



УДК 519.216
ББК 22.3

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ¹

В.К. Игнатьев, А.В. Никитин, С.В. Юшанов

Показано, что если для сигнала существует квазигармоническое представление с ограниченной медленно меняющейся частотой, то оно единственно. Показано, что при условии медленности изменения параметров системы, представимой в виде дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, решение уравнения существует в виде квазигармонического представления с медленно меняющейся амплитудой и частотой. Предложен регуляризованный алгоритм оценивания параметров сигнала с квазигармоническим представлением и метод оценивания медленно меняющихся коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка. Приведены результаты статистического моделирования.

Ключевые слова: квазигармоническое представление, медленно меняющиеся параметры, мгновенная частота, обратная задача, условная корректность, регуляризация Тихонова.

Введение

Во многих радиофизических и радиотехнических задачах широко используется представление сигнала в виде квазигармонического колебания

$$x(t) = A(t)\cos[\theta(t)], \quad (1)$$

причем производная полной фазы $\theta(t)$ называется мгновенной частотой $\omega(t)$ $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ [19]. Для однозначного описания сигнала $x(t)$ с помощью двух функций – амплитуды (оггибающей) $A(t)$ и полной фазы $\theta(t)$ необходимо то или иное дополнительное условие. Например, если полная фаза определяется как аргумент аналитического сигнала $z(t) = A(t)\exp[i\theta(t)] = x(t) + iy(t)$, построенного на основе исследуемого колебания $x(t)$ с помощью преобразования Гильберта [23]:

$$y(t) = \hat{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau = A(t) \sin[\theta(t)], \quad (2)$$

то мгновенная частота $\omega(t)$ сигнала (1) равна

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Применяются и другие определения полной фазы [22], которые, как и определение Габора [23], являются формально-математическими и могут приводить к физическим противоречиям [3].

Отметим, что вопрос о единственности представления колебания в форме (1) существенен, если амплитуде и (или) мгновенной частоте ставятся в соответствие измеряемые физические величины, например, амплитуда определяет энергию процесса, а мгновенная частота в задаче доплеровской локации связана со скоростью объекта. В этом случае нужны физические условия однозначного определения амплитуды и фазы. При естественных предположениях, что амплитуда $A(t)$ и мгновенная частота $\omega(t)$ – положительные и непрерывные функции, а $\omega(t)$ ограничена как сверху, так и снизу

$$0 < \omega_m \leq \omega(t) \leq \omega_M, \quad (3)$$

одним из таких условий может быть ограниченность носителя спектра мгновенной частоты $\omega(t)$.

1. Единственность квазигармонического представления

Пусть функция $x(t)$ имеет нули в моменты времени t_k , образующие монотонную последовательность без конечных предельных точек. Из непрерывности и положительности функции $A(t)$ следует, что

$$\theta(t_k) = \theta_k = \pi k - \pi/2. \quad (4)$$

Здесь принято, что в момент времени $t = t_0 = 0$ функция $x(t)$ проходит через ноль с положительной производной. Таким образом, нахождение полной фазы $\theta(t)$ сводится к решению интерполяционной задачи для неэквидистантной последовательности точек (узлов интерполяции) t_k .

Задача интерполяции (4) всегда имеет решение, не обязательно в виде ряда Лагранжа, в классе целых аналитических функций, какими бы ни были действительные числа t_k и θ_k [5]. Это решение не является единственным. Пусть целые функции $\theta(z)$ и $\theta_1(z)$, где $z = t + iu$, являются решением интерполяционной задачи (4). Из условия (3) следует, что в точках $z = t_k$ функция $\cos[\theta(z)]$ имеет простые нули. Тогда функция $\chi(z) = (\theta_1(z) - \theta(z))/\cos[\theta(z)]$ тоже является целой аналитической, так как нули знаменателя совпадают с нулями числителя. Поэтому общее решение интерполяционной задачи (4) в классе целых функций имеет вид

$$\theta_1(z) = \theta(z) + \chi(z)\cos[\theta(z)], \quad (5)$$

где $\chi(z)$ – произвольная целая функция.

Покажем, что решение интерполяционной задачи (4) единственно в классе целых функций с финитным спектром. Пусть существует конечный предел

$$\omega_C = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \omega(t) dt \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi k}{t_k - t_{-k}} \right]. \quad (6)$$

Естественно, что $\omega_m \leq \omega_C \leq \omega_M$. Из ограниченности мгновенной частоты следует, что полная фаза $\theta(t)$ растет при $|t| \rightarrow \infty$ не быстрее, чем t . Если носителем спектра функции $\theta(t)$ является отрезок $[-\omega_B, \omega_B]$, причем $\omega_B < \omega_C$, то в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [4; 21] ее аналитическое продолжение $\theta(z)$ является целой функцией конечной степени, меньшей, чем ω_C .

Целая функция конечной степени имеет первый порядок. Из теоремы о порядке произведения целых функций [12] следует, что для того, чтобы функция $\theta_1(z)$, не равная тождественно $\theta(z)$, также имела конечную степень, меньшую ω_C , необходимо, чтобы и функция $\cos[\theta(z)]$ имела порядок не выше первого. Целая функция $\cos(z)$ имеет первый порядок, поэтому сложная функция $\cos[\theta(z)]$ может иметь первый порядок только в случае, если $\theta(z)$ – многочлен [24]. Но многочлен степени выше первой растет на действительной оси быстрее, чем $|t|$, что противоречит условию (3) ограниченности мгновенной частоты.

