УДК 517.9
ББК 22.16

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа,
Кургантюбинский государственный университет им. Носира Хусрава
faizullo100@yahoo.com
ул. Айни, 67, 735140 г. Кургантюбе, Республика Таджикистан

Аннотация. В данной работе рассматривается система из двух уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, причем эти уравнения связаны в силу неизвестной функции. Для рассматриваемой системы при $\alpha = \beta = \gamma = 1$ получены представления многообразия решений через одну произвольную функцию одной независимой переменной и одну произвольную постоянную и изучены свойства полученных решений. На конце для названной системы поставлена и решена начально-краевая задача A_1.

Ключевые слова: переопределенная система, сингулярное уравнение, прямоугольник, многообразия решений, сингулярная точка.

Пусть D — прямоугольник $D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c_2(x,y)}{r^\gamma} = \dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2,\ a_j(x,y),\ b_1(x,y),\ c_j(x,y),\ j = 1, 2,$ — заданные функции области D, $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1–8].

Целью настоящей работы явилось получение представления многообразия решений уравнений (1) при помощи произвольной функции и произвольной постоянной.

В настоящей работе на основе способа, разработанного в [4; 5], получено представление многообразия решений системы уравнений (1).

В дальнейшем обозначим $C_2(D)$ — класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D).$$

Пусть $a_1(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$, $\;b_1(x,y),\; c_1(x,y),\; f_1(x,y) \in C(\overline{D})$.

В этом случае первое уравнение системы (1) представим в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x,y)}{r}\right) u = \frac{f_1(x,y) + c_1(x,y)u}{r^2}, \tag{2}$$

где

$$c_3(x,y) = -c_1(x,y) + r^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r}\right) + a_1(x,y) b_1(x,y).$$

Введя новую неизвестную функцию

$$\vartheta_1(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_1(x,y)}{r} u, \tag{3}$$

при $c_3(x,y) = 0$, сведем задачу к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{r} v_1 = \frac{f_1(x,y)}{r^2}. \tag{4}$$

Решение уравнения (4), согласно [4], запишем в виде

$$\vartheta_1(x,y) = \left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(0,0)} \exp\left[-\omega_{b_1}^1(x,y)\right] \times$$
$$\times \left\{ \Psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{t^2+y^2} \left(\frac{t+\sqrt{t^2+y^2}}{y}\right)^{b_1(0,0)} \exp\left[\omega_{b_1}^1(t,y)\right] dt \right\}, \tag{5}$$

где

$$\omega_b^1(x,y) = \int_0^x \frac{b_1(t,y) - b_1(0,0)}{\sqrt{t^2+y^2}} dt.$$

Теперь, решая уравнение (3), выражаем $u(x,y)$ через $\vartheta_1(x,y)$

$$u(x,y) = \left(\frac{y+r}{x}\right)^{-a_1(0,0)} \exp\left[-\omega_{a_1}^1(x,y)\right] \times$$
$$\times \left\{ \varphi_1(x) + \int_0^y \vartheta_1(x,s) \exp\left[\omega_{a_1}^1(x,s)\right] \left(\frac{s+\sqrt{x^2+s^2}}{x}\right)^{a_1(0,0)} ds \right\}, \tag{6}$$

где

$$\omega_{a_1}^1(x,y)=\int_0^y \frac{a_1(x,s)-a_1(0,0)}{\sqrt{x^2+s^2}}ds.$$

В (6) вместо $\vartheta_1(x,s)$, подставляя его значение из (5), получим

$$u(x,y)=\exp\left[-\omega_{a_1}^1(x,y)\right]\left(\frac{y+r}{x}\right)^{-a_1(0,0)}\times$$

$$\times\{\varphi_1(x)+\int_0^y \exp\left[\omega_{a_1}^1(x,s)-\omega_{b_1}^1(x,s)\right]\left(\frac{s+\sqrt{x^2+s^2}}{s}\right)^{a_1(0,0)}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+s^2}}{s}\right)^{-b_1(0,0)}\times$$

$$\times\left(\psi_1(s)+\int_0^x \frac{f_1(t,s)}{t^2+s^2}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+s^2}}{s}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega_{b_1}^1(t,s)\right]dt\right)ds\}\equiv$$

$$\equiv M_1\left(\varphi_1(x),\psi_1(y),f_1(x,y)\right). \tag{7}$$

Пусть во втором уравнении системы $a_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D})$, $c_2(x,y)$, $f_2(x,y)\in C(\overline{D})$ и выполнено условие

$$c_4(x,y)=-c_2(x,y)+r\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2(x,y)}{r}\right).$$

