УДК 514.742.43
ББК 22.1

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД ВЕКТОРАМИ

Попов Игорь Павлович

Ведущий специалист отдела инновационного развития
Департамента экономического развития, торговли и труда
Правительства Курганской области
popov_ip@kurganobl.ru
ул. Гоголя, 56, 640024 г. Курган, Российская Федерация

Аннотация. Вводится понятие о слагаемых векторных произведений, которыми являются первая или ортоположительная часть и вторая или ортоотрицательная часть; применение этого подхода к векторному произведению оператора Гамильтона (набла) на себя самого приводит к появлению векторного дифференциального смешанного оператора второго порядка, являющегося ключевым элементом при определении понятий поверхностного векторного анализа – смешанного градиента, смешанной производной по направлению, смешанных дивергенции и ротора. Определена операция сопряженного векторного произведения векторных полей. Показано, что функция может быть восстановлена по своему поверхностному градиенту. Представлены некоторые физические интерпретации вводимых понятий, в том числе, определения вектора Умова как смешанного градиента от функции мощности, объемной плотности энергии силового поля как смешанной дивергенции от функции пространственного распределения сил и т. д.

Ключевые слова: оператор, смешанные градиент, дивергенция и ротор, координаты, сопряженный вектор.

Введение

Работа посвящена рассмотрению ряда операций на пространстве гладких функций и векторных полей в $\mathbf{R}^3$. В качестве исходного пункта могут выступать нулевые величины. Их можно условно разделить на две категории. К первой категории относятся величины, содержимое которых «пусто». Ко второй – состоящие из величин, сумма которых равна нулю. К последней категории относится векторное произведение оператора Гамильтона (набла) на себя самого. При этом использование взаимно противоположных компонентов этого произведения создает определенные перспективы, в частности, развития элементов *поверхностного векторного анализа*. К таким элементам могут быть отнесены векторный дифференциальный смешанный оператор, смешанный градиент, смешанная производная по направлению, смешанные дивергенция и ротор, являющиеся аналогами соответствующих величин первого порядка [2; 3]. Названные операции относятся к поверхностному дифференцированию, которое можно рассматривать в качестве обратной задачи к поверхностному интегрированию. Перечисленные операции могут использоваться для получения разложений ряда векторных представлений второго порядка, часть которых имеет аналоги первого порядка. В литературе представлен достаточно обширный арсенал средств символического метода преобразования векторных и скалярных полей [1]. Целью настоящей работы является расширение этого арсенала.

§ 1. Слагаемые векторных произведений

Для векторов **G** и **H** имеет место операция векторного произведения

$\mathbf{G}\times\mathbf{H} = (G_yH_z - G_zH_y)\mathbf{i} + (G_zH_x - G_xH_z)\mathbf{j} + (G_xH_y - G_yH_x)\mathbf{k}$.

Его можно представить в виде:

$\mathbf{G}\times\mathbf{H} = (G_yH_z\mathbf{i} + G_zH_x\mathbf{j} + G_xH_y\mathbf{k}) - (G_zH_y\mathbf{i} + G_xH_z\mathbf{j} + G_yH_x\mathbf{k})$.

Определение 1.1. Операция

$\mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{H} := G_yH_z\mathbf{i} + G_zH_x\mathbf{j} + G_xH_y\mathbf{k}$

называется *первой или ортоположительной частью векторного произведения* $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ векторных полей $\mathbf{G} = G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{H} = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k}$.

Определение 1.2. Операция

$\mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} \mathbf{H} := \mathbf{H} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{G} = G_zH_y\mathbf{i} + G_xH_z\mathbf{j} + G_yH_x\mathbf{k}$

называется *второй или ортоотрицательной частью векторного произведения*.

Очевидно, что $\mathbf{G} \times \mathbf{H} = \mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{H} - \mathbf{H} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{G} = \mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{H} - \mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} \mathbf{H}$.

Все вышесказанное справедливо и для ротора.

Определение 1.3. Операция

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M} := \nabla \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial M_y}{\partial x}\mathbf{k}$$

называется *первой или ортоположительной частью ротора* $\mathrm{rot}\mathbf{M}$ *векторного поля* $\mathbf{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$.

Определение 1.4. Операция

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M} := \nabla \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M} = \frac{\partial M_y}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M_z}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial M_x}{\partial y}\mathbf{k}$$

называется *второй или ортоотрицательной частью ротора* $\mathrm{rot}\mathbf{M}$.

Очевидно, что $\mathrm{rot}\mathbf{M} = \mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M} - \mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M}$ или $\nabla\times\mathbf{M} = \nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{M} - \nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{M}$.