Таким образом, различные решения интерполяционной задачи (4) возможны лишь при $\theta(t) = \omega_0 t - \pi/2$. Но спектр функции вида (5)

$$\theta_1(t) = \omega_0 t - \pi/2 + \chi(t)\cos(\omega_0 t - \pi/2) \quad (7)$$

ограничен сверху частотой $\omega_0 + \omega_\chi \geq \omega_c > \omega_B$, где ω_χ – верхняя граничная частота спектра функции $\chi(t)$, так как для сигнала (1) с полной фазой (7) из условия (6) следует $\omega_c = \omega_0$, что и доказывает единственность решения интерполяционной задачи (4) в классе целых функций с финитным спектром. При этом финитности спектра амплитуды $A(t)$ и самого сигнала $x(t)$ не требуется.

Если предел (6) не существует, класс единственности решения интерполяционной задачи (4) определяется условием $\omega_B < \omega_m$. Условие положительности амплитуды $A(t)$ также можно ослабить. Достаточно того, чтобы функция $A(t)$ имела нули в счетном множестве точек t_m , которые полагаются известными. Тогда из множества узлов интерполяции t_k следует исключить простые нули сигнала $x(t)$, совпадающие с числами t_m .

Поскольку производная целой функции имеет тот же порядок и степень, что и сама функция [12], мгновенная частота в силу теоремы Винера – Палея – Шварца [4; 21] также должна быть целой функцией с финитным спектром и может быть представлена интегралом Фурье

$\omega(t) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \tilde{\omega}(p) \exp(ipt) dp$. Тогда для производных мгновенной частоты справедлива оценка

$$|\omega^{(n)}(t)| \leq P \omega_B^n, \quad P = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} |\tilde{\omega}(p)| dp. \quad (8)$$

Сигнал, для которого существуют константы P и ω_B такие, что условия (3) и (8) выполняются в любой момент времени, естественно назвать сигналом медленно меняющейся частоты (ММЧ).

С другой стороны, при выполнении условия (8) коэффициенты разложения c_n аналитической функции $\omega(t)/\omega_c$ в ряд Тейлора в произвольной точке удовлетворяют условию $|c_n| \leq \frac{\omega_B^n P}{n! \omega_c}$. Тогда

для степени α этой функции получаем [12] $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sqrt[n]{|c_n|} \right) \leq \omega_B$ и по теореме Винера – Палея – Шварца [4; 21] мгновенная частота $\omega(t)$ имеет финитный спектр, ограниченный частотой $\omega_B < \omega_c$. Таким образом, если для сигнала существует представление (1) с медленно меняющейся частотой, удовлетворяющей условиям (3) и (8), то оно единственно. В общем случае это представление может не являться аналитическим сигналом.

Вопрос об условиях, которым должен удовлетворять сигнал, чтобы для него существовало квазигармоническое представление (1) с медленно меняющейся частотой, относится скорее не к радиофизике, а к функциональному анализу. Он сводится к задаче об условиях, которым должна удовлетворять последовательность t_k нулей функции $x(t)$, чтобы числа $\theta_k = \pi k - \pi/2$ могли быть значениями функции с финитным спектром, взятыми в моменты t_k [7]. Поскольку последовательность θ_k бесконечно большая, эти условия могут быть излишне ограничительными или не иметь ясного физического смысла [11]. Например, может быть усилено условие (6) [7]:

$$t_k = \pi \frac{|k| + \delta_k}{\omega_c}, \quad \delta_k \leq \frac{1}{2|k| + 1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

На практике существование решения в классе единственности можно обосновать, например, связью параметров сигнала с медленно меняющимися параметрами породившей его физической системы. К примеру, в ЯМР известны уравнения Блоха для поперечных проекций магнитного момента [9]:

$$\dot{M}_x = \gamma M_y B - M_x / T_2, \quad \dot{M}_y = -\gamma M_x B - M_y / T_2, \quad B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = B(t),$$

из которых легко получается уравнение для свободной прецессии поперечной намагниченности в медленно меняющемся продольном магнитном поле $B(t)$:

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (9)$$

где $x(t) = M_x$ или M_y , $p(t) = 2/T_2 - \dot{B}/B$, $q(t) = \gamma^2 B^2 - \dot{B}/(BT_2) + 1/T_2^2$. Если возможно по измеренному, например, спиновым детектором [9] сигналу $x(t)$ восстановить коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ уравнения (9), то можно проследить за динамикой изменения продольного магнитного поля $B(t)$ и времени поперечной релаксации $T_2(t)$, что важно в задачах спектроскопии, томографии, исследовании геомагнитного поля и т. д. Для этого необходима аналитическая связь параметров квазигармонического представления (1) с коэффициентами уравнения (9).

2. Асимптотическое решение

В общем случае будем рассматривать колебательную систему с одной степенью свободы, у которой некоторые параметры медленно (по отношению к периоду собственных колебаний) изменяются. Тогда мы приходим к рассмотрению дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами (9), которое подстановкой

$$x(t) = y(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t p(t') dt' \right] \quad (10)$$

приводится к виду

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2(t)y(t) = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \Omega^2(t) = q(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} - \frac{1}{4} p^2(t). \quad (12)$$

В случае медленного изменения параметров осциллятора функцию $\Omega^2(t)$ удобно представить в виде

$$\Omega^2(t) = \Omega_0^2 f(t/\tau),$$

где Ω_0 – параметр размерностью частоты;
 f – безразмерная функция величиной порядка единицы;
 τ – характерное время ее изменения.