Тогда второе уравнение системы представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a_2(x,y)}{r}u\right)=\frac{f_2(x,y)+c_4(x,y)u(x,y)}{r}. \tag{8}$$

Введя новую неизвестную функцию

$$\vartheta_2(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a_2(x,y)}{r}u, \tag{9}$$

при $c_4(x,y)=0$ сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}=\frac{f_2(x,y)}{r}. \tag{10}$$

Из уравнения (10) находим $\vartheta_2(x,y)$

$$\vartheta_2(x,y)=\psi_2(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)}{t^2+y^2}dt. \tag{11}$$

Теперь уравнение (9) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\exp\left[\omega_{a_2}^1(x,y)\right]\left(\frac{x+r}{y}\right)^{a_2(0,0)}u(x,y)\}=$$
$$=\vartheta_2(x,y)\exp\left[\omega_{a_2}^1(x,y)\right]\left(\frac{x+r}{y}\right)^{a_2(0,0)}, \tag{12}$$

где

$$\omega^1_{a_1}(x,y) = \int_0^x \frac{a_2(t,y)-a_2(0,0)}{\sqrt{t^2+y^2}}dt.$$

Потребовав выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{r}\right) \quad \text{в} \quad D, \tag{13}$$

а также продифференцировав равенство (12), после некоторых упрощений получим выражение

$$\varphi_1'(x) + \frac{a_2(x,0)}{x}\varphi_1(x) = \exp\left[\omega^1_{a_1}(x,y)\right]\left(\frac{y+r}{x}\right)^{a_1(0,0)} \times$$

$$\times\left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)dt}{\sqrt{t^2+y^2}}\right) - \frac{a_2(x,0)}{x}\int_0^y \exp[\omega^1_{a_1}(x,s) -$$

$$-\omega^1_{b_1}(x,s)]\left(\frac{s+\sqrt{x^2+s^2}}{x}\right)^{a_1(0,0)}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+s^2}}{s}\right)^{-b_1(0,0)} \times$$

$$\times\left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s)}{\sqrt{t^2+s^2}}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+s^2}}{s}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega^1_{b_1}(t,s)\right]dt\right)ds -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \exp\left[\omega^1_{a_1}(x,s)-\omega^1_{b_1}(x,s)\right]\left(\frac{s+\sqrt{x^2+s^2}}{x}\right)^{a_1(0,0)}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+s^2}}{s}\right)^{-b_1(0,0)} \times$$

$$\times\left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t,s)}{t^2+s^2}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+s^2}}{s}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega^1_{b_1}(t,s)\right]dt\right)ds. \tag{14}$$

Из условия независимости левой части (14) от y, получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\exp\left[\omega_{a_1}^1(x,y)\right]\left(\frac{y+r}{x}\right)^{a_1(0,0)}\left(\psi_2(y)+\int_0^x\frac{f_2(t,y)dt}{\sqrt{t^2+y^2}}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\{\exp\left[\omega_{a_1}^1(x,y)-\omega_{b_1}^1(x,y)\left(\frac{y+r}{x}\right)^{a_1(0,0)}\left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(0,0)}\right]\times$$

$$\times\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f_1(t,y)}{t^2+y^2}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+y^2}}{y}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega_{b_1}^1(t,y)\right]dt\right)\}=$$

$$=\frac{a_2(x,0)}{x}\exp\left[\omega_{a_1}^1(x,y)-\omega_{b_1}^1(x,y)\right]\left(\frac{y+r}{x}\right)^{a_1(0,0)}\left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(0,0)}\times$$

$$\times\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f_1(t,y)}{t^2+y^2}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+y^2}}{y}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega_{b_1}^1(t,y)\right]dt\right). \tag{15}$$

Преобразуя последнее слагаемое равенство (14), согласно (15), для определения $\varphi_1(x)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\varphi_1'(x)+\frac{a_2(x,0)}{x}\varphi_1(x)=F_1(x), \tag{16}$$

где

$$F_1(x)=\psi_2(0)+\int_0^x\frac{f_2(t,0)}{t}dt. \tag{17}$$

Решение уравнения (16), согласно [4], запишем в виде

$$\varphi_1(x)=\exp\left[-\omega_{a_2}^1(x,0)\right]x^{-a_2(0,0)}\times$$

$$\times\left(c_1+\int_0^x F_1(t)t^{a_2(0,0)}\exp\left[\omega_{a_2}^1(t,0)\right]dt\right)\equiv N_1(c_1,f_2(x,0)), \tag{18}$$

где

$$\omega_{a_2}^1(x,0)=\int_0^x\frac{a_2(t,0)-a_2(0,0)}{t}dt,$$

c_1 — произвольная постоянная.