§ 2. Сопряженные векторы

Определение 2.1. Операция $\mathbf{G} \times^* \mathbf{H} := \mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{H} - \mathbf{H} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{G} = \mathbf{G} \times_{\mathrm{I}} \mathbf{H} + \mathbf{G} \times_{\mathrm{II}} \mathbf{H}$

называется *сопряженным векторным произведением* векторных полей **G** и **H**.

Определение 2.2. Операция

$\mathrm{rot}^*\mathbf{M} := \mathrm{rot}_{\mathrm{I}}\mathbf{M} + \mathrm{rot}_{\mathrm{II}}\mathbf{M}$ или $\nabla\times^*\mathbf{M} = \nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{M} + \nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{M}$

называется *сопряженным ротором векторного поля* **M**.

Определение 2.3. Оператор

$$\nabla_S := \nabla \times_{\mathrm{I}} \nabla = \nabla \times_{\mathrm{II}} \nabla = \frac{\nabla \times^* \nabla}{2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathbf{k}$$

называется векторным дифференциальным смешанным оператором.

§ 3. Смешанный градиент и смешанная производная по направлению

Определение 3.1. Вектор

$$\operatorname{grad}_S W := \nabla_S W = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\,\mathbf{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\mathbf{k} \tag{3.1}$$

называется смешанным градиентом функции W.

По аналогии с производной по направлению вычисляется *смешанная производная по направлению*

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} := \left(\operatorname{grad}_S W\right)\cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\cos\varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\cos\psi + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\cos\theta. \tag{3.2}$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\cos\psi + \mathbf{k}\cos\theta$ – поле единичных нормалей поверхности дифференцирования.

Смешанная производная функции $W(x, y, z)$ (скалярного поля) по направлению равна проекции смешанного градиента на единичный вектор нормали к поверхности дифференцирования (в соответствующей точке):

$$\frac{d_S^2 W}{d\sigma} = \left|\operatorname{grad}_S W\right| \cos\left(\operatorname{grad}_S W, \mathbf{n}\right).$$

Смешанный градиент скалярного поля равен по величине смешанной производной поля по направлению, для которой эта производная (в соответствующей точке) является максимальной, и совпадает по направлению с единичным вектором нормали к поверхности дифференцирования:

$$\max\left(\frac{d_S^2 W}{d\sigma}\right) = \left|\operatorname{grad}_S W\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2}.$$

Теорема 3.1. *Пусть две функции $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ таковы, что*

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z}. \tag{3.3}$$

Тогда разность этих функций можно представить в виде

$$U_1(x, y, z) - U_2(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z). \tag{3.4}$$

Теорема доказывается прямой подстановкой (3.4) в (3.3).

Следствие. *Функция $U(x, y, z)$ может быть восстановлена по своему поверхностному градиенту* **G** *однозначно с точностью до слагаемого вида*

$$f(x) + g(y) + h(z)$$

в соответствии с формулой:

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy - 2V =$$

$$= P_1(x, y, z) + P_2(y, z) + Q_1(x, y, z) + Q_2(x, z) + R_1(x, y, z) + R_2(x, y) - 2V. \tag{3.5}$$

При этом $V = P_1 = Q_1 = R_1$, а интегралы понимаются как повторные неопределенные с нулевыми константами интегрирования.

Действительно,

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial G_z}{\partial z}. \qquad (3.6)$$

U можно представить в виде:

$$U = \iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy + f(x,y,z).$$

При этом

$$\iint G_x dydz = P_1(x,y,z) + P_2(y,z),$$

$$\iint G_y dxdz = Q_1(x,y,z) + Q_2(x,z),$$

$$\iint G_z dxdy = R_1(x,y,z) + R_2(x,y),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_x dydz = \frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 P_1}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_y dxdz = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial^3 Q_1}{\partial x \partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \iint G_z dxdy = \frac{\partial G_z}{\partial z} = \frac{\partial^3 R_1}{\partial x \partial y \partial z}.$$

С учетом (3.6) $P_1 = Q_1 = R_1 = V(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z) = -2V$. При этом

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[\iint G_x dydz + \iint G_y dxdz + \iint G_z dxdy + f(x,y,z) \right] =$$

$$= G_x + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[Q_1 + Q_2(x,z) + R_1 + R_2(x,y) - 2V \right] = G_x.$$

Аналогично $\partial^2 U/(\partial x \partial z) = G_y$, $\partial^2 U/(\partial x \partial y) = G_z$, что подтверждает выражение (3.5).