Условие медленности изменения параметров осциллятора можно выразить соотношением $1/\Omega_0\tau = \mu$, $\mu \ll 1$, или записать следующим образом:

$$\dot{\Omega}(t) \sim \mu \Omega^2(t), \quad \mu \ll 1. \quad (13)$$

Если уравнение (9) описывает осциллятор с малыми потерями, то с учетом физических допущений $p^2(t) \sim \mu q(t)$. При таких условиях с математической точки зрения уравнение (11) с медленно меняющимися коэффициентами эквивалентно уравнению с малым параметром μ при старшей производной. Такие уравнения решают с помощью асимптотических методов разложения по малому параметру [16; 19; 20]. Для построения приближенного решения удобно перейти к безразмерной переменной $\xi = t/\tau$ [19].

Асимптотическое решение уравнения (11) на некотором интервале $I = [\xi_1, \xi_2]$ при выполнении условия (13), а также $f(\xi) \in C^\infty(I)$ можно представить рядом [20]:

$$y(\xi) = \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{\xi}^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi'\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi) \mu^k.$$

Удобно представить этот ряд в виде

$$y(\xi) = \exp\left\{\int \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \alpha_k(\xi') d\xi'\right\}.$$

Первые члены этой асимптотики имеют вид:

$$\alpha_{-1}(\xi) = \pm i \sqrt{f(\xi)}, \quad \alpha_0(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{4f(\xi)},$$

$$\alpha_1(\xi) = \frac{i}{\sqrt{f(\xi)}} \left[-\frac{1}{8} \frac{f''(\xi)}{f(\xi)} + \frac{5}{32} \frac{(f'(\xi))^2}{f^2(\xi)} \right], \quad (14)$$

а для последующих членов верны рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{k+1}(\xi) = \frac{i}{2\sqrt{f(\xi)}} \left(\alpha'_k(\xi) + \sum_{j=0}^k \alpha_j(\xi) \alpha_{k-j}(\xi) \right).$$

Будем считать, что $f(\xi) > 0$, и это соответствует колебаниям осциллятора, а не аперидическому затуханию [19]. Таким образом, имеем два формально асимптотических решения

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp\left\{\pm \frac{i}{\mu} \int \sqrt{f(\xi')} d\xi' + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \int \alpha_k(\xi') d\xi'\right\}. \quad (15)$$

Использованная процедура приводит к асимптотическому ряду, поэтому ограничиваются конечным отрезком ряда, например, при использовании приближения ВКБ [20] двумя его членами:

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp\left\{\pm \frac{i}{\mu} \int \sqrt{f(\xi')} d\xi'\right\} + O(\mu). \quad (16)$$

Оценка остаточного члена равномерна по ξ на I , то есть $|O(\mu)| \leq C\mu$, где C не зависит от ξ [там же].

При заданных начальных условиях можно представить решение в тригонометрической форме:

$$y(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos\left[\int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0\right] = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \cos[\theta(t)], \quad \theta(t) = \int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0.$$

Здесь A_0 и φ_0 – константы, определяемые из начальных условий. Возвращаясь к $x(t)$, получим:

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int^t p(t') dt'\right] \cos\left[\int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0\right] = A(t) \cos[\theta(t)], \quad (17)$$

$$\text{где } A(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\Omega(t)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \int^t p(t') dt'\right], \quad \theta(t) = \int^t \Omega(t') dt' + \varphi_0. \quad (18)$$

Видно, что введенная ранее как производная полной фазы $\theta(t)$ частота $\omega(t)$ [19] совпадает с $\Omega(t)$. Кроме того, как следует из условия (13), рассмотренное приближение неприменимо вблизи точек поворота $\Omega(t) = 0$ [10] – это согласуется с условием, что $\omega(t)$ положительная и ограниченная снизу функция.

Для применимости приближенного решения (16) необходимо выполнение условия (13) [19], однако само по себе оно может оказаться недостаточным, поскольку получено путем оценки по порядку величины различных членов в уравнении (11). В действительности надо требовать малости последовательных членов разложения в решении этого уравнения, а она может не обеспечиваться малостью отбрасываемого члена в уравнении (15). Так, если в экспоненте решения содержится член, возрастающий со временем по близкому к линейному закону, то малость первой производной в уравнении (15) не мешает тому, что на достаточно больших временах этот член может «набрать» большую величину; ВКБ-приближение оказывается тогда неприменимым для анализа сигнала на больших временных интервалах [10].

Рассмотрим для примера еще один член асимптотического разложения $\mu\alpha_1(\xi)$. Подставим выражение для этого члена из (14) в (15). Интегрируя, получим решение в виде

$$y_{1,2}(\xi, \mu) = \frac{1}{f^{1/4}(\xi)} \exp \left\{ \pm \frac{i}{\mu} \int^{\xi} \sqrt{f(\xi')} d\xi' + i\mu \left[-\frac{1}{8} \frac{f'(\xi)}{f^{3/2}(\xi)} - \frac{1}{32} \int^{\xi} \frac{(f'(\varepsilon))^2}{f^{5/2}(\varepsilon)} d\varepsilon \right] \right\}. \quad (19)$$

Поправка, вносимая третьим членом разложения, является мнимой величиной и входит в экспоненту решения, что эквивалентно появлению вещественной поправки в фазе выражения (17). Члены в квадратной скобке в (19) должны быть малы по сравнению с 1 [там же].