В равенстве (15), выполняя операции дифференцирования, получим

$$ra_1(x,y)\left(\psi_2(y)+\int_0^x \frac{f_2(t,y)dt}{\sqrt{t^2+y^2}}\right)+r^2\psi_2'(y)+r^2\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x \frac{f_2(t,y)}{\sqrt{t^2+y^2}}dt=$$

$$=r(a_2(x,y)-b_1(x,y))\exp\left[-\omega_{b_1}^1(x,y)\right]\left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(0,0)}\times \tag{19}$$

$$\times\left(\psi_1(y)+\int_0^x \frac{f_1(t,y)}{t^2+y^2}\left(\frac{t+\sqrt{t^2+y^2}}{y}\right)^{b_1(0,0)}\exp\left[\omega_{b_1}^1(t,y)\right]dt\right)+f_1(x,y).$$

В равенстве (20), переходя к пределу при $x\to 0$, определим $\psi_1(y)$ в виде

$$\psi_1(y)=\frac{y}{a_2(0,y)-b_1(0,y)}\left[-\frac{f_1(0,y)}{y^2}+\frac{a_1(0,y)}{y}\psi_2(y)+\psi_2'(y)\right]\equiv \tag{20}$$

$$\equiv N_2(\psi_2(y),f_1(0,y))(a_2(0,y)\neq b_1(0,y)),$$

где $\psi_2(y)$ — произвольная функция одной независимой переменной y.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_1(x,y),\ a_2(x,y)\in C_x^1(\overline{D})$,
$b_1(x,y),\ c_j(x,y),\ f_j(x,y)\in C(\overline{D}),\quad j=1,2;$

2) $c_1(x,y)=r^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r}\right)+a_1(x,y)b_1(x,y),$
$c_2(x,y)=r\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r}\right);$

3) $a_1(x,y)$ и $a_2(x,y)$, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ соответственно удовлетворяют условиям совместности (13) и (19);

4) $\mid a_1(x,y)-a_1(0,0)\mid\leq H_1r^{\alpha_1},\ H_1=\text{const},\ o<\alpha_1<1,$

$\mid b_1(x,y)-b_1(0,0)\mid\leq H_2r^{\beta_1},\ H_2=\text{const},\ o<\beta_1<1,$

$\mid a_2(x,0)-a_2(0,0)\mid\leq H_3x^{\gamma_1},\ H_3=\text{const},\ o<\gamma_1<1;$

5) $a_1(0,0)<0,\ b_1(0,0)>0,\ a_2(0,0)>-1;$

6) $f_1(x,y)=o\left(\left(\frac{x+r}{y}\right)^{-b_1(o,o)}r^{\gamma_2}\right),\ \gamma_2>1,$

$f_2(x,0)=o\left(x^{\nu_1}\right),\ \nu_1>0.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде (7), (18), (20).

При этом

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \varphi_1(x),$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} u(x,y)\right) = O\left(x^{-a_2(0,0)}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} u(x,y) = O\left(\left(\frac{y+r}{x}\right)^{-a_2(0,0)}\right),$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{x^{a_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = c_1,$$

$$P^1_{x,a_2}(u)|_{x=0} = \vartheta_{x,a_2}(u)|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x,y)}{r^2}u\right)|_{x=0} = \psi_2(y).$$

При помощи полученного интегрального представления в явном виде находится решение следующей начально-краевой задачи.

Задача A_1. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$, удовлетворяющее следующим условиям

$$\lim_{x\to 0}\left\{x^{a_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\right\} = m_1,$$

$$P^1_{x,a_2}(u)|_{x=0} = g_1(y),$$

где m_1 — заданная известная постоянная, $g_1(y)$ — заданная функция точек контура Γ_2.

О разрешимости задачи A_1 получено следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть коэффициенты и правые части системы уравнений (1) удовлетворяют всем условиям теоремы 1. В задаче A_1 $g_1(y) \in C(\Gamma_2)$. Тогда задача A_1 имеет единственное решение, которое дается при помощи формул (8), (19), (21) при $c_1 = m_1,\ \psi_2(y) = g_1(y)$.

Замечание 1. Представление многообразия решений системы уравнений (1) получено в явном виде, когда первое уравнение системы является главным и коэффициенты уравнения системы связаны.