Пример 2. $\operatorname{grad}_S U = \left(3z^2 - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{i} + \left[\frac{1}{y} - \sin(x+z)\right]\mathbf{j} + \left(2y - \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{k}$,

$$U = yz^3 + \frac{xz}{y} + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2 + \frac{xz}{y} - 2\frac{xz}{y} = yz^3 + \frac{xz}{y} + \sin(x+z) + xy^2.$$

§4. Смешанная дивергенция и смешанный ротор

В (3.1) имеет место произведение вектора ∇_S на скаляр W. Могут быть рассмотрены скалярное и векторное произведения ∇_S на вектор $\mathbf{M}$.

Определение 4.1. Операция

$$\operatorname{div}_S \mathbf{M} := \nabla_S \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial y}$$

называется смешанной дивергенцией векторного поля $\mathbf{M}$.

Определение 4.2. Операция

$$\operatorname{rot}_S \mathbf{M} := \nabla_S \times \mathbf{M} = \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{k}$$

называется смешанным ротором векторного поля **M**.

Определение 4.3. Операция

$$\operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z}\mathbf{k}$$

называется *первой или ортоположительной частью смешанного ротора* $\operatorname{rot}_S \mathbf{M}$.

Определение 4.4. Операция

$$\operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z}\mathbf{k}$$

называется *второй или ортоотрицательной частью смешанного ротора* $\operatorname{rot}_S \mathbf{M}$.

$$\operatorname{rot}_S \mathbf{M} = \operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} - \operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M} \quad \text{или} \quad \nabla_S \times \mathbf{M} = \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} - \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M}.$$

Определение 4.5. Операция

$$\operatorname{rot}^*_S \mathbf{M} := \operatorname{rot}_{S,\mathrm{I}} \mathbf{M} + \operatorname{rot}_{S,\mathrm{II}} \mathbf{M} \quad \text{или} \quad \nabla_S \times^* \mathbf{M} := \nabla_S \times_{\mathrm{I}} \mathbf{M} + \nabla_S \times_{\mathrm{II}} \mathbf{M}$$

называется *сопряженным смешанным ротором векторного поля* **M**.

§5. Некоторые формулы

$$\nabla_S(\alpha V + \beta W) = \alpha \nabla_S V + \beta \nabla_S W \qquad (\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}).$$

$$\nabla_S \cdot (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_S \cdot \mathbf{E} + \beta \nabla_S \cdot \mathbf{F}.$$

$$\nabla_S \times (\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{F}) = \alpha \nabla_S \times \mathbf{E} + \beta \nabla_S \times \mathbf{F}.$$

$$\Delta_S \equiv \nabla_S \cdot \nabla_S \equiv \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div}_S \mathbf{F} = \nabla(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) = \nabla_S \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S)\mathbf{F}.$$

$$\operatorname{grad}_S \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla_S(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) + (\nabla \cdot \nabla_S)\mathbf{F}.$$

$$\operatorname{grad}_S \operatorname{div}_S \mathbf{F} = \nabla_S(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) = \nabla_S \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) + \Delta_S \mathbf{F}.$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}_S \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) = \nabla_S(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S)\mathbf{F}.$$

$$\operatorname{rot}_S \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla_S \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla_S)\mathbf{F}.$$

$$\operatorname{rot}_S \operatorname{rot}_S \mathbf{F} = \nabla_S \times (\nabla_S \times \mathbf{F}) = \nabla_S(\nabla_S \cdot \mathbf{F}) - \Delta_S \mathbf{F}.$$

$$\operatorname{rot}_S \operatorname{grad}_S W = \nabla_S \times \nabla_S W \equiv 0.$$

$$\operatorname{div}_S \operatorname{rot}_S \mathbf{F} = \nabla_S \cdot (\nabla_S \times \mathbf{F}) \equiv 0.$$

$$\nabla_S(VW) = W\nabla_S V + V\nabla_S W + \nabla V \times^* \nabla W.$$

$$\nabla_S \cdot (W\mathbf{F}) = W\nabla_S \cdot \mathbf{F} + (\nabla_S W) \cdot \mathbf{F} + \nabla W \cdot (\nabla \times^* \mathbf{F}).$$

§6. Некоторые физические интерпретации

Если в некоторой области среды (поля) объемом V определена функция мощности, сконцентрированной в этой области,

$$P(x, y, z) = \iiint_V p dv = \int_{z_0}^{z} dz \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} p(x, y, z) dx,$$

где $p(x, y, z)$ – объемная плотность мощности, то смешанный градиент от этой функции представляет собой вектор Умова (вектор Умова – Пойнтинга для электромагнитного поля), то есть вектор скорости движения энергии через единицу поверхности.