При рассмотрении члена асимптотического ряда с номером k возникает слагаемое вида $f^{(k)}/f^{3/2}$, которое также должно быть порядка единицы. Для него условие (13) будет иметь вид

$$|\Omega^{(k)}(t)| \sim \mu |\Omega_0 \Omega^{(k-1)}(t)|, \mu \ll 1. \quad (20)$$

В выражение (18) для амплитуды входит множитель $1/\sqrt{\Omega(t)}$, а из условия медленности изменения $\Omega(t)$ и вдали от точек поворота можно говорить, что амплитуда тоже является медленно меняющейся функцией времени. Следует также заметить, что условия (8) и (20) идентичны.

3. Метод решения обратной задачи

Мы показали, что при условии медленности изменения параметров системы, представимой в виде дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, можно говорить, что решение системы существует в виде квазигармонического представления (1) с медленно меняющейся амплитудой и частотой. Мы будем решать обратную задачу – вычисление коэффициентов в уравнении вида (9) при известном $x(t)$. Такая задача относится к типу обратных коэффициентных задач и в общем случае является некорректной [17], но возможно построение корректного решения на некоторых множествах [6; 18]. Медленно меняющиеся функции входят в класс функций с ограниченной вариацией, на множестве которых можно построить корректное решение. По определению, вариация непрерывно дифференцируемой функции на интервале равна интегралу нормы ее производной на этом интервале [14]. Для медленно меняющегося коэффициента $\Omega(t)$ вариация за время его характерного изменения $\tau \sim 1/\omega(t)$ при выполнении условия (20) равна

$$V_{\tau}(\Omega) = \int_{\tau} \|\dot{\Omega}(t)\| dt \sim \mu \int_{\tau} \|\Omega^2(t)\| dt,$$

то есть вариация медленно меняющегося коэффициента на интервале τ имеет порядок $O(\mu)$. Нетрудно показать, что таким же соотношениям удовлетворяют и исходные коэффициенты $p(t)$

и $q(t)$, то есть они являются функциями с ограниченной вариацией. Но для применения регуляризирующих алгоритмов необходимо получить соотношения для самих коэффициентов.

Воспользуемся представлением сигнала в виде (17)

$$x(t) = a(t) \sin\{\theta(t)\} = b(t) \exp\{s(t)\} \sin\{\theta(t)\},$$

и обозначим $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$, $\dot{s}(t) = \gamma(t)$. Условия медленности изменения параметров:

$$\ddot{\theta}(t) = \dot{\omega}(t) \sim \mu \omega^2(t), \quad \dot{s}(t) = \gamma(t) \sim \mu \omega(t), \quad \ddot{s}(t) = \dot{\gamma}(t) \sim \mu^2 \omega^2(t),$$

$$\dot{b}(t) \sim \mu \omega(t), \quad 0 < \mu \ll 1. \quad (21)$$

Из соотношений (12) и (18) следует связь между $p(t)$, $q(t)$ и параметрами сигнала $\omega(t)$, $\gamma(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{4} p^2(t) + \frac{1}{2} \dot{p}(t) + \omega^2(t), \quad p(t) = -2\gamma(t). \quad (22)$$

Таким образом, для нахождения $p(t)$ и $q(t)$ достаточно получить выражения для $\omega(t)$ и $\gamma(t)$.

Построим по аналогии с выражениями для коэффициентов авторегрессии метода Прони [8; 13; 15] второго порядка функции следующего вида:

$$e(t) = \frac{x^2(t-2\Delta) - x(t-4\Delta)x(t)}{x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta)}, \quad d(t) = \frac{x^2(t-\Delta) - x(t-2\Delta)x(t)}{x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta)},$$

$$x^2(t-2\Delta) - x(t-3\Delta)x(t-\Delta) \neq 0, \quad (23)$$

где Δ – временной интервал, такой, что $\Delta \ll \tau$ или $\omega(t)\Delta \ll 1$. Сначала рассмотрим знаменатель этих соотношений. Представим параметры сигнала разложением в ряд Тейлора около центральной точки $t - 2\Delta$

$$x(t-\Delta) = [a(t-2\Delta) + \dot{a}(t-2\Delta)] \sin\{\theta(t-2\Delta) + \omega(t-2\Delta)\Delta + \dot{\omega}(t-2\Delta)\Delta^2/2\} + \delta_x,$$

$$x(t-2\Delta) = a(t-2\Delta) \sin\{\theta(t-2\Delta)\},$$

$$x(t-3\Delta) = [a(t-2\Delta) - \dot{a}(t-2\Delta)] \sin\{\theta(t-2\Delta) - \omega(t-2\Delta)\Delta + \dot{\omega}(t-2\Delta)\Delta^2/2\} + \delta_x.$$