Замечание 2. Когда коэффициенты уравнений системы (1) не связаны, представление многообразия решений названной системы получено при помощи резольвенты двухмерного интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Замечание 3. Система уравнений (1) также исследована в случае, когда второе уравнение системы (1) является главным, при выполнении условий $a_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}),\ c_2(x,y),\ f_2(x,y) \in C(\overline{D})$.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Республики Таджикистан Н.Р. Раджабову за обсуждение настоящей работы и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

2. Михайлов, Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями / Л. Г. Михайлов. — Душанбе : Дониш, 1986. — 115 с.

3. Нахушев, А. М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений / А. М. Нахушев // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195. — № 4. — С. 776–779.

4. Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н. Раджабов. — Душанбе : Изд-во ТГУ, 1992. — 236 с.

5. Раджабов, Н. Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов. — Душанбе : Деваштич, 2007. — 221 с.

6. Раджабов, Н. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями / Н. Раджабов, М. Эльсаед Абдель Аал. — Саарбрюккен : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 234 с.

7. Шамсудинов, Ф. М. Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка с сверхсингулярной точкой / Ф. М. Шамсудинов, Н. А. Вирченко // Докл. АН Украины. — 2003. — Т. 1. — С. 17–22.

8. Shamsudinov, F. M. About an overdetermined system second order with singularity coefficients / F. M. Shamsudinov // Abstracts 36^{th} Annual Iranian Mathematics conference. — 2005. — P. 211–212.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some Class of Equations of Partial Division]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p.

2. Mikhaylov L.G. *Nekotorye pereopredelennye sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh s dvumya neizvestnymi funktsiyami* [Some Partial Differential Systems of Equations and Partial Division of two Unknown Functions]. Dushanbe, Donish Publ., 1986. 115 p.

3. Nakhushev A.M. O zadache Darbu dlya giperbolicheskikh uravneniy [About the task of Darboux for hyperbolic equalizations]. *DAN SSSR* [Doklady Mathematics], 1970, vol. 195, no. 4, pp. 776–779.

4. Radzhabov N. *Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh so sverkhsingulyarnymi koeffitsientami* [An Introduction to the theory of partial differential equations with super-singular coefficients]. Dushanbe, Izd-vo TGU Publ., 1992. 236 p.

5. Radzhabov N. *Integralnye uravneniya tipov Volterra s fiksirovannymi granichnymi i vnutrennymi singulyarnymi i sverkhsingulyarnymi yadrami i ikh prilozheniya* [Integral equations of Voltaire type with fixed border and internal singular and super-singular kernels and their applications]. Dushanbe, Devashtich Publ., 2007. 221 p.

6. Radzhabov N., Elsaed Abdel Aal M. *Pereopredelennaya lineynaya sistema vtorogo poryadka s singulyarnymi i sverkhsingulyarnymi liniyami* [Overdetermined linear system the second order with singular and super-singular lines]. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing Publ., 2011. 234 p.

7. Shamsudinov F.M., Virchenko N.A. Integralnye predstavleniya resheniy i granichnye zadachi dlya obshchego giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka s sverkhsingulyarnoy tochkoy [The integral representation of solutions and boundary-value problems for a general second-order hyperbolic equation with supersingular point]. *Dokl. AN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 2003, vol. 1, pp. 17–22.

8. Shamsudinov F.M. About an overdetermined system second order with singularity coefficients. *Abstracts* 36^{th} *Annual Iranian Mathematics conference*, 2005, pp. 211–212.

ON AN OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND ORDER DIFFIRENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR POINT

Shamsudinov Fayzullo Mamadulloevich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematical Analysis,
Qurghonteppa State University
faizullo100@yahoo.com
Ayni St., 67, 735140 Qurghonteppa, Tajikistan

Abstract. In this paper we consider the over determined system of second order differential equations with a singular point. The system of equations (1) consists of a hyperbolic equation and one partial differential equation of second order with a singular point. The first equation of system (1) under certain conditions on the coefficients can be represented as a superposition of two first order differential operators. Solving this equation and substituting its value in the second equation, we obtain the compatibility conditions for the coefficients and right-hand sides. On the basis of the conditions of independence from the left side of the variable y, to determine any function $\phi_1(x)$, we obtain an ordinary differential equation of the first order. Another arbitrary function $\psi_1(y)$ is determined from the condition of the independence of the left part at the appropriate, passing to the limit.Thus, the obtained representing the solution manifold system using a single arbitrary function of one independent variable y and one arbitrary constant study of properties of the solutions, as well as consider the problem of **A**.

Key words: over determined system, singular equation, rectangle, variety of solutions, singular point.