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}_S P(x, y, z) = \nabla_S P(x, y, z).$$

Производная функции мощности $P(x, y, z)$ по некоторой поверхности с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ представляет собой количество энергии, проходящей через единицу площади этой поверхности в единицу времени.

$$\frac{d_S^2 P}{d\sigma} = \mathrm{grad}_S P \cdot \mathbf{n} = \nabla_S P \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}.$$

Пусть в некоторой области поля гравитации (или электростатического поля) для пробной массы (или электрического заряда) определена функция пространственного распределения сил $\mathbf{F}(x, y, z)$, действующих на нее (на него) со стороны поля. Тогда смешанная дивергенция векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ представляет собой объемную плотность энергии гравитационного (или электростатического) поля в рассматриваемой точке.

$$\mathrm{div}_S \mathbf{F} = \nabla_S \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V}.$$

Если для излучающего диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}_e$ известна функция пространственного распределения производной напряженности электрического поля по времени $d\mathbf{E}/dt\,(x, y, z)$, то величина $A_1 |\mathbf{p}_e| \mathrm{rot}_S\, d\mathbf{E}/dt$ представляет собой вектор Умова – Пойнтинга в рассматриваемой точке.

$$A |\mathbf{p}_e| \mathrm{rot}_S \frac{d\mathbf{E}}{dt} = A |\mathbf{p}_e| \nabla_S \times \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{U}(x, y, z),$$

где A – безразмерный коэффициент.

Заключение

Основным результатом работы является «расщепление» векторного произведения на две части – ортоположительную и ортоотрицательную. Это позволяет, в частности, в случае векторного произведения вектора на себя самого из нулевой величины, которой является это произведение, «извлечь» две ненулевые. Применение этого приема к векторному произведению оператора Гамильтона (набла) на себя самого приводит к появлению векторного дифференциального смешанного оператора второго порядка, являющегося ключевым элементом при определении понятий поверхностного векторного анализа – смешанного градиента, смешанной производной по направлению, смешанных дивергенции и ротора.

Введенные элементы поверхностного векторного анализа, в частности, расширяют арсенал средств для исследования физических полей, в том числе определения вектора Умова как смешанного градиента от функции мощности, объемной плотности энергии силового поля как смешанной дивергенции от функции пространственного распределения сил и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов, М. Л. Векторный анализ: Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.
2. Попов, И. П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия / И. П. Попов // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. – 2009. – Вып. 5. № 24 (162). – С. 34–39.
3. Попов, И. П. О пространственной конфигурации вихревого электрического поля / И. П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. № 1 (15). – С. 50–51.

REFERENCES

1. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Vektornyj analiz: Zadachi I primery s podrobnymi reshenijami* [Vector analyses: Tasks and examples with detailed solves]. Moscow, Editorial URSS, 2002. 144 p.
2. Popov I.P. O nekotoryh aspektah magnitojelektricheskogo vzaimodejstvija [Some aspects of the magnetoelectric interaction]. *Vestnik Cheljabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika* [Gerald of the Chelyabinsk State University. Physics], 2009, iss. 5, no. 24 (162), pp. 34-39.
3. Popov I.P. O prostranstvennoj konfiguracii vihrevogo jelektricheskogo polja [On the spatial configuration of the vortex electric field]. *Vestnik Kurganskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Kurgan State University. Natural sciences], 2009, iss. 2, no. 1 (15), pp. 50-51.

SOME VECTOR OPERATIONS

Popov Igor Pavlovich

Leading Specialist of Innovative Development of the Department of Economic Development,
Trade and Labour of the Government of Kurgan region
popov_ip@kurganobl.ru
Gogolya St., 56, 640024 Kurgan, Russian Federation

Abstract. The work is devoted to a series of operations on the space of smooth functions and vector fields in three-dimensional Euclidean space. Zero values are divided into two categories: the first category includes the value of the content of which "empty", the second – consisting of values whose sum is equal to zero. The latter category includes the cross product of a vector by itself. We introduce the notion of the terms of the vector products, which is the first or ortopositive part and the second part or ortoonegative; application of this approach to the vector product of the Hamiltonian operator (nabla) on itself gives rise to a mixed vector differential operator of second order, is a key element in defining the concept of surface vector analysis – mixed gradient mixed derivative in the direction of mixed divergence and rotor. It is shown that the above mentioned operations are superficial differentiation, which can be regarded as the inverse problem to surface integration, swarms that these operations can be used to produce a series of expansions vector representations of the second order, part of which has an equivalent first order. Define the operation of the conjugate of the vector product of vector fields. It is shown that the function can be restored in its mixed gradient. Presented some of the physical interpretation of the concepts introduced, including the definition of Umov mixed gradient as a function of power, volumetric energy density of the force field as a mixed divergence of the function of the spatial distribution of forces, etc.

Key words: operator, mixed gradient, divergence and curl, coordinates, conjugate vector.