Здесь δ_x отвечает за величину отброшенных членов разложения ($\delta_x = O(\mu)$). Числители также разложим вокруг центральной точки – для $e(t)$ это $t - 2\Delta$:

$$x(t) = [a(t-2\Delta) + 2\dot{a}(t-2\Delta)] \sin\{\theta(t-2\Delta) + 2\omega(t-2\Delta)\Delta + 2\dot{\omega}(t-2\Delta)\Delta^2/2\} + \delta_x,$$

$$x(t-2\Delta) = a(t-2\Delta) \sin\{\theta(t-2\Delta)\},$$

$$x(t-3\Delta) = [a(t-2\Delta) - 2\dot{a}(t-2\Delta)] \sin\{\theta(t-2\Delta) - 2\omega(t-2\Delta)\Delta + 2\dot{\omega}(t-2\Delta)\Delta^2/2\} + \delta_x.$$

Для $d(t)$ центральной точкой будет $t - \Delta$:

$$x(t) = [a(t-\Delta) + \dot{a}(t-\Delta)] \sin\{\theta(t-\Delta) + \omega(t-\Delta)\Delta + \dot{\omega}(t-\Delta)\Delta^2/2\} + \delta_x,$$

$$x(t-\Delta) = a(t-\Delta) \sin\{\theta(t-\Delta)\},$$

$$x(t - 2\Delta) = [a(t - \Delta) - \dot{a}(t - \Delta)] \sin\{\theta(t - \Delta) - \omega(t - \Delta)\Delta + \dot{\omega}(t - \Delta)\Delta^2 / 2\} + \delta_x.$$

Подставим найденные для отсчетов сигнала разложения в (23) и, применяя известные тригонометрические формулы, ограничиваясь порядком малости $O(\mu)$, получим

$$\begin{aligned} e(t) &\approx 4\cos^2\{\omega(t - 2\Delta)\Delta\} + \delta_e, \quad \delta_e = O(\mu), \\ d(t) &\approx \exp\left\{2\gamma\left(t - \frac{3}{2}\Delta\right)\Delta\right\} + \delta_d, \quad \delta_d = O(\mu). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) легко получить соотношения для параметров сигнала, считая остаточные члены δ_d и δ_e малыми величинами:

$$\omega(t) = \frac{1}{\Delta} \arccos\left\{\frac{\sqrt{e(t + 2\Delta)}}{2}\right\}, \quad \gamma(t) = \frac{1}{2\Delta} \ln\{d(t + 2\Delta)\}. \quad (25)$$

Из (22) получаем выражения для коэффициентов уравнения (9):

$$q(t) = \frac{1}{4} p^2(t) + \frac{1}{2} \dot{p}(t) + \left[\frac{1}{\Delta} \arccos\left\{\frac{\sqrt{e(t + 2\Delta)}}{2}\right\} \right]^2, \quad p(t) = -\frac{1}{\Delta} \ln\{d(t + 2\Delta)\}, \quad (26)$$

которые, как показывают численные эксперименты, неустойчивы к шумам. Для удовлетворения условиям корректности [6; 17; 18] мы должны рассматривать соотношения на некотором интервале $L\Delta$ ($L > 4$), на котором выполняются условия (21). Из соотношений (26) и определения вариации функции как интеграла нормы ее производной, можно утверждать, что в случае ограниченности вариации коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ на интервале $L\Delta$, промежуточные функции $e(t)$ и $d(t)$ также являются функциями с ограниченной вариацией на интервале $L\Delta$. Запишем выражения (23) на интервале $L\Delta$ в виде

$$\begin{cases} e(t - L\Delta + \Delta) = \frac{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 3\Delta)x(t - L\Delta + \Delta)}{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 2\Delta)x(t - L\Delta)}, \\ \vdots \\ e(t) = \frac{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 4\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}, \\ \vdots \\ d(t - L\Delta + \Delta) = \frac{x^2(t - L\Delta) - x(t - L\Delta - \Delta)x(t - L\Delta + \Delta)}{x^2(t - L\Delta - \Delta) - x(t - L\Delta - 2\Delta)x(t - L\Delta)}, \\ \vdots \\ d(t) = \frac{x^2(t - \Delta) - x(t - 2\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}, \end{cases} \quad (27)$$

и будем регуляризовать эти выражения на множестве функций с ограниченной вариацией, а затем по соотношениям (26) переходить уже к искомым коэффициентам уравнения (9). Каждую из систем (27) можно рассматривать как операторное уравнение 1-го рода вида $Av = u$, причем вместо точных значений $\bar{u} = A\bar{v}$ и A нам известны такие их приближения u_δ и непрерывный оператор A_r , что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, $\|A_r v - Av\| \leq \psi(h, \|v\|)$. Для решения уравнения при известных A_r и u_δ обязательно знать величину изменения v . Можно ограничиться более широким классом изменения для первого приближения, а затем решать задачу методом градиента, минимизируя функци-

онал невязки $\Phi(v) = \|A_1 v - u_8\|^2$ на множестве функций, где v не превосходит заданного приращения на рассматриваемом интервале [18].

Недостатком решения поставленной задачи на множестве функций ограниченной вариации, связанным с тем, что ограниченность вариации не предполагает медленного изменения функции, является ступенчатое изменение значений, что дает погрешности определения производной в выражении (26). Априорная информация о медленном изменении функций $e(t)$ и $d(t)$ позволяет провести дополнительную регуляризацию путем сглаживания окном длиной M , по аналогии с методом усреднения для медленно меняющихся функций [2], и после этого вычислять коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$. Задав условие минимума невязки, получаемого после сглаживания решения, можно построить адаптивный алгоритм подбора оптимального значения M .

Функции $e(t)$ и $d(t)$ имеют разный характерный интервал изменения, поэтому в общем случае стоит рассматривать их на интервалах разной длины. Обозначим интервалы для $e(t)$ и $d(t)$ как $L_e \Delta$ и $L_d \Delta$, тогда выражения (27) следует записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t - L_e \Delta + \Delta) = \frac{x^2(t - L_e \Delta - \Delta) - x(t - L_e \Delta - 3\Delta)x(t - L_e \Delta + \Delta)}{x^2(t - L_e \Delta - \Delta) - x(t - L_e \Delta - 2\Delta)x(t - L_e \Delta)}, \\ \vdots \\ e(t) = \frac{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 4\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}, \\ \vdots \\ d(t - L_d \Delta + \Delta) = \frac{x^2(t - L_d \Delta) - x(t - L_d \Delta - \Delta)x(t - L_d \Delta + \Delta)}{x^2(t - L_d \Delta - \Delta) - x(t - L_d \Delta - 2\Delta)x(t - L_d \Delta)}, \\ \vdots \\ d(t) = \frac{x^2(t - \Delta) - x(t - 2\Delta)x(t)}{x^2(t - 2\Delta) - x(t - 3\Delta)x(t - \Delta)}. \end{array} \right. \quad (28)$$

Соответственно, и сглаживать полученные решения также следует окнами различной длины.

Таким образом, коэффициенты уравнения (9) $p(t)$ и $q(t)$ можно оценить по соотношениям (26), решая системы (28) методом регуляризации и сглаживанием полученных зависимостей некоторым окном. Покажем это с помощью численного моделирования на примере уравнения Матье.

4. Численное моделирование

Уравнение Матье является частным случаем уравнения (11), в котором коэффициент $\Omega^2(t)$ изменяется по периодическому закону. В размерных переменных оно имеет вид

$$\ddot{y} + \Omega_0^2(z - 2h \cos(2\Omega_0 t))y = 0, \quad (29)$$

то есть в уравнении (11) обозначено

$$\Omega^2(t) = \Omega_0^2(z - 2h \cos(2\Omega_0 t)).$$

Для уравнения Матье (29) известны периодические решения, которые носят название функций Матье. Они представляются асимптотическими рядами, которые сходятся тем быстрее, чем меньше коэффициент h в (29). Коэффициент z зависит от h и тоже рассчитывается с помощью асимптотических формул [1]. Асимптотическое решение уравнения (29) может быть найдено также с помощью ВКБ-приближения в квазигармонической форме (17).

Численное моделирование проводилось с помощью программы, написанной на языке FORTRAN, подпрограмм решения некорректных задач, описанных в работе [18] (PTIGR1, PTIGR2), а также библиотеки IMSL, которая содержит функции для вычисления асимптотических решений уравнения Матье и коэффициентов h и z . По заданному h находилось соответствующее собственное значение z , после чего для заданного Ω_0 вычислялось асимптотическое решение $y(t)$ необходимого порядка. Для перехода от $\Omega^2(t)$ к соотношениям для $p(t)$ и $q(t)$ предполагалось, что $p(t)$ меняется следующим образом:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t), \quad (30)$$

а $q(t)$, как следует из (12):

$$q(t) = \Omega_0^2 z - 2\Omega_0^2 h \cos(2\Omega_0 t) + \frac{1}{4}(p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t))^2 - \frac{1}{2} p_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t).$$

В этом выражении второе слагаемое не является медленно меняющимся в смысле условия (20), а его введение обусловлено структурой уравнения Матье (29) для того, чтобы получить аналитическое решение уравнения (9) с переменным коэффициентом $p(t)$. На динамику реальной инерционной системы это быстро осциллирующее слагаемое не влияет. Выделим как имеющую физический смысл медленно меняющуюся часть $\tilde{q}(t)$

$$\tilde{q}(t) = \Omega_0^2 z + \frac{1}{4}(p_0 + p_1 \cos(\Omega_1 t))^2 - \frac{1}{2} p_1 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) = q(t) + 2\Omega_0^2 h \cos(2\Omega_0 t). \quad (31)$$

При этом должны выполняться условия на медленность изменения параметров:

$$\tilde{q}(t) \sim \mu \tilde{q}^2(t), \quad \dot{p}(t) \sim \mu p^2(t), \quad 0 < \mu \ll 1,$$

а исследуемый сигнал из соотношения (10) должен иметь вид:

$$x(t) = y(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[p_0 t + \frac{p_1}{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) \right] \right\}.$$

К исследуемому сигналу добавлялся аддитивный белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением (СКО) σ_ξ и решались системы уравнений (27) методом условного градиента. Численное моделирование производилось с дискретными аналогами всех полученных выражений с шагом дискретизации Δ , а производная в выражении (26) вычислялась по разностной схеме. В качестве сглаживающего применялось окно Хэмминга [13]. Определялась систематическая погрешность как среднее значение относительного отклонения требуемой величины по 100 реализациям, а затем полученные значения усреднялись по интервалу наблюдения. Также рассчитывалась случайная погрешность как значения СКО на реализациях, которые потом усреднялись по интервалу наблюдения. На рисунках 1 и 2 приведены зависимости систематических погрешностей (Δ_p и Δ_q) и случайных погрешностей (σ_p и σ_q) оценок $p(t)$ и $\tilde{q}(t)$ соответственно, от значения СКО σ_ξ при $\Delta = 0,21$; $L = 653$; $h = 0,1$; $\Omega_0 = 1,3$; $\Omega_1 = 0,027$; $p_0 = 0,035$; $p_1 = 0,01$. Значения функций получены сглаживанием регуляризованного решения окном длиной $M = 137$.

Видно, что как систематическая, так и случайная погрешности оценки коэффициента $p(t)$ увеличиваются с ростом σ_ξ значительно быстрее, чем для $\tilde{q}(t)$. Это связано с тем, что порядок величин этих коэффициентов разный: $p^2(t) \sim \mu q(t)$. Уменьшить погрешности возможно подбором интервала $L\Delta$, а также при наличии какой-либо дополнительной априорной информации (например, об уровне шума, величине или виде самих коэффициентов), выбором

алгоритма регуляризации [18]. В погрешность оценивания $p(t)$ значительный вклад вносят погрешности вычисления из-за малости самого коэффициента. В целом можно сказать, что рассмотренный метод дает состоятельную оценку коэффициентов, но оценка $\tilde{q}(t)$ смещена, хотя и очень незначительно. Видимо, это смещение также обусловлено погрешностью вычислений и отброшенным остаточным членом в формуле (16). Смещение и случайная погрешность оценки медленно меняющейся частоты $\omega(t)$ из выражения (25) практически совпадает с графиком на рисунке 2.

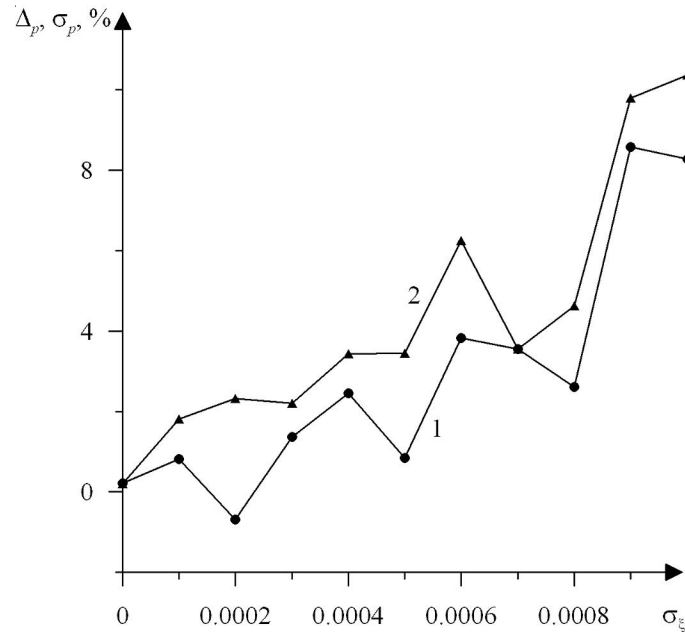


Рис. 1. Систематическая Δ_p (1) и случайная σ_p (2) погрешности оценивания коэффициента $p(t)$ в зависимости от уровня шума σ_ξ

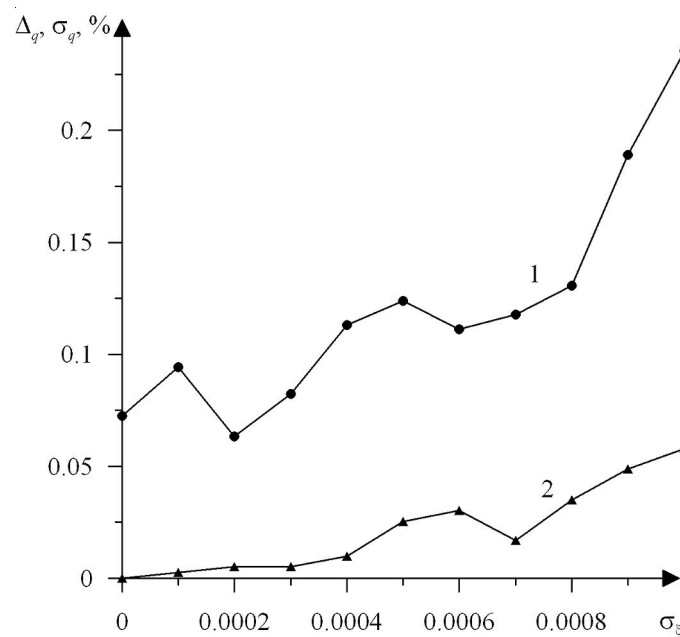


Рис. 2. Систематическая Δ_q (1) и случайная σ_q (2) погрешности оценивания коэффициента $\tilde{q}(t)$ в зависимости от уровня шума σ_ξ

Следует отметить, что условие медленности изменения частоты не предполагает ограниченности спектра сигнала (17), поэтому при моделировании использовали аддитивный белый шум, который имеет неограниченный спектр. Если же известна априорная информация о полосе частот исходного сигнала, на практике будет использован фильтр, ограничивающий спектр шума. В этом случае при моделировании следует использовать шум с ограниченным спектром, что уменьшит погрешности.

Заключение

Помимо задачи определения коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$ рассмотренный алгоритм возможно применять для оценки и других параметров. К примеру, в общем случае при оцифровке сигнала шаг дискретизации Δ не является фиксированным. Если Δ задается, например, кварцевым резонатором, то при изменении температуры будет изменяться и частота резонатора, а следовательно, и шаг дискретизации, то есть, в общем случае, будет зависимость от времени $\Delta(t)$. При дискретизации гармонического сигнала с известной фиксированной частотой ω , но не обязательно постоянной амплитуды $a(t)$, например сигнал квантового эталона частоты, можно получить соотношения для оценки $\Delta(t)$ при условии, что $\Delta(t)$ является медленно меняющейся функцией. Дискретизированный сигнал представим в виде

$$x_n = a_n \sin(\omega t_n + \varphi)$$

и обозначим

$$t_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad \Delta_i = \Delta_0 + \alpha_i, \quad t_n = n\Delta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i = n\Delta_0 + \delta_n.$$

Здесь Δ_i – значение шага дискретизации в i -й момент времени; Δ_0 – заданный шаг дискретизации; α_i – отклонение шага дискретизации Δ_i от Δ_0 (изменение этой величины принимаем за малый параметр μ). Составим соотношение вида (23) для отсчетов сигнала в момент времени t_n

$$c_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{x_n}, \quad x_n \neq 0,$$

тогда, повторяя процедуру по разложению отсчетов сигнала в ряд Тейлора вокруг центральной точки (в данном случае x_n) и пренебрегая слагаемыми больше первого порядка малости по μ , получим соотношение вида (25)

$$\tilde{\Delta}_n = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{c_n}{2}\right).$$

Рассматривая это соотношение в другие моменты времени и решая систему, аналогичную (27), методом регуляризации, можно оценить медленное изменение шага дискретизации. Этот алгоритм позволяет определять нестабильность частоты кварцевых генераторов или сличать вторичные или рабочие эталоны частоты с первичным.

Также возможно предложенным методом решить задачу о разделении двух близких частот в спектре. В этом случае модель сигнала запишем в виде

$$x(t) = A_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad |\Omega| \ll \omega_0,$$

$$\theta(t) = \arctg \left[\frac{A_1 \sin(\Omega t + \varphi_1) - A_2 \sin(\Omega t - \varphi_2)}{A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Omega t - \varphi_2)} \right],$$

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Тогда исходный сигнал преобразуется к виду (1)

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)).$$

Так как $A(t)$ и $\theta(t)$ зависят от разностной частоты, то они являются медленно меняющимися функциями, а следовательно, применяя рассмотренный алгоритм, можно оценить исходные частоты ω_1 и ω_2 , даже если они спектрально не разрешены при ширине спектра огибающих $A_1(t)$ и $A_2(t)$, большей чем Ω .

Подобных примеров можно привести много, но несомненно, что априорная информация о медленности изменения параметров системы позволяет получать достаточно простые алгоритмы и решения задачи их оценивания.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа частично поддержана грантом РФФИ № 10-07-9713 p_a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
2. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 408 с.
3. Вайнштейн, Л. А. Разделение частот в теории колебаний и волн / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман. – М. : Наука, 1983. – 288 с.
4. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – 276 с.
5. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Физматгиз, 1959. – 212 с.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
7. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
8. Игнатъев, В. К. / В. К. Игнатъев, А. В. Никитин, С. В. Юшанов // Изв. вузов. Электромеханика. – 2009. – № 2. – С. 28–32.
9. Квантовая радиофизика / под ред. В. И. Чижики. – СПб. : Изд-во СПбГУ, 2004. – 689 с.
10. Ландау, Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2004. – 800 с.
11. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М. : Гостехтеориздат, 1956. – 632 с.
12. Леонтъев, А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтъев. – М. : Наука, 1983. – 176 с.
13. Марпл-мл., С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения : пер. с англ. / С. Л. Марпл-мл. – М. : Мир, 1990. – 584 с.
14. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
15. Никитин, А. В. / А. В. Никитин, С. В. Юшанов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 57–63.
16. Островский, Л. А. Введение в теорию модулированных волн / Л. А. Островский, А. И. Потапов. – М. : Физматлит, 2003. – 400 с.
17. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 286 с.
18. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 232 с.

19. Трубецков, Д. И. Линейные колебания и волны : учеб. пособие / Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнев. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2001. – 416 с.
20. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. – М. : Наука, 1983. – 352 с.
21. Хургин, Я. И. Финитные функции в физике и технике / Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. – М. : Наука, 1971. – 408 с.
22. Cohen, L. // Proc. IEEE. – 1989. – V. 46, № 7. – P. 941–981.
23. Gabor, D. // IJEE. – 1946. – V. 93. – P. 429–457.
24. Polya, G. // Journal London Math. Soc. – 1926. – V. 1. – P. 12–15.

ABOUT THE UNIQUENESS OF QUASIHARMONIOUS REPRESENTATION

V.K. Ignatjev, A.V. Nikitin, S.V. Yushanov

It is shown that if for a signal exists quasiharmonious representation with the limited slowly varying frequency, it is unique. It is shown that under condition of a slowness of change of parameters of system, representable in the form of the differential equation of the second order with variable factors, the equation decision exists in the form of quasiharmonious representation with slowly varying amplitude and frequency. It is proposed regularizing algorithm of estimation of parameters of a signal with quasiharmonious representation and a method of estimation of slowly varying factors of the differential equation of the second order. Results of statistical modeling are shown.

Key words: *quasiharmonic representation, slowly varying parameters, instantaneous frequency, inverse problem, condition of well-posed problem, Tikhonov regularization.*