}^{j_1\dots j_k} = \{(x,y) : (x,y) \in M,$$

$$\Delta_L \cdot \beta_{(i_1-1)(j_1-1)\ldots(i_k-1)(j_k-1)} < x \leqslant \Delta_L \cdot \beta_{(i_1-1)(j_1-1)\ldots(i_k-1)j_k}\}.$$

Как в случае $\mu(L) = 1$, получаем, что $(x, y) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}$ и $T^{-1}(x, y) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} T^{-1} L_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}$.

Легко видеть, что можно построить квазиэндоморфизмы в том случае, когда измеримое разбиение ξ имеет более общий вид, когда, например, $l(x)$ или какие-то (или все) $m_i(x) = 0$ для некоторых подмножеств x.

Замечание. В [2] показано, как можно в случае $\mu(L) = 1$ сделать $T(x)$ непрерывной нигде не дифференцируемой функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рохлин, В. А. Об основных понятиях теории меры / В. А. Рохлин // Мат. сб. — 1949. — № 1. — С. 107–1550.

2. Шарапов, В. Г. Эргодические свойства непрерывных не дифференцируемых отображений / В. Г. Шарапов // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — Вып. 1. — 1986. — С. 50–54.

MEASURABLE PARTITIONS GENERATED BY QUASIENDOMORPHISMES

V.G. Sharapov

In the paper a class of measurable partitions ξ of Lebesque space M with conditional measures $\mu_\xi(C) > 0$, $C \in \xi$, not necessarily $\mu_\xi(C) = 1$ as by V.A. Rokhlin, but if $M/\xi = [0,\ 1]$, $g(x) = \mu_\xi(C_x)$, $\int\limits_0^1 g(x)dx = 1$, is considered.

It is shown that for which such partition it exists quasiendomorphism T, for which $T^{-1}\varepsilon = \xi$, ε — pointwise partition.

Key words: *measurable partitions, quasiendomorphisms